

## Esercizi - Sistemi dinamici discreti unidimensionali

**Esercizio 1** Studiate graficamente le mappe

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \sqrt{x_n} \\x_{n+1} &= e^{x_n} \\x_{n+1} &= \cot x_n \\x_{n+1} &= \sinh x_n \\x_{n+1} &= \frac{2x_n}{1+x_n}\end{aligned}$$

**Esercizio 2** Studiare le mappe

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 + \lambda \\x_{n+1} &= \lambda x_n + x_n^3 \\x_{n+1} &= \lambda x_n\end{aligned}$$

al variare di  $\lambda$ .

**Esercizio 3** Dimostrare che la mappa a tenda

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è caotica.

**Esercizio 4** La mappa shift decimale è definita da

$$x_{n+1} = 10x_n \pmod{1} \tag{0.1}$$

dove mod prende la parte non intera di  $x$ . Studiare il grafico della mappa. Trovare tutti i punti fissi. Dimostrare che la mappa ha punti periodici di periodo  $p$  per qualsiasi  $p$  ma che sono repulsivi. Dimostrare che esistono infinite orbite aperiodiche (hint: considerate numeri irrazionali). Calcolare l'esponente di Liapunov e mostrare che c'è dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Sapete trovare un'orbita densa?

**Esercizio 5** Diciamo che un  $k$ -ciclo è superstabile per una mappa  $f$  se  $|(f^k)'(x)| = 0$ . Dimostrare che la mappa  $x_{n+1} = 1 - rx_n^2$  ha un 3-ciclo superstabile. Per quali valori di  $r$ ?