

ROTAZIONI in 2 dimensioni:

Le rotazioni su un piano sono date dalle matrici:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

a) dipendono da un parametro reale α ;

b) soddisfano la relazione $R(\alpha)^T R(\alpha) = R(\alpha) R(\alpha)^T = \mathbb{1}_2$

c) dato un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ il suo trasformato sotto rotazioni è

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

d) le rotazioni formano un gruppo detto $SO(2)$.

(+) Vedi ultima pagina.

La proprietà b) è equivalente a dire che la norma del vettore è invariante sotto rotazioni del vettore:

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^T \vec{v} \mapsto (R\vec{v})^T \cdot (R\vec{v}) = \vec{v}^T \cdot R^T R \vec{v} = \vec{v}^T \vec{v}.$$

Infatti le ROTAZIONI sono definite come qle trasformazioni sui vettori che preservano la norma e hanno determinante unitario (per distinguerle da simmetrie assiali).

$$\rightarrow SO(2) = \left\{ R \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1}, \det R = 1 \right\}$$

(Rilassando condizione $\det R = 1$, ho gruppo $O(2)$.)

Rotazioni in dimensioni generiche

Se ho uno sp. vett. n -dim. isomorfo a \mathbb{R}^n , le rotazioni sono date dalle matrici $n \times n$ che preservano la norma e hanno $\det = 1$.

$$SO(n) = \left\{ R \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1}, \det R = 1 \right\}$$

↑
è un GRUPPO di Lie, cioè trasformazioni che dipendono in modo continuo dai parametri.

Rotazioni infinitesime e generatori di $SO(n)$

Siccome $\mathbb{1} \in SO(n)$, ci sono trasf. infinitesimamente vicine all'identità ($SO(n)$ è gruppo di Lie).

Consideriamo

$$R = \mathbb{1} + \Omega + O(\Omega^2) \quad \text{con } \Omega_{ij} \ll 1$$

che proprietà deve avere Ω affinché R sia una rotazione infinitesima?

$$\mathbb{1} \stackrel{!}{=} R^T R = (\mathbb{1} + \Omega^T + \dots)(\mathbb{1} + \Omega + \dots) = \mathbb{1} + \Omega^T + \Omega + O(\Omega^2)$$

$$\Rightarrow \Omega + \Omega^T = 0 \quad \text{cioè } \Omega \text{ è matrice ANTI SIMMETRICA}$$

↑
a meno di ordini successivi

Es. $SO(2)$: prendiamo angoli $\epsilon \ll 1$

$$\begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon^2/2 + \dots & -\epsilon + \dots \\ \epsilon + \dots & 1 - \epsilon^2/2 + \dots \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2)$$

↑
antisimmetrica

Ora, prendiamo la matrice antisimmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ed esponenziamola

$$\exp A = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad E \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A^2 = -\alpha^2 \mathbb{1}$, $A^3 = -\alpha^2 \mathbb{1} \cdot \alpha E = -\alpha^3 E$,

$$A^{2m} = (A^2)^m = (-1)^m \alpha^{2m} \mathbb{1} \quad A^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m+1} E$$

$$\begin{aligned} \exp A &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!} = \mathbb{1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m)!} + E \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos \alpha \mathbb{1} + \sin \alpha E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cioè l'esponenziale della matrice in infinitesima antisimm. è la matrice di rotazione. In effetti, ogni matrice di $SO(2)$ si può scrivere come $\exp(\alpha E)$.

E si dice GENERATORE di $SO(2)$.

Qto si generalizza a $SO(n)$: ogni matrice di $SO(n)$

si può scrivere come

$$R = \exp(\Omega) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega_i E_i\right)$$

parametri

base di matrici antisimm. \rightarrow generatori di $SO(n)$

qto è consistente col fatto che

se $|\omega_{ij}| \ll 1$, allora $R = \exp(\Omega) \sim \mathbb{1} + \Omega$.

Rotazioni nello spazio euclideo 3d : $SO(3)$

- $SO(3)$ è generato da $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè } \Omega_{ij} = -\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k$$

- E_i genera rotazioni attorno all'asse i -esimo

Per esempio: E_3 genera rotaz. attorno asse z (cioè nel piano xy): infatti

$$R_3 = \exp(\omega_3 E_3) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 & -\sin \omega_3 & 0 \\ \sin \omega_3 & \cos \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

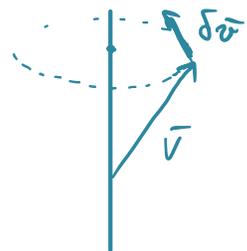
Analoghe espressioni valgono per R_1 e R_2 .

- Prendiamo vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e facciamo rotazioni infinitesime:

$$\vec{v} \mapsto \vec{v}' = \mathbb{1} + \Omega \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \text{ è variato di}$$

$$\delta \vec{v} \equiv \vec{v}' - \vec{v} = \Omega \vec{v}$$

tg a cerchio \perp asse rotaz.
 $\Rightarrow \delta \vec{v} \perp$ asse rotaz.



In componenti:

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^3 \Omega_{ij} v_j = -\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k v_j = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ikj} \omega_k v_j = (\vec{\omega} \times \vec{v})_i$$

• Dato vettore $\vec{\omega}$, $\vec{\omega} \times \vec{v}$ è la variazione sotto

una rotazione infinitesima $\mathbb{1} + \Omega$ con $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

• $\delta \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ è $\perp \vec{v}$ e $\vec{\omega}$
 $\delta \vec{v} = \Omega \vec{v}$ è $\perp \vec{v}$ e all'asse di rotazione } asse di rotaz. $\hat{=} \parallel \vec{\omega}$

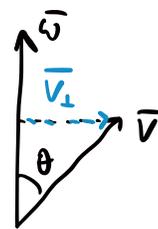
$$\bullet |\delta \vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \underbrace{|\vec{\omega}| |\vec{v}| \sin \theta}_{|\vec{v}_\perp|}$$

Sul piano
 $\perp \vec{\omega}$



$$\text{tg } \delta \alpha = \frac{|\delta \vec{v}|}{|\vec{v}_\perp|} = |\vec{\omega}|$$

||
 $\delta \alpha$



\Rightarrow

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ è la variazione di \vec{v} sotto rotaz. infinitesime di angolo $|\vec{\omega}|$ attorno a un asse parallelo al vett. $\vec{\omega}$.

- Abbiamo che $(E_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$

- Inoltre i GENERATORI di $SO(3)$ (le matrici E_i) soddisfano

$$[E_i, E_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} E_k$$

dove $[A, B] = AB - BA$
 "COMMUTATORE" di matrici

$$\begin{aligned} \text{Dim. } (E_i E_j)_{mn} &= \sum_p (E_i)_{mp} (E_j)_{pn} = \sum_p \epsilon_{imp} \epsilon_{jpn} = \\ &= -\sum_p \epsilon_{imp} \epsilon_{jnp} = -(\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_i E_j - E_j E_i)_{mn} &= (-\cancel{\delta_{ij} \delta_{mn}} + \delta_{in} \delta_{mj} + \cancel{\delta_{jn} \delta_{mi}} - \delta_{jn} \delta_{mi}) \\ \delta_{in} \delta_{mj} - \delta_{jn} \delta_{mi} &= \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{nmk} = \sum_k \epsilon_{ijk} \underbrace{(-\epsilon_{kmn})}_{(E_k)_{mn}} \end{aligned}$$

Prendendo combinazioni lineari di E_i , posso costruire un sottosp. vett. 3-dimensionale di $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i E_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Il commutatore è un'applicazione bilineare antisimmetrica

$$[,]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} \text{[Infatti } [\sum_i \alpha_i E_i, \sum_j \beta_j E_j] &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [E_i, E_j] = \\ &= \sum_{i,j,k} \alpha_i \beta_j \epsilon_{ijk} E_k = \sum_k \left(\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \alpha_i \beta_j \right) E_k \in \mathcal{L}.] \end{aligned}$$

Uno spazio vettoriale dotato di prodotto bilin. antisim. è detto **ALGEBRA di LIE**.

Data un'ALG. di LIE, posso associarci un **GRUPPO di LIE**, applicando la MAPPA ESPONENZIALE vista sopra.

(*) Rotazioni $SO(2)$ formano un gruppo : $SO(2) = \{ g(\alpha) \in M_{2 \times 2},$

$$\text{t.c. } g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow g(\alpha_1) g(\alpha_2) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} = g(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

↑ ancora nella forma di matrice di $SO(2)$

$$\rightarrow g(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è Id.}$$

$$\rightarrow g(-\alpha) g(\alpha) = g(-\alpha + \alpha) = g(0) = \text{Id}$$

$\Rightarrow \exists$ inverso di $g(\alpha)$, $\forall \alpha$.

ROTAZIONI e TEOREMA DI NÖTHER

Rotazioni attorno ad asse $\bar{\omega}$ sono date da

$$\exp\left(\alpha \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i E_i\right) \quad \alpha: \text{angolo di rotazione} \quad \hat{\omega}_i: \text{versore in direz. di } \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{q}, \alpha) = e^{\alpha \sum_i \hat{\omega}_i E_i} \bar{q}$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \alpha}(\bar{q}, \alpha) = \sum_i \hat{\omega}_i E_i e^{\alpha \sum_i \hat{\omega}_i E_i} \bar{q} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) = \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i E_i \bar{q}$$

Ricordiamo che $\left(\sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i E_i \right)_{lj} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ljk} \hat{\omega}_k$ (*)
matrice

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) = - \sum_{k,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_k q_j$$

Dal teorema di Noether: se L è invariante per rotazioni attorno ad asse $\bar{\omega}$, allora la costante del moto associata è

$$P = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) p_i = - \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} p_i q_j \hat{\omega}_k =$$

$$= \sum_k \left(\underbrace{\sum_{ji} \epsilon_{kji} q_j p_i}_{M_k} \right) \hat{\omega}_k = \sum_k M_k \hat{\omega}_k = \underbrace{\bar{M} \cdot \hat{\omega}_k}_{\text{COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO L'ASSE } \bar{\omega}}$$

M_k
 k-esima componente del momento angolare

$$\bar{M} = \bar{q} \times \bar{p}$$