

FISICA NUCLEARE (10)

- Reazioni nucleari in regime non relativistico
 - Leggi di conservazione
 - Energetica delle reazioni nucleari
 - Diffusione da potenziale nucleare
 - Diffusione in onde parziali
 - Modello ottico (1)

- **Reazioni nucleari in regime non relativistico**

1919: Rutherford trasmutazione specie nucleari $\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O} + p$

1932: Cockroft e Walton $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \alpha$ ($E_{k,p}$ 125÷600 keV ; importante nella nucleosintesi primordiale)

- \sim **decine di MeV** nel canale di reazione : **bassa energia**
- **100 MeV ÷ 1 GeV** : **media energia** (produzione **mesoni** e trasformazioni $p \rightleftharpoons n$)
- **Energie superiori** (produzione particelle massive e ri-arrangiamenti quark)

Reazione nucleare: $a + X \rightarrow Y + b$ o $X(a,b)Y$ (due corpi)

- $a \equiv \gamma$ reazione **foto-nucleare**, $b \equiv \gamma \rightarrow$ **cattura radiativa**
- $a \equiv b$ e $X \equiv Y$: **elastica** se Y e b in stato fondamentale; **anelastica** se Y e/o b eccitati
- $a \equiv b$ + ulteriore nucleone in canale d'uscita \Rightarrow meccanismo di **knockout**
- **Reazioni di trasferimento**: uno o più nucleoni scambiati fra proiettile e bersaglio

– **Reazioni classificate anche in base al meccanismo**

- **Reazioni di trasferimento** sono parte delle **reazioni dirette**, solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, partecipano al processo, i restanti sono **spettatori passivi**

- Meccanismo **nucleo composto**: proiettile e bersaglio fondono per breve lasso di tempo, ripartendosi energia disponibile prima che sistema si disecchi emettendo uno o più nucleoni; \sim **evaporazione** di molecole da liquido caldo
- Fra questi due estremi \Rightarrow **reazioni di risonanza**: **proiettile e bersaglio** formano stato **quasi-legato** prima di emettere un prodotto leggero di reazione

Leggi di conservazione

- **Energia totale** e **impulso totale**: correlano energie misurabili di prodotti di reazione a quelle note delle particelle incidenti
- Energia di b \Rightarrow dedurre energia eccitazione degli stati di Y o differenza di massa tra X e Y
- Conservazione **numero barionico** (Diff. barioni – antibarioni in canale d'ingresso coincide con stessa diff. in canale d'uscita)
- Conservazione **momento angolare** \Rightarrow correla spin canale d'ingresso a mom. ang. orb. dei prodotti nei canali d'uscita (misure di distribuzioni angolari)
- **Parità**: parità incognite degli stati eccitati si deducono da quelle note e dal mom. ang. orb. dei prodotti $[(-1)^l]$
- Conservazione **Isospin**

Energetica delle reazioni nucleari

- Appross. non relativistica

Conservazione energia:

$$m_X c^2 + E_{k,X} + m_a c^2 + E_{k,a} = m_Y c^2 + E_{k,Y} + m_b c^2 + E_{k,b}$$

Q-valore:

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b) c^2 \equiv E_{k,Y} + E_{k,b} - E_{k,X} - E_{k,a}$$

$Q > 0$, **eso-energetica** (massa, o en. legame $\rightarrow E_k$ dei prodotti)

$Q < 0$, **endo-energetica** ($E_k \rightarrow$ massa o en. legame dei prodotti)

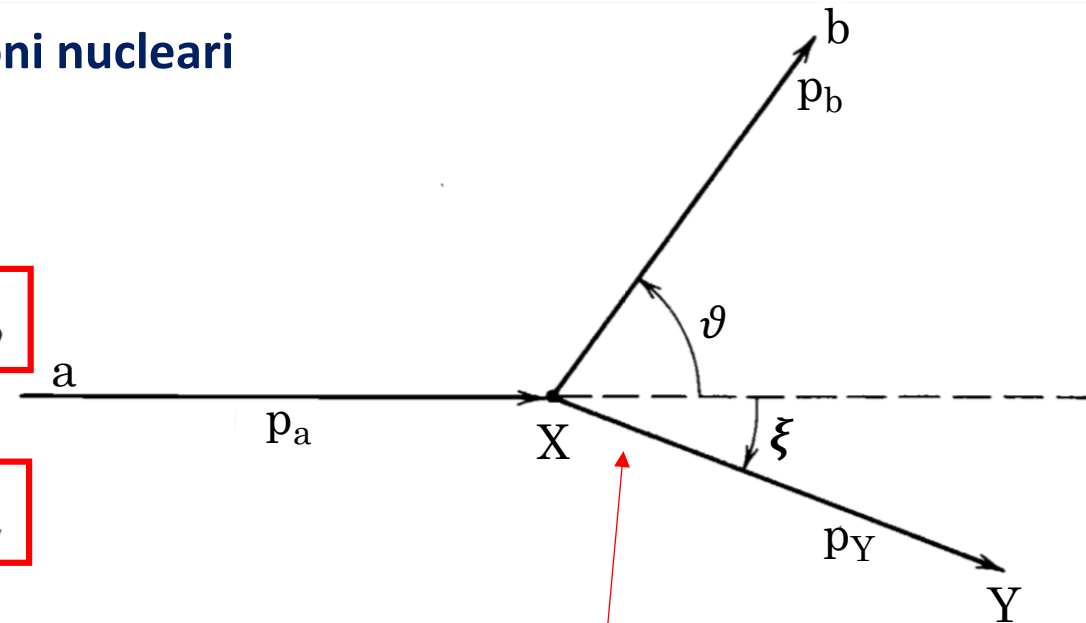
$Q = 0$, **elastica**

- **SL**: **piano di reazione** quello *contenente asse fascio e velocità di uno dei prodotti*

Se stato finale due corpi \Rightarrow entrambi si muovono sul piano di reazione

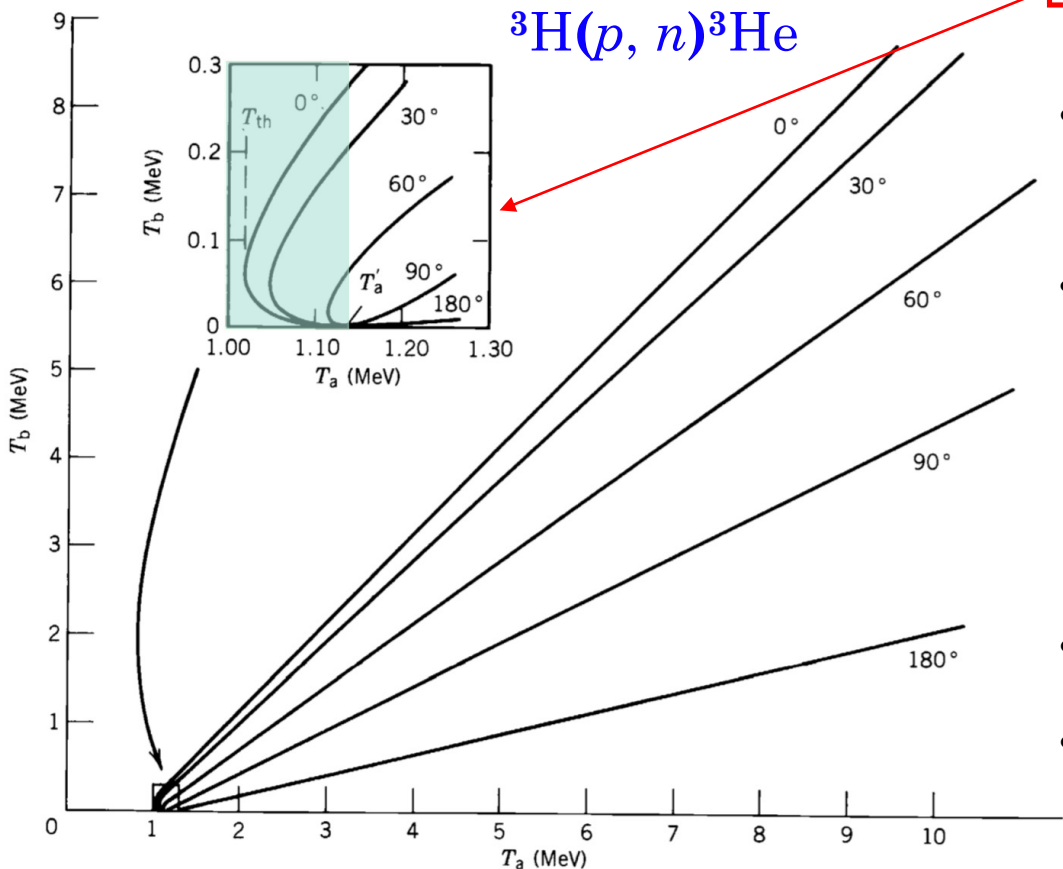
- **Conservazione impulso** $\Rightarrow p_a = p_b \cos\vartheta + p_Y \cos\xi$ e $0 = p_b \sin\vartheta + p_Y \sin\xi$

Se noto Q , ed $E_{k,a}$ (quindi p_a) è controllabile, conservazioni E e p \Rightarrow sistema 3 equazioni in 4 incognite, che **non ha soluzione unica**



Se non si osserva Y , perchè troppo poco energetico, eliminando ξ ed $E_{k,Y}$ si ha:

$$\sqrt{E_{k,b}} \cong \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a}} \cos\vartheta}{m_Y + m_b} \pm \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a} \cos^2\vartheta + (m_Y + m_b) [m_y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}}{m_Y + m_b}$$



${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$

$Q = -763.75 \text{ keV}$ $E_{k,b} \% E_{k,a}$ per ${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$
 Riquadro: zona non biunivocità

- Tranne piccolo intervallo $1.019 \text{ MeV} \leq E_{k,a} \leq 1.147 \text{ MeV}$ corrispondenza fra $E_{k,b}$ e ϑ , fissato $E_{k,a}$, è biunivoca
- $E_{k,a}$ ha minimo assoluto E_{th} sotto il quale la reazione non avviene e corrisponde a $Q < 0$
 Soglia sempre per $\vartheta = 0$, quindi $\xi = 0$, e corrisponde a Y e b che si muovono assieme, restando però due entità separate
- **Urto centrale senza trasformazione d'energia in impulsi trasversi**
- Se $Q > 0$ nessuna soglia, ma tener conto barriera coulombiana
- Zona non-biunivocità fino ad angolo max ϑ_m equivalente a condizione annullamento argomento della seconda radice

- Misura di $E_{k,b}$, noti $E_{k,a}$ e $\vartheta \Rightarrow Q$ e relazione fra masse. Note m_a , m_b ed m_X si deduce m_Y

$$Q = E_{k,b} \left(1 + \frac{m_b}{m_Y} \right) - E_{k,a} \left(1 - \frac{m_a}{m_Y} \right) - 2 \sqrt{\frac{m_a}{m_Y} \frac{m_b}{m_Y} E_{k,a} E_{k,b} \cos \vartheta}$$

- Se reazione porta a stati eccitati di Y , allora Q deve tenerne conto

$$Q_{ecc} = (m_X + m_a - m_Y^* - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ecc}$$

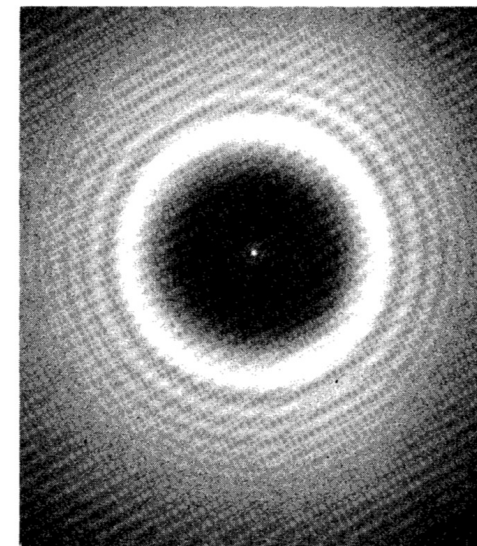
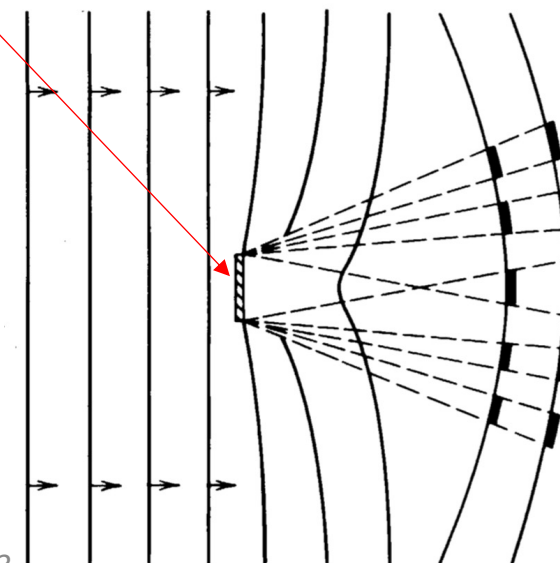
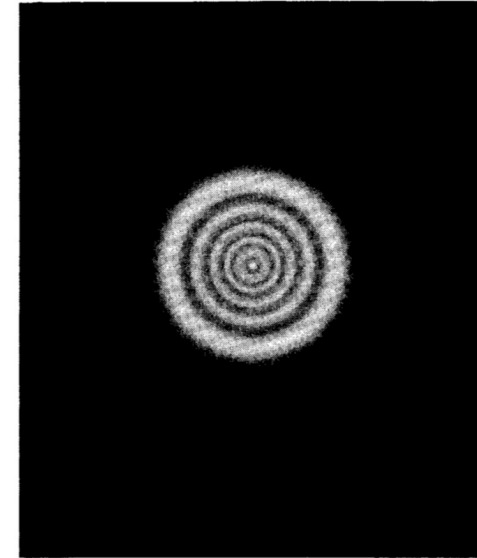
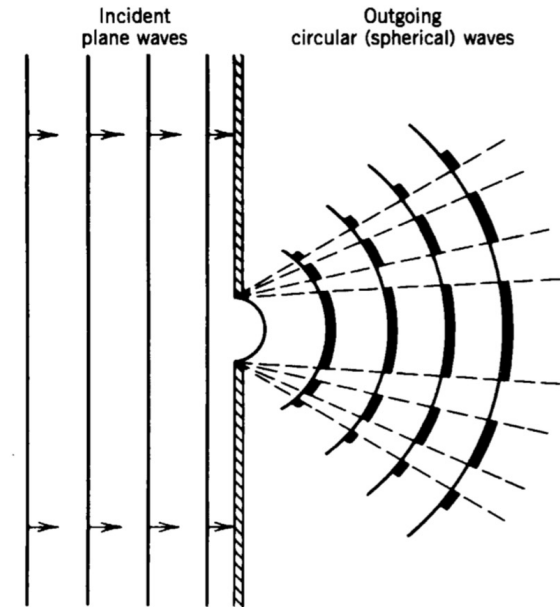
Diffusione da potenziale nucleare

- Intensità interazione \Rightarrow **NO** approccio perturbativo
- Alte energie $\lambda = h/p \approx R$ nucleo: sez. urto sper. elas. mostra andamenti \sim diffrattivi \Rightarrow approccio **ottico**

Ottica: disco opaco bordo netto \Rightarrow max e min. diffr. con 1° min. a $\sin\vartheta \approx \lambda/R$; min. successivi \approx spazati e max. intermedi calano d'ampiezza al crescere di ϑ

- Nucleo assorbe efficacemente nucleoni incidenti \Rightarrow **analogia con disco opaco** *
Proiettili carichi: concorrenza meccanismi coul. % nuc.
- Per osservare diff. elastica diffrattiva di nucleoni \Rightarrow eliminare effetti coulombiani. Due modi:
 - **1°** utilizzare proiettili privi di carica che però sentono forza nuc., come **n**

*(Sez. d'urto diff. con minimi sempre $> 0 \Leftrightarrow$ superficie nucleare non bordo netto, ma diffusa)

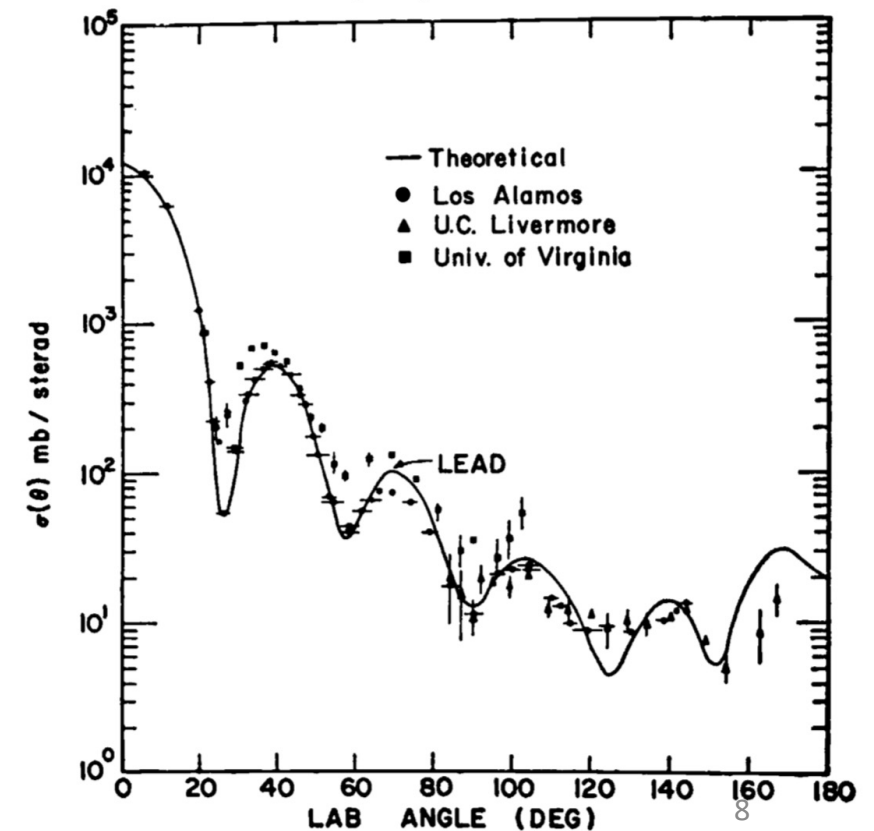
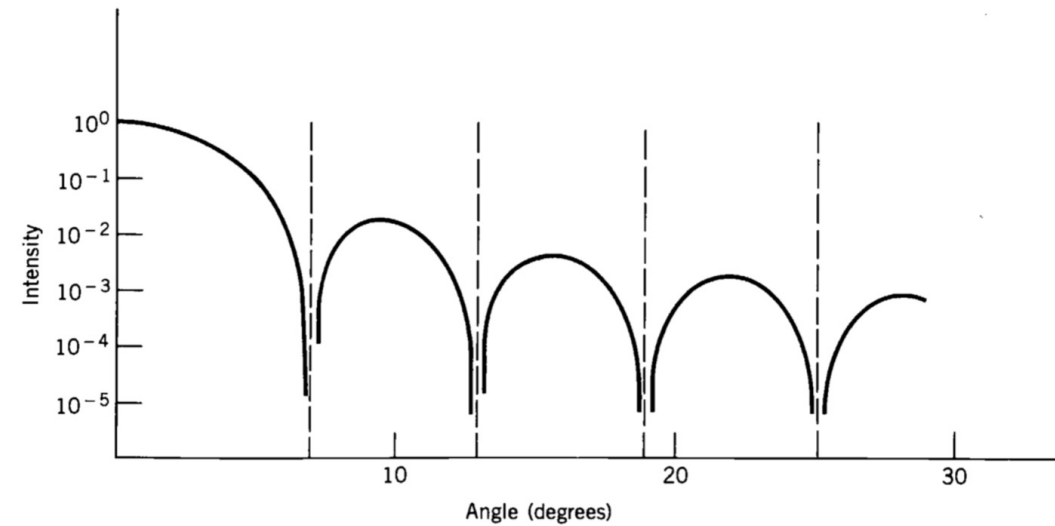


- **2°** con proiettili carichi, riducendo eff. coul. (due passi successivi)

a) energia suff. contrastare barriera e favorire max. avvicinamento proiettile-bersaglio;

b) osservare a grandi angoli, dove sez. d'urto coulomb. decresce molto e rapidamente

- Diff. anelastica coulombiana lascia nucleo, spesso anche proiettile, eccitati
- Distrib. energia particelle diffuse ad angolo definito ha singolo picco elastico a en. max., e picchi a energie minori corrispondenti a interaz. anelastiche associate a stati eccitati del bersaglio
- Posizione di ogni picco correlata a en. stato eccitato che lo genera, sua popolazione \propto sez. d'urto reazione d'eccitazione dello stato associato
- Distrib. ang. particelle diffuse da stati eccitati \leftrightarrow spin-parità degli stessi



Diffusione in onde parziali

Bersaglio di **massa** $\approx \infty$ in $z = 0$:
 - particelle incidenti \Rightarrow **onde piane** e^{ikz} con impulso $|p| = \hbar k$
 - particelle in uscita \Rightarrow **onde sferiche**

Onda piana incidente: **sovrapp. di onde sferiche**

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\vartheta) \quad A = \text{cost. norm.}$$

$j_l(kr) \rightarrow$ **funz. Bessel**, soluz. parte radiale eq. Schrödinger lontano da bersaglio; $P_l(\cos\vartheta) \rightarrow$ **pol. Legendre**
 Sviluppare onde incidente e diffusa in **onde parziali**, ognuna per uno specifico valore di $l \Rightarrow$ fattibile se pot.
 interazione è **centrale**; **utile se si considerano onde d'ordine l basso**

- **Semi-classicamente**: particella d'impulso $p = 2\pi\hbar/\lambda$ interagisce con **parametro d'urto** b , \Rightarrow
 mom. ang. relativo $l\hbar = pb$ da cui: $b = l \frac{\hbar}{p} = l \frac{\lambda}{2\pi} = l\lambda$
- **l interi** \Rightarrow particelle con mom. ang. tra $0\hbar$ e $1\hbar$ interagiscono con parametri d'urto fra $b = 0$ e $b = \lambda$,
 attraversando area circolare efficace $= \pi\lambda^2$
 Per $\hbar \leq l \leq 2\hbar$ sez. d'urto è anello circolare di raggio interno λ , esterno 2λ e area $3\pi\lambda^2$
- Si suddivide area interaz. in zone a valore di mom. ang. l e area $\pi[(l+1)\lambda]^2 - \pi(l\lambda)^2 = (2l+1)\pi\lambda^2$

Detti **1** e **2** proiettile e bersaglio: $b_{max} = R_1 + R_2$. Per max. valore utile di l : $l_{max} = b_{max}/\lambda$, dato breve range interazione, e

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1) \pi \lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

Lontano da bersaglio Bessel diventa:

$$j_{\ell}(kr) \simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \quad , \text{ per cui}$$

$$= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr}$$

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

- Primo term. in [] è **onda sferica entrante** convergente su bersaglio, secondo **onda sferica uscente**
Sovrapposizione è onda piana
 - Per **causalità** diffusione **agisce solo su onda uscente**, modificandone **fase** e/o **ampiezza**
 - Modificare ampiezza, trascurando energia che va in nuove particelle \Rightarrow meno particelle nel canale d'uscita rispetto canale d'ingresso
- Ma funz. d'onda rappresenta **solo** particelle con impulso $\hbar k$. Diff. anelastica può modificare energia e identità delle particelle uscenti. **Al termine e^{ikr} possono quindi essere associate meno particelle dopo diff. anelastica**

Alcuni **canali di reazione** possono essere chiusi, se non suff. **energia e/o momento angolare**

Se ne tien conto con coeff. **complesso η_l** nelle onde uscenti di ordine **l^{mo}**

$$\psi = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - \eta_{\ell} e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

- **ψ** sovrapposizione di onde incidenti e diffuse: **$\psi = \psi_{inc} + \psi_{dif}$** , da cui

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}) e^{i(kr - \ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

Densità di corrente diffusa:

$$j_{dif} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right)$$

Ma corrente incidente è: $j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$

$$= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2$$

per cui: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2$

- Integrando P_l su tutto angolo solido \Rightarrow
sez. d'urto di diffusione

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell + 1) |1 - \eta_{\ell}|^2$$

Int. elastiche $\Rightarrow \eta_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, con δ_{ℓ} sfasam.
onda parziale d'ordine $\ell \Rightarrow |1 - \eta_{\ell}|^2 = 4 \text{sen}^2 \delta_{\ell}$

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi \lambda^2 (2\ell + 1) \text{sen}^2 \delta_{\ell}$$

- Sez. d'urto di reazione σ_r** , considera tutti i canali di reazione **tranne l'elastico**
Rateo riduzione partic. diffuse da canale con n. d'onda k , \propto **(corrente entrante) - (corrente uscente)**

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[\left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 + \right. \\ \left. - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_{\ell} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad \text{da cui:}$$

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

- Sezione d'urto totale** che tien conto di tutti i processi:

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi \lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_{\ell})$$

Osservazioni:

- Diff. elastica può esserci da sola ($|\eta_l| = 1$), l'anelastica solo assieme all'elastica
- Se bersaglio \sim disco opaco che assorbe onde parziali fino $l = b_{max}/\lambda$ ($\eta_l = 0 \Rightarrow$ assorb. completo) e non perturba quelle per $l > b_{max}/\lambda$ ($\eta_l = 1$), allora

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

da cui: $\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2$, ovvero **il doppio della sez. d'urto geometrica** (risultato non classico !)

Modello ottico (1)

Descrive interazione usando potenziale complesso: $U(r) = V(r) + iW(r)$

- $V(r)$ responsabile parte elastica dello scattering, assomiglia pot. modello a shell
- Coeff. $W(r)$ parte immaginaria, responsabile assorbimento (... nasconde dettagli interazione ...)

Esempio (buca quadrata):

$$U(r) = -V_0 - iW_0 \quad r < R$$

$$U(r) = 0 \quad r > R$$

Onda diffusa: e^{ikr}/r , con:

$$k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)/\hbar^2}$$

Posto $k = k_r + ik_i$, funz. d'onda uscente $\propto \frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$ e densità prob. radiale $\propto e^{-2 k_i r}$

Quindi è funz. d'onda attenuata esp. che si sovrappone al volume del nucleo

Se assorbimento ridotto [$W_0 < (E+V_0)$], si può sviluppare k

$$k \simeq \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E + V_0)}}$$

Distanza cui intensità s'attenua di $1/e$:

$$d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E + V_0)}{2m}}$$

Se $d \approx R$ (\sim fm), assumendo V_0 potenziale di modello a shell (~ 40 MeV), e con proiettili di $E_k \simeq 10$ MeV \Rightarrow
 $W_0 \simeq 11$ MeV