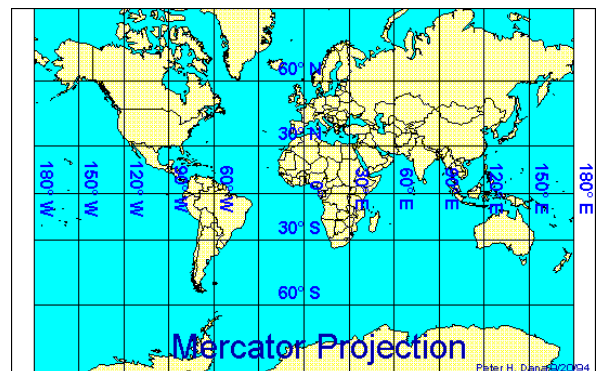
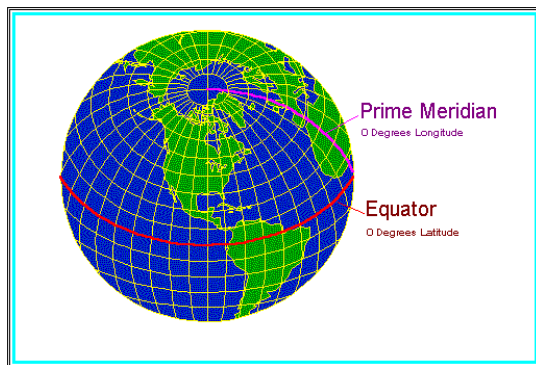
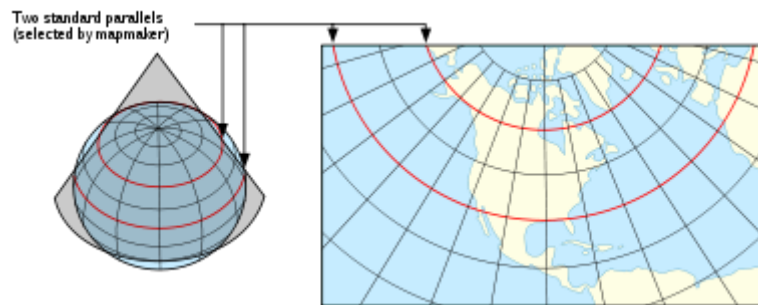


Dispensa di Cartografia

Prof. ing. Raffaella Cefalo



RAPPRESENTAZIONE DELLA SUPERFICIE TERRESTRE

L'insieme delle attività dell'uomo sulla Terra dedicate alla realizzazione di strutture ed infrastrutture, all'analisi e alla sistemazione del territorio ed agli spostamenti sul territorio richiede di poter disporre di una rappresentazione che permetta di conoscere in maniera sintetica e metricamente valida la superficie fisica terrestre.

Questa rappresentazione è nella maggior parte dei casi una **carta** ad una scala opportuna: la carta è quindi una rappresentazione grafica ed in scala del terreno. Essa può essere in formato numerico – carta digitale o numerica.

La Topografia è una scienza applicata che definisce un complesso di tecniche di misura, di calcolo e di disegno che permettono di definire metricamente e di rappresentare la superficie fisica terrestre in modo conveniente ai diversi scopi.

La **Cartografia** è l'arte della rappresentazione della superficie terrestre sul piano, secondo norme e segni convenzionali. Per rappresentare la terra o una sua porzione sul piano è necessario eseguire una trasformazione che consenta il passaggio dai punti della superficie terrestre ai punti corrispondenti su una *superficie di riferimento*, che andrà poi a sua volta rappresentata sulla superficie della carta.

La **rappresentazione della superficie fisica terrestre** è un'operazione piuttosto complessa, dato che:

- la superficie da rappresentare non è piana
- la superficie fisica del terreno ha una forma molto irregolare
- le dimensioni dell'oggetto da rappresentare eccedono in maniera decisa le normali capacità di misura dell'uomo.

A ciascun punto del terreno deve essere associato un punto (ed uno solo) sulla superficie di riferimento che deve possedere le seguenti caratteristiche:

- deve essere molto prossima alla superficie terrestre;
- la sua rappresentazione matematica deve essere abbastanza semplice;
- si deve poter stabilire una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti e quelli della superficie terrestre;
- si deve poter istituire su di essa una geometria per eseguire calcoli geodetici in modo semplice.

Il modo più semplice per "mappare" un punto della superficie terrestre su una superficie di riferimento è quello di proiettarlo su di essa tramite la direzione della verticale, materializzabile con un filo a piombo (Fig. 1).

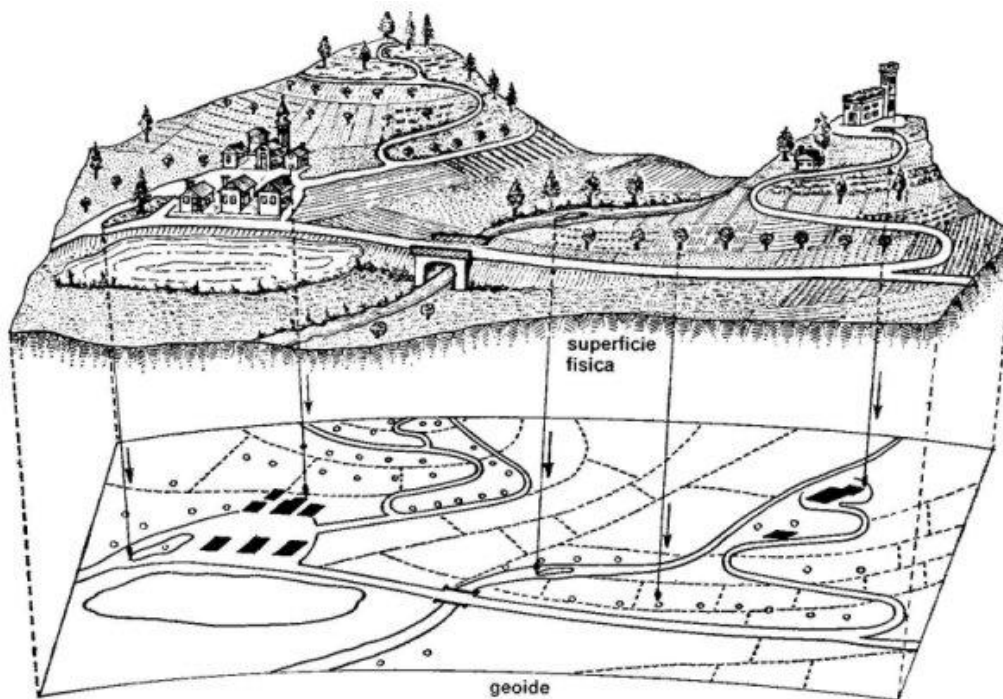


Fig. 1. Superficie fisica del terreno, geoide e rappresentazione del terreno.

La superficie che risulta normale in ogni suo punto alla direzione della verticale prende il nome di **geoide**. Questa superficie coinciderebbe con il livello medio della superficie del mare, opportunamente prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua dei mari fosse caratterizzata da temperatura e densità uniformi e fosse priva di perturbazioni legate a correnti, venti e maree.

Il geoide si definisce come superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre. La direzione della verticale coincide con quella delle linee di forza del campo gravitazionale.

La distanza (data da un segmento di linea di forza) fra un punto P sulla superficie terrestre ed il punto corrispondente P_g proiettato sul geoide si chiama **quota** (ortometrica).

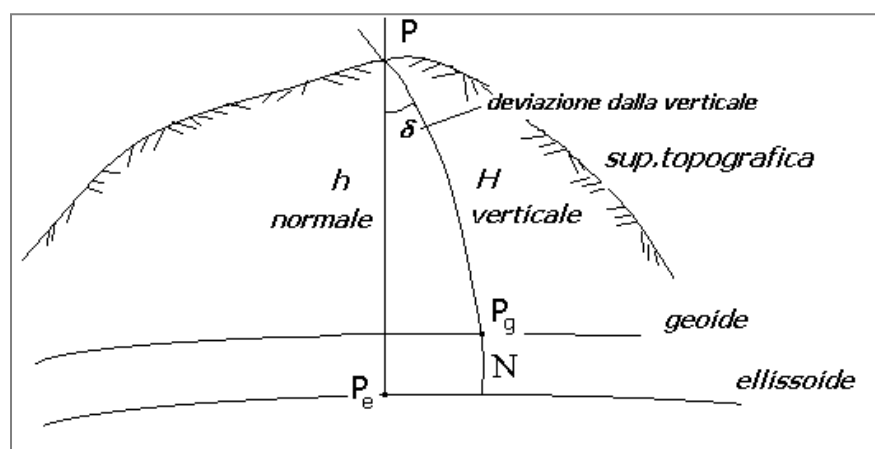


Fig. 2

Con riferimento alla Fig. 1 si può trarre un procedimento di rilievo e rappresentazione della superficie terrestre, che sarà in parte puramente teorico (in quanto presuppone la superficie fisica ridotta ad una sottile pellicola ed il geoide concretamente esistente e percorribile sotto di essa):

a) data l'irregolarità e complessità della superficie fisica questa deve essere individuata mediante la determinazione della posizione di un sufficiente numero di punti, numero che è funzione anche della scala della rappresentazione;

b) ogni punto andrebbe proiettato sul geoide secondo la verticale ed ogni proiezione andrebbe segnalizzata; vanno determinate le quote;

c) percorrendo il geoide si dovrebbero misurare angoli e distanze fra le proiezioni dei punti in modo da determinarne la posizione relativa;

d) sulla base degli elementi misurati occorre determinare la posizione dei punti proiettati mediante coordinate curvilinee sulla superficie di riferimento; è necessario conoscere l'equazione della superficie di riferimento, definire su di essa un sistema di coordinate curvilinee, ed eseguire dei calcoli che permettano, sulla base delle misure fatte, di ricavare le coordinate curvilinee dei punti proiettati;

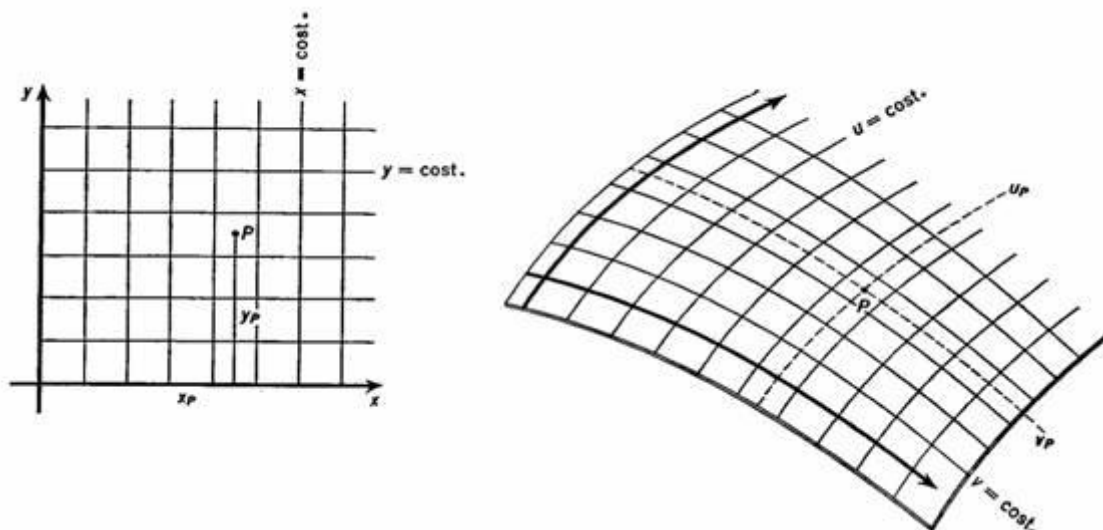


Fig. 3 Coordinate ortogonali sul piano e coordinate curvilinee sulla superficie

e) si può a questo punto costruire in scala la porzione di geoide interessata dal rilievo, riportare su questa, in scala, il sistema di coordinate curvilinee, e quindi la posizione di ciascun punto mediante le sue coordinate curvilinee, note; congiungendo opportunamente con linee i punti proiettati si evidenziano le particolarità del rilievo; accanto a ciascun punto si scrive anche la quota ottenendo così una rappresentazione completa del terreno; unendo i punti di eguale quota si ottengono le *curve di livello*;

f) per passare dalla rappresentazione su supporto curvo ad una rappresentazione piana si ricorre ad una rappresentazione cartografica, stabilendo per ciascun punto una corrispondenza biunivoca fra le coordinate curvilinee u e v e le coordinate cartesiane ortogonali x e y

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \end{aligned}$$

queste relazioni rappresentano le equazioni della carta.

La rappresentazione piana che si ottiene è deformata rispetto quella disegnata sul supporto curvo.

Le operazioni descritte ai punti b) e c) non possono essere eseguite in pratica dato che in effetti le operazioni di misura debbono svolgersi sulla superficie fisica, il problema viene però superato in quanto i metodi di misura di angoli e distanza fra punti della superficie fisica sono tali da fornire angoli e distanze quali si sarebbero misurati sul geoide.

Anche la misura diretta di una quota è impossibile, ma i metodi di misura utilizzati permettono di misurare *dislivelli*, ovvero differenze di quota fra i punti della superficie fisica. Le quote vengono allora definite collegando i punti mediante operazioni di livellazione che permettono di determinare le differenze di quota: è sufficiente che fra i punti collegati ve ne sia uno si quota nulla, ovvero sul geoide, oppure di quota nota per ricavare le quote di tutti gli altri punti.

Il geoide è una buona approssimazione della superficie terrestre. Purtroppo esso non è facilmente esprimibile dal punto di vista analitico, in quanto bisognerebbe conoscere il valore della densità in ciascun punto della terra, il che non è possibile.

Per questo motivo si adotta in molti casi come superficie di riferimento l'**ellissoide** di rotazione che, analiticamente, è esprimibile in forma semplice.

Una volta scelta la superficie di riferimento per ottenere la rappresentazione della superficie fisica occorrerà:

- a) definire l'equazione della superficie di riferimento
- b) definire su di essa un sistema di coordinate curvilinee u e v
- c) definire la natura degli angoli e delle distanze da misurare sulla superficie fisica
- d) definire i calcoli che permettono di dedurre dalle misure le coordinate curvilinee dei punti
- e) specificare le equazioni della carta per le rappresentazioni cartografiche che si vogliono utilizzare, definendo le deformazioni che queste comportano.

Possono essere introdotte alcune semplificazioni dato che, dal punto di vista planimetrico, una piccola porzione di geoide si discosta poco da un piano tangente condotto per il punto centrale; inoltre porzioni di geoide limitate a un paio di centinaia di km si discostano poco da una calotta sferica di raggio opportuno.

Inoltre una grossa semplificazione deriva dal fatto che la totalità dei punti necessari a definire una carta possono essere distinti in due grandi classi: punti di inquadramento e punti di dettaglio. I punti di inquadramento rappresentano una piccola percentuale del totale, la loro posizione è definita mediante operazioni di triangolazione, trilaterazione e poligonazione. Essi formano una rete di punti, ogni maglia della quale si riferisce ad una porzione di geoide che può, a certi fini, ritenersi piana; tutte le operazioni di raffittimento dei punti di inquadramento e di rilievo dei punti di dettaglio che si svolgono nell'ambito di una maglia possono essere concepite, sia per le misure che per i calcoli, come riferentesi ad una superficie piana.

I punti di dettaglio, che sono la maggioranza, vengono rilevati con riferimento ad un minimo di due punti di inquadramento e riportati graficamente sulla carta.

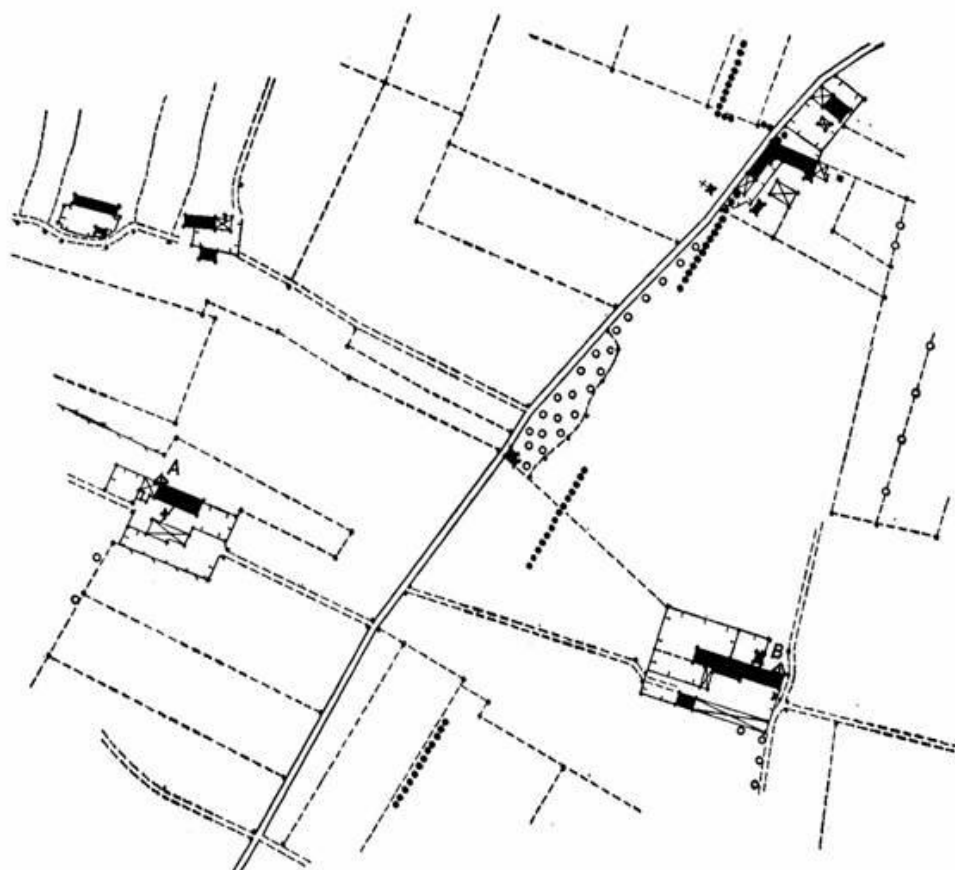


Fig. 4 Punti di dettaglio

Superfici di riferimento - Ellissoide

L'ellissoide è un solido biassiale di rotazione con semiasse equatoriale a e semiasse polare c , la cui equazione, riferita al sistema cartesiano ortogonale ellissocentrico ad esso associato, è data da:

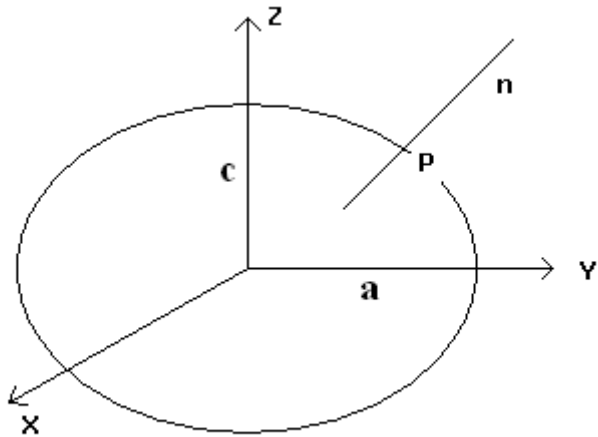
$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Possono essere definiti due ulteriori parametri dell'ellissoide:
lo schiacciamento α

$$\alpha = \frac{a - c}{a}$$

e l'eccentricità al quadrato e^2 :

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$



Sezioni normali

- si consideri un punto P sulla superficie e la normale all'ellissoide n ; tutti i piani passanti per n intersecano l'ellissoide secondo delle linee piane chiamate *sezioni normali*
- le sezioni normali hanno nel punto P raggi di curvatura diversi in dipendenza dell'angolo che la sezione normale forma con un piano di riferimento.

i raggi di curvatura delle sezioni normali in un punto dell'ellissoide variano con continuità da un minimo r ad un massimo N - raggi principali di curvatura - *raggio del meridiano* e raggio della sezione normale principale (*gran normale*)

$$\rho = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}^{\frac{3}{2}}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

- Assunto come riferimento l'ellissoide biassiale ne sono stati ricavati i parametri a e α , in base a:
 misure geometriche (misure di archi di meridiano e parallelo), misure di gravità, studi accurati delle traiettorie dei satelliti artificiali.

- Diversi geodeti hanno determinato i valori di questi parametri, ad es.:

Bessel (1841)	$a = 6377397 \text{ m}$	$\alpha = 1/299.2$
Clarke (1880)	$a = 6378243 \text{ m}$	$\alpha = 1/293.5$
Helmert (1906)	$a = 6378140 \text{ m}$	$\alpha = 1/298.3$
Hayford (1909)	$a = 6378388 \text{ m}$	$\alpha = 1/297$

- Nel 1924 furono adottati universalmente quali parametri dell'ellissoide di riferimento i valori proposti da Hayford: l'ellissoide così dimensionato è da allora indicato come **ellissoide internazionale**.

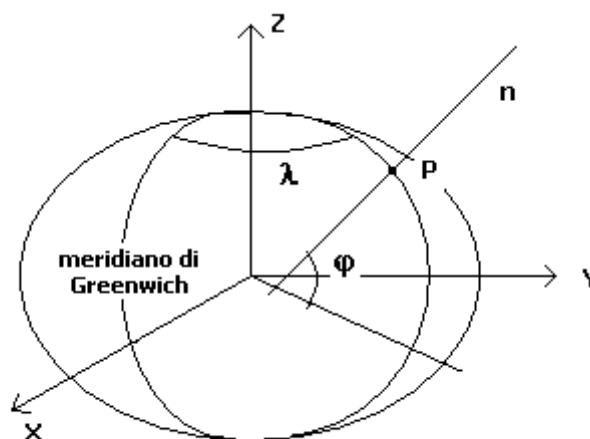
Latitudine e longitudine ellissoidiche

• latitudine φ

la normale n all'ellissoide in un punto P forma con la direzione dell'asse polare un angolo il cui complemento è la latitudine ellissoidica φ di P

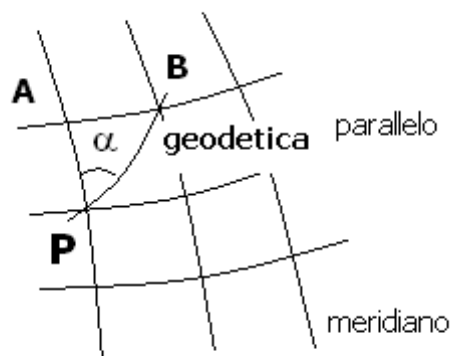
• longitudine λ

il punto P determina con l'asse polare un piano che, con un altro piano di riferimento per il meridiano di Greenwich e l'asse polare, forma un diedro la cui sezione retta è la longitudine ellissoidica λ di P



2. Misure di angoli e distanze sulla superficie di riferimento

Dopo aver proiettato i punti da rilevare sul geoide occorre misurare angoli e distanze fra i punti in modo da determinarne la posizione relativa.



Consideriamo le linee che congiungono due punti sulla superficie di riferimento, la lunghezza della linea compresa fra due punti rappresenta la distanza misurabile fra questi.

Dato che fra due punti su una superficie curva possono essere tracciate infinite linee di natura geometrica diversa occorre definire quella linea che, tra tutte le possibili, abbia la minore lunghezza, questa linea prende il nome di **linea geodetica**. Se due punti non sono troppo distanti la geodetica che li unisce è unica e rappresenta il percorso di minore lunghezza.

Le rette sono le geodetiche del piano e sulla sfera gli archi di geodetica sono archi di cerchio massimo.

Se si considerano due linee uscenti da un punto P l'angolo fra queste sarà l'angolo fra le tangenti alle linee uscenti da P.

1.3 Orientamento dell'ellissoide e determinazione delle coordinate geografiche di punti mediante misure eseguite sulla superficie di riferimento

Si consideri un insieme di punti di inquadramento P_i sull'ellissoide congiunti a due a due da archi di geodetica, in modo da formare dei triangoli ellissoidici, o altre figure poligonali e si supponga di avere eseguito un numero sufficiente di misure di angoli e distanze in modo tale che, o per misura diretta o per calcolo siano note le lunghezze di tutti i lati e gli angoli fra i lati.

Nel punto P_0 (*punto di emanazione*) si determinino con misure astronomiche la latitudine φ_0 , la longitudine λ_0 e l'azimut α_0 di una geodetica uscente da P_0 e passante per uno dei punti P_i , e si assumano tali misure come riferentesi all'ellissoide; in altre parole si faccia coincidere in P_0 la normale ellissoidica con la verticale (normale al geoide), e si assuma nullo il valore dell'ondulazione geoidica N , nel punto P_0 l'ellissoide di rotazione di semiassi a e c risulterà quindi tangente al geoide.

Per orientare completamente l'ellissoide che avrebbe ancora la possibilità di ruotare intorno alla normale, si assuma l'azimut astronomico α_0 coincidente con l'azimut ellissoidico.

Ciò posto, il problema fondamentale da risolvere per calcolare, con riferimento all'ellissoide, le coordinate curvilinee dei punti di inquadramento si può così enunciare: *dato un punto O di cui si conoscano le coordinate geografiche ellissoidiche φ_0, λ_0 noti la lunghezza s dell'arco di geodetica compreso fra O e un punto P e l'azimut α_0 di tale geodetica in O, calcolare le coordinate geografiche ellissoidiche φ, λ di P, nonché l'azimut α della stessa geodetica in P.*

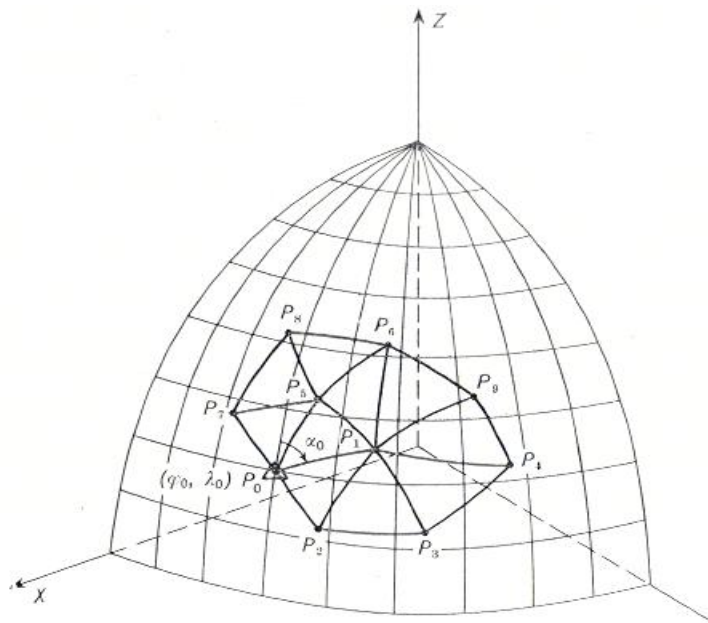


Fig. 5 Rete di punti di inquadramento sull'ellissoide

Da notare:

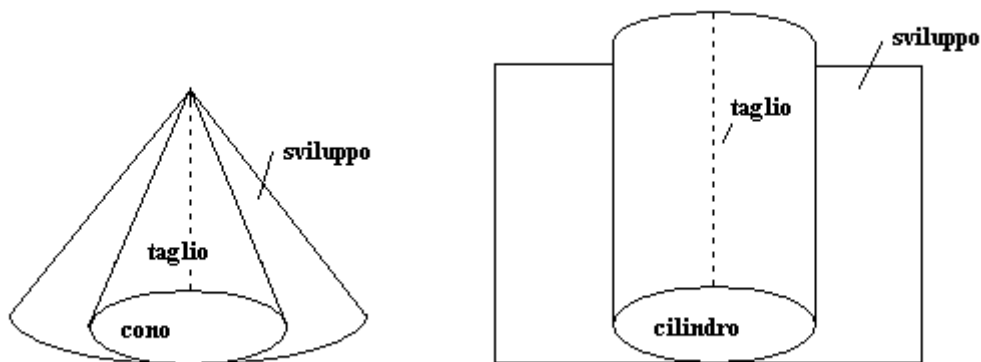
- a) L'operazione di orientamento dell'ellissoide riguarda le reti di inquadramento del 1° ordine, ovvero quelle reti di punti che vengono rilevate quando nella zona non esiste alcun rilievo geodetico precedente; nel caso più comune nella zona del rilievo da eseguire esistono già dei punti rilevati a cui riferirsi; è quindi sempre disponibile un punto O di coordinate geografiche note inserito nel rilievo, ed un azimut di partenza desunto da un altro punto O' di coordinate geografiche note;
- b) Il calcolo dell'azimut α della geodetica in P è richiesto perchè in generale a partire dal punto P si devono calcolare le coordinate geografiche di un altro punto Q della rete, per cui è necessario conoscere l'azimut in P della geodetica PQ; il calcolo di questo azimut può essere eseguito nel seguente modo: una volta noto α si calcola l'azimut reciproco $\alpha + \pi$, ovvero l'azimut in P della geodetica PO, e si aggiunge l'angolo θ , che si suppone noto, fra la geodetica PO e la geodetica PQ.

SUPERFICI DI PROIEZIONE¹

Per la costruzione delle Proiezioni Cartografiche si usano di solito tre superfici fisiche:

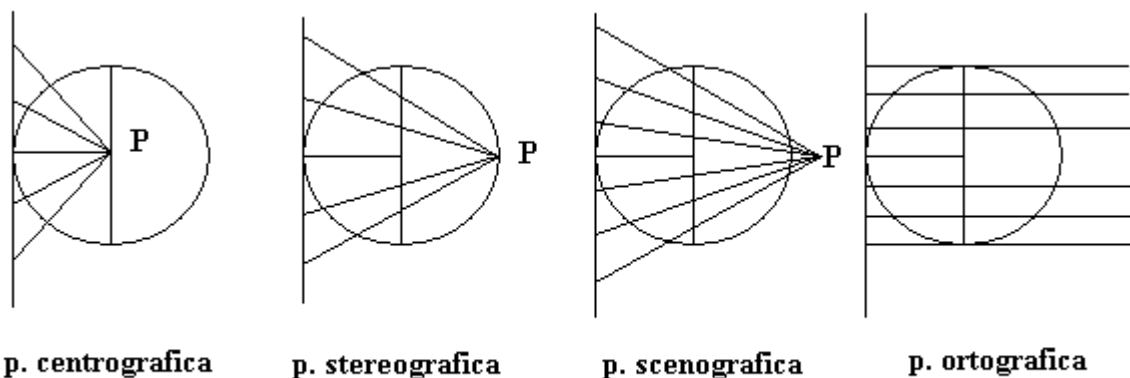
- il *piano* (proiezioni azimutali)
- il *cilindro* (proiezioni cilindriche)
- il *cono* (proiezioni coniche).

Le ultime due sono **superfici sviluppabili** (possono essere sviluppate operando un taglio sulla superficie e srotolandole senza per questo deformare la superficie o gli aspetti su di essa disegnati).



Le Proiezioni Cartografiche possono essere classificate anche in base alla posizione della **sorgente luminosa**. Quelle più usate comunemente sono:

- la posizione gnomonica al centro del globo
- la posizione stereografica agli antipodi (il punto opposto a quello di tangenza della superficie di proiezione)
- la posizione ortografica all'infinito.



Si definisce poi l'**orientamento** della superficie di proiezione.
I piani tangenti toccano il globo in un solo punto.

¹ Riferimenti bibliografici: John Campbell "Introduzione alla Cartografia" ed. Zanichelli; Inghilleri "Topografia Generale", ed. UTET.

Cilindri e coni avvolti attorno al globo sono tangenti lungo una linea: l'orientamento della superficie di proiezione e la sua tangenza al globo possono essere cambiati come si desidera; in questo modo cambierà ovviamente anche la posizione del punto o della linea di tangenza fra la superficie ed il globo; le proiezioni risultanti avranno reticolati di aspetto diverso pur mantenendo di solito le stesse caratteristiche generali.

Certe posizioni di tangenza sono "**normali**" per i diversi tipi di proiezione.

Nelle *proiezioni azimutali* la posizione normale del piano è tangente al polo, che quindi è il centro della proiezione.

Nelle *proiezioni coniche* la posizione normale del cono è quella con l'apice del cono stesso allineato con l'asse di rotazione terrestre: il risultato è che il polo è al centro della proiezione ed il cono è tangente lungo un parallelo.

Nelle *proiezioni cilindriche*, la posizione normale del cilindro è quella tangente all'Equatore, ossia con l'asse del cilindro parallelo all'asse di rotazione terrestre.

Il punto (o la linea) di tangenza della superficie di proiezione può essere spostato in modo che questa sia ad angolo retto rispetto alla normale: questo è quello a cui ci si riferisce, nelle proiezioni azimutali, quando si parla di proiezione equatoriale.

L'orientamento ortogonale nelle proiezioni cilindriche è chiamato **proiezione trasversa** (l'asse del cilindro è ortogonale all'asse di rotazione terrestre).

E' raro trovarlo applicato alle proiezioni coniche.

Quando la tangenza non è in posizione normale, o perpendicolare ad essa, la **proiezione** si definisce **obliqua**, ed è per lo più utilizzata in proiezioni azimutali e cilindriche.

Per rappresentare vaste zone della superficie terrestre si adottano le *rappresentazioni policentriche*, si suddivide cioè la zona da rappresentare in porzioni, per ognuna delle quali si sceglie un conveniente punto ed una conveniente superficie di proiezione.

Dove la superficie di proiezione tocca il globo preso come modello, fra i due si stabilisce un rapporto di scala di 1:1. A seconda della superficie di proiezione utilizzata il contatto avviene in un solo punto o lungo una linea che prende il nome di *linea standard* di proiezione.

Per ciascuna carta viene stabilita una scala nominale, che è la scala della linea di tangenza.

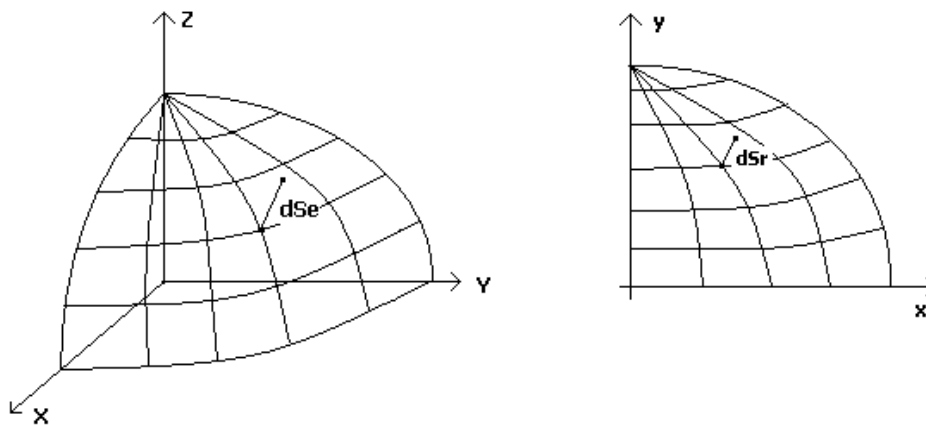
Moduli di deformazione

Per definire la deformazione in un punto della rappresentazione si possono prendere in considerazione due moduli: il *modulo di deformazione lineare* ed il *modulo di deformazione areale*; per quanto riguarda gli angoli si può considerare la deformazione di un determinato angolo in quanto questa, se è presente, dipenderà dall'ampiezza dell'angolo stesso.

Indicando con dS_e un archetto infinitesimo sull'ellissoide e con dS_r il corrispondente sulla rappresentazione, il rapporto:

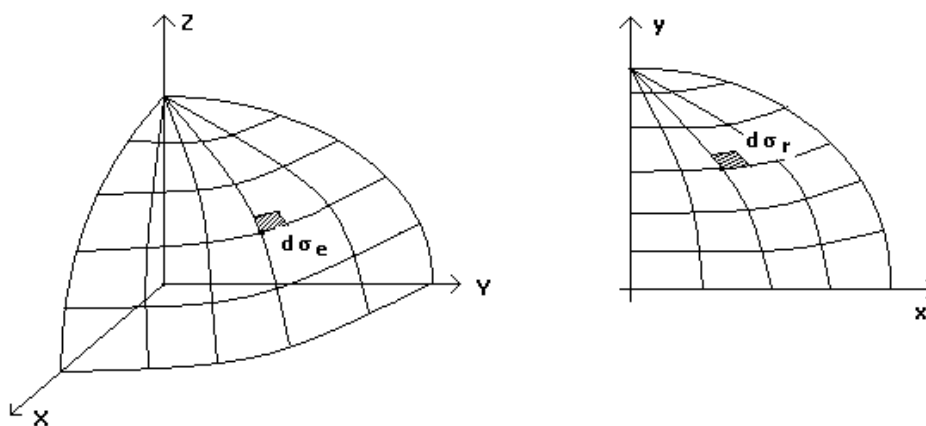
$$m = \frac{dS_r}{dS_e}$$

definisce il **modulo di deformazione lineare per elementi infinitesimi**; questo rapporto varia sempre da punto a punto della rappresentazione, perché nel caso contrario si avrebbe una rappresentazione senza deformazioni.



Analogamente indicando con $d\sigma_e$ l'area racchiusa da un quadrilatero infinitesimo sull'ellissoide e con $d\sigma_r$ quella racchiusa dal corrispondente quadrilatero sulla rappresentazione, si definisce **modulo di deformazione areale** il rapporto:

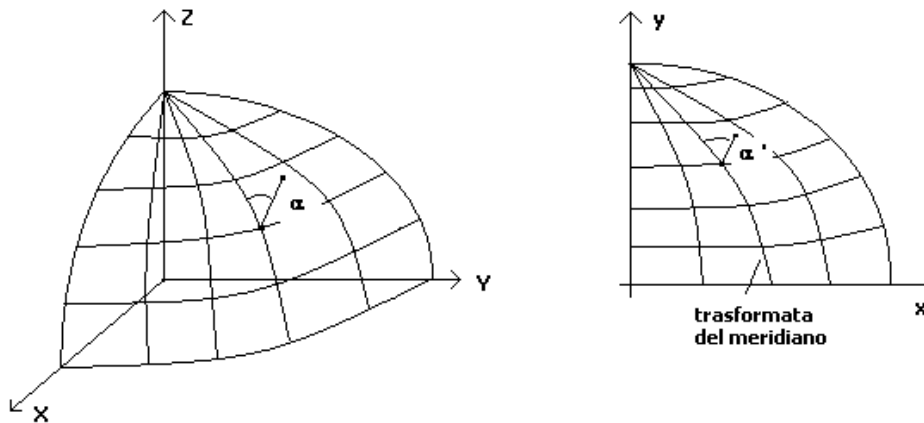
$$m_A = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e}$$



Si consideri infine un meridiano sull'ellissoide e la linea (trasformata del meridiano) che gli corrisponde nella rappresentazione; un elemento di linea sull'ellissoide forma un angolo α (azimut) con il meridiano, l'elemento corrispondente nella rappresentazione forma un angolo α' con la linea trasformata del meridiano; la **deformazione angolare** si può definire come la differenza

$$\delta = \alpha' - \alpha$$

fra le due direzioni; la deformazione di un angolo risulta poi dalla differenza delle deformazioni che competono alle due direzioni che lo formano.



PROIEZIONI CILINDRICHE

Quando il cilindro è tangente all'Equatore, lungo quest'ultimo il modulo di deformazione è pari ad 1; il reticolato è rettangolare, con meridiani e paralleli rappresentati da linee rette. Sul globo i meridiani convergono ai poli, nelle proiezioni cilindriche normalmente orientate, le linee non convergono e la spaziatura fra i meridiani si basa su una regolare ripartizione dell'Equatore. Ciò significa che una distanza costante sulla carta, misurata lungo i paralleli, rappresenta distanze reali sulla Terra sempre più piccole man mano che ci si allontana dall'Equatore. Il risultato è che la deformazione aumenta verso i Poli.

L'intervallo fra i paralleli varia per ogni proiezione, a seconda della posizione della sorgente luminosa o a seconda del modello arbitrario scelto per la proiezione.

Proiezione cilindrica centrale (prospettica)

In questa proiezione la sorgente luminosa sta al centro del globo; questo comporta un rapido aumento della spaziatura fra i paralleli verso i Poli che dà luogo a forti deformazioni man mano che ci si allontana dall'Equatore verso nord o verso sud.

Questo aumento nella scala Nord-Sud è accompagnato dall'aumento nella scala Est-Ovest, che è la caratteristica comune delle proiezioni cilindriche. La deformazione delle aree verso i Poli che ne deriva è fortissima.

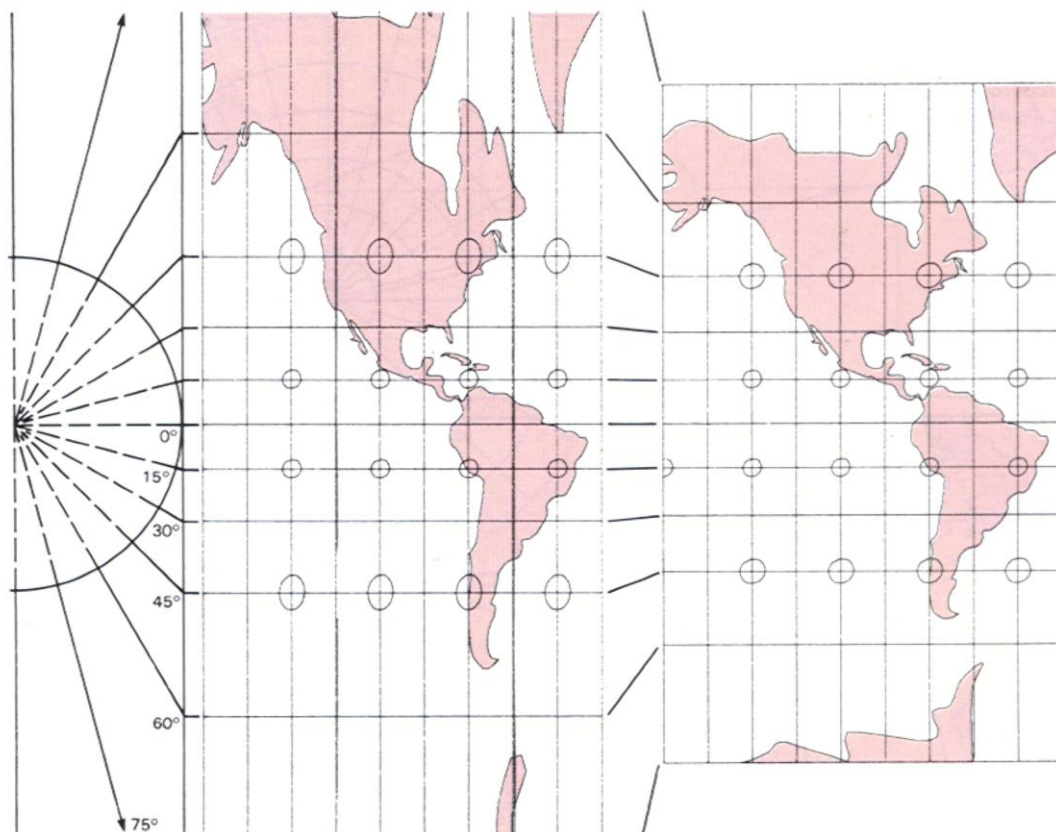


Fig. 6 Confronto fra la proiezione cilindrica centrale e la proiezione di Mercatore

Proiezione di Mercatore

Questa proiezione non si ottiene geometricamente ma può essere confrontata con la proiezione geometrica cilindrica centrale.

In questa proiezione la spaziatura fra paralleli non aumenta così rapidamente come nella proiezione cilindrica centrale ed anche la scala Nord-Sud non varia così rapidamente.

La proiezione di Mercatore è costruita in modo che la scala Nord-Sud aumenti come la scala Est-Ovest: il modulo di deformazione sulla proiezione di Mercatore è uguale in tutte le direzioni in ogni punto della carta (ma esso vale 1 soltanto lungo l'Equatore): la rappresentazione è **conforme**.

Nella Proiezione di Mercatore inoltre meridiani e paralleli si intersecano tutti ad angolo retto. La rappresentazione è isogona.

Nella rappresentazione di Mercatore una linea retta che interseca tutti i meridiani con angolo costante rappresenta una linea di direzione costante: *linea lossodromica*. Tale linea non rappresenta però la distanza più breve fra due punti (*linea ortodromica*). Per poter utilizzare la rappresentazione per scopi di navigazione si disegna la rotta unendo il punto di partenza ed il punto di arrivo con una linea retta su una rappresentazione gnomonica. In questa rappresentazione, infatti, le linee ortodromiche sono rette. Si riportano poi i punti di intersezione di tale retta con le trasformate dei meridiani sulla rappresentazione di Mercatore. Unendo a due a due con una spezzata tali punti si ottiene la rotta da seguire.



Fig. 7 Confronto fra un arco di cerchio massimo (ortodromica) e un arco di direzione costante (lossodromia) come vengono tracciati sulle proiezioni di Mercatore e Gnomonica

Proiezione Trasversa di Mercatore

La Proiezione Trasversa di Mercatore è una Mercatore in cui il cilindro di proiezione è tangente lungo un meridiano (*meridiano centrale*), invece che tangente all'Equatore. Lungo questa linea il modulo di deformazione lineare è unitario. Gli altri meridiani intersecano l'Equatore a intervalli crescenti, così come accadeva ai paralleli della Mercatore Standard. Le trasformate di meridiani e paralleli sono linee curve (tranne l'Equatore ed il meridiano centrale che si trasformano in linee rette).

Anche la Proiezione Traversa di Mercatore è conforme ma non può essere usata per la navigazione perché le linee di rotta costante (lossodromiche) sono curve. Una delle sue più importanti applicazioni consiste nel fatto che questa proiezione costituisce la base per la costruzione del reticolato U.T.M. (Universal Transverse Mercator). Questa applicazione fa uso solo di una ristretta fascia della proiezione attorno al meridiano centrale, all'interno della quale l'entità della deformazione è piuttosto piccola.



Fig. 8 Proiezione Cilindrica Trasversa di Mercatore

RAPPRESENTAZIONE DI GAUSS

Si assume come asse x della rappresentazione la trasformata di un meridiano, detto **meridiano centrale**, positivo verso le latitudini crescenti; l'asse y, ortogonale all'asse x, trasformata dell'Equatore, è positivo verso le longitudini crescenti.

La rappresentazione è conforme, ovvero il modulo di deformazione lineare per elementi infinitesimi pur variando da punto a punto della rappresentazione, non varia al variare della direzione uscente dal punto.

La rappresentazione avviene attorno ad un **fuso** stretto centrato sul meridiano centrale (sul quale si devono conservare le distanze) in modo che le equazioni della carta possano svilupparsi in serie della longitudine.

Deve essere mantenuta la simmetria attorno alla trasformata del meridiano centrale (passando dalla λ alla $-\lambda$ la x rimane invariata – funzione pari-, mentre la y cambia di segno – funzione dispari).

Queste condizioni consentono di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie, arrivando alla formulazione delle *Equazioni della carta* o *Equazioni di Gauss-Boaga* che, estese fino ai termini di 6° grado in λ , consentono di calcolare le coordinate Gaussianhe dei punti di cui siano note le geografiche, con una precisione dell'ordine del centimetro, per un fuso di estensione in longitudine pari a 6° ($|\lambda| \leq 3^\circ$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \int_0^\varphi \rho d\varphi + \frac{N}{2} \sin \varphi \cos \varphi \lambda^2 + \frac{N \sin \varphi \cos^3 \varphi}{24} (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \lambda^4 + \\ \quad + \frac{N \sin \varphi \cos^5 \varphi}{720} (61 - 58 t^2 + t^4 + 270 \eta^2 - 330 \eta^2 t^2) \lambda^6 \\ y = \lambda N \cos \varphi + \frac{N}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^3 + \frac{N \cos^5 \varphi}{120} (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 t^2) \lambda^5 \end{array} \right.$$

$$t = \operatorname{tg} \varphi \quad \eta = \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \cos \varphi$$

Con λ e φ espressi in radianti.

Nota bene: la λ che compare in queste formule è la differenza di longitudine rispetto alla longitudine del meridiano centrale ($\lambda = \lambda_{\text{del punto}} - \lambda_{\text{merid. centrale}}$)

Va infine tenuto conto delle False Origini (per l'emisfero Boreale):

per la rappresentazione **UTM** (*): $N = x^*$ (km) $E = (y^*+500)$ (km)

per la **Gauss-Boaga** (**):

Fuso Ovest: $N = x^*$ (km) $E = (y^*+1500)$ (km)

Fuso Est: $N = x^*$ (km) $E = (y^*+2520)$ (km)

(*) a partire da coordinate ellissoidiche su ED50
(ellissoide internazionale orientamento medio europeo)

(**) a partire da coordinate ellissoidiche su IGM40
(ellissoide internazionale orientato a Roma Monte Mario)

con x^* ed y^* coordinate Gaussianne ottenute dalle formule sopravviste e moltiplicate per il **fattore di contrazione $K=0,9996$** .

Per punti appartenenti all'emisfero Australe viene imposta una Falsa Origine N_0 per la coordinata Nord, pari a 10.000 km.

Le *immagini* dei *paralleli* e dei *meridiani* sono famiglie di curve fra loro perpendicolari (la rappresentazione è conforme) simmetriche rispetto agli assi E, N. Le prime rivolgono la convessità all'asse E (trasformata dell'Equatore), le seconde la concavità all'asse N (trasformata del meridiano centrale).

Il modulo di deformazione lineare m , che è uguale ad 1 soltanto sull'asse N, è sempre maggiore di 1 altrove, e cresce rapidamente all'allontanarsi dall'asse N; nella rappresentazione tutte le distanze sono quindi dilatate.

Affinché le deformazioni siano contenute all'interno di un'assegnata tolleranza, la porzione di ellissoide da rappresentare deve essere limitata ad un fuso di piccola ampiezza, a cavallo del meridiano centrale.

Se l'ampiezza di tale fuso non supera i 6° , una geodetica qualsiasi, tutta contenuta nel fuso, ha per immagine sulla carta, una linea (trasformata) avente la concavità sempre rivolta verso l'asse N, di curvatura così piccola che la sua lunghezza è praticamente uguale a quella della sua corda.

Inoltre la dilatazione delle distanze, alle nostre latitudini, non supera il $+ 8/10.000$ (allungamento di 8 m su una distanza di 10 km); con l'introduzione del fattore di contrazione, le conseguenze di tale deformazione, all'interno di ogni elemento della carta, vengono contenute nel $\pm 4/10.000$ e quindi assorbite dall'*errore di graficismo*.

La rappresentazione grafica alla scala 1:25.000 è suddivisa in fogli (**tavolette**) aventi le dimensioni medie di 40 cm $\times$ 40 cm, corrispondenti alle dimensioni reali di 10 km $\times$ 10 km. Nella cartografia italiana i fogli al 25.000 vengono tagliati secondo le trasformate di meridiani e paralleli, con una differenza di latitudine di 5' e di longitudine di 7'30", corrispondente mediamente alle dimensioni di 40 cm $\times$ 40 cm.

Le rette $x = \text{cost.}$ e $y = \text{cost.}$ Sono riportate sui fogli con un intervallo di 1 km e costituiscono il **reticolato chilometrico**.

Esse risultano inclinate rispetto ai bordi del foglio dell'angolo γ (*convergenza del meridiano*). Il valo di γ al centro del foglio è riportato sul bordo della carta.

Il **foglio in scala 1: 100.000** è contraddistinto da un numero ed ha le dimensioni medie di 40 cm $\times$ 40 cm, per cui comprende 4 quadranti alla scala 1: 50.000, contrassegnati con i numeri romani I, II, III, IV, aventi le stesse dimensioni. Ogni quadrante è ulteriormente suddiviso in quattro tavolette alla scala 1: 25.000, contrassegnate con le sigle NO, NE, SO, SE.

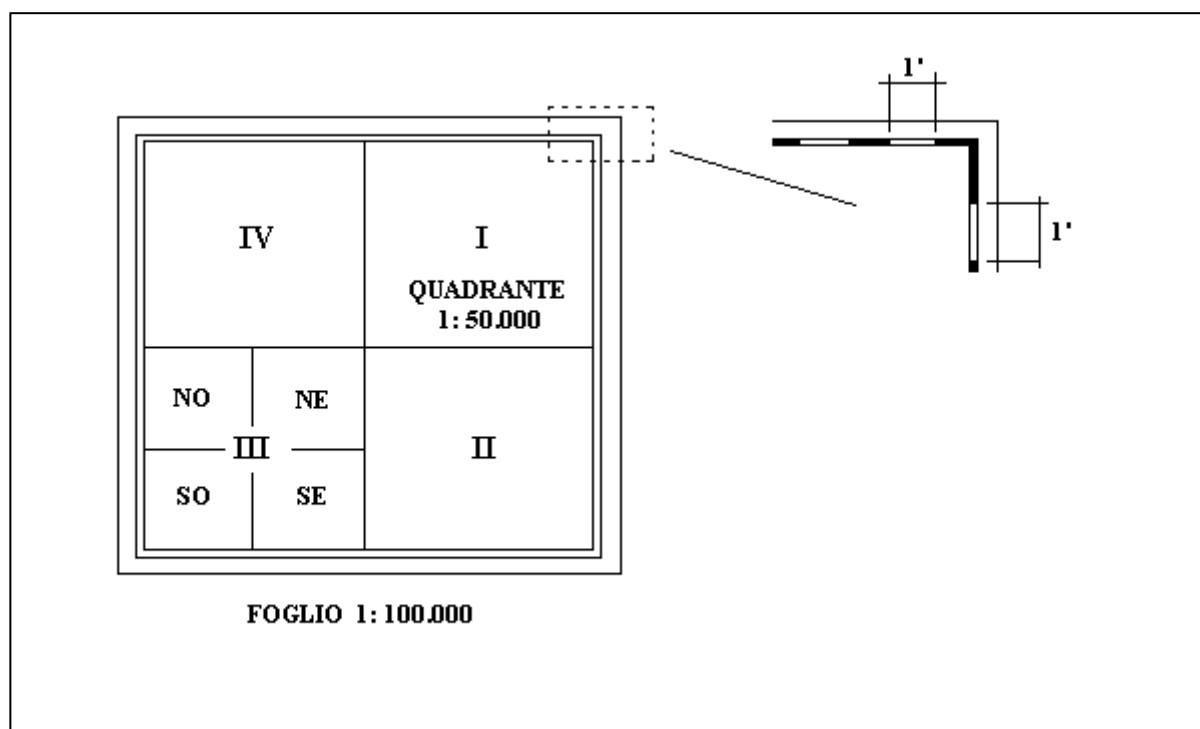


Fig. 9 Suddivisione del foglio alla scala 1: 100.000 della carta d'Italia

La *nuova carta 1:50.000*, inquadrata rispetto al sistema di riferimento europeo unificato (ED50) è suddivisa in fogli che si estendono per 12' in latitudine e 20' in longitudine.

Nella terminologia universale la rappresentazione di Gauss è chiamata U.T.M.

Essa è estesa a buona parte del globo terrestre con esclusione delle calotte polari al disopra della latitudine $\pm 80^\circ$, per le quali viene adottata la Proiezione Stereografia Polare, indicata come sistema U.P.S. (Universal Polar Stereographic).

La superficie dell'ellissoide terrestre è suddivisa in 60 fusi di 6° di longitudine ciascuno, numerati progressivamente a partire dall'antimeridiano di Greenwich e procedendo verso Est.

All'interno di ciascun fuso di 6° le coordinate vengono contate a partire dall'Equatore e dal meridiano centrale del fuso, cui viene attribuita una ascissa convenzionale (**falsa origine**) di 500 km allo scopo di evitare valori negativi delle ascisse dei punti a Ovest del meridiano centrale.

Il calcolo delle coordinate piane viene effettuato con le formule di Gauss ed ai valori così ottenuti viene applicata una riduzione di 4/10.000.

Nel sistema U.T.M. si usa indicare con N l'asse delle ordinate e con E quello delle ascisse, iniziali dei punti cardinali verso cui sono orientati rispettivamente i loro versi positivi; si avrà quindi:

$$N = x \text{ km}$$

$$E = (y + 500) \text{ km}$$

Essendo x e y i valori ottenuti dalle formule di Gauss e ridotti del fattore di contrazione.

Il territorio italiano risulta interamente compreso, salvo una piccola parte della penisola salentina, nei fusi 32 e 33: il primo è compreso fra 6° e 12° Est Greenwich, il secondo fra 12° e 18° Est Greenwich; i due meridiani centrali, le cui trasformate piane costituiscono l'asse delle ordinate dell'uno e dell'altro fuso, sono rispettivamente quelli 9° e 15° Est Greenwich.

Per individuare i punti in modo univoco si è ritenuto opportuno suddividere ulteriormente l'ellissoide con 20 fasce parallele dell'ampiezza di 8° in latitudine, a partire dal parallelo 80° Sud fino a quello 80° Nord: tali fasce vengono contraddistinte da lettere maiuscole convenzionali.

La parte comune ad un fuso e ad una fascia viene chiamata *zona*, ha un'ampiezza di 6° in longitudine e 8° in latitudine ed è univocamente individuata dal numero del fuso e dalla lettera della fascia.

L'Italia è interamente coperta dalle fasce, contraddistinte dalle lettere S e T, la prima si estende in latitudine da 32° a 40° , la seconda da 40° a 48° .

Il territorio italiano comprende quindi le zone 32 S, 32 T, 33 S, 33 T e, per la citata porzione della penisola salentina, le 34 S e 34 T.

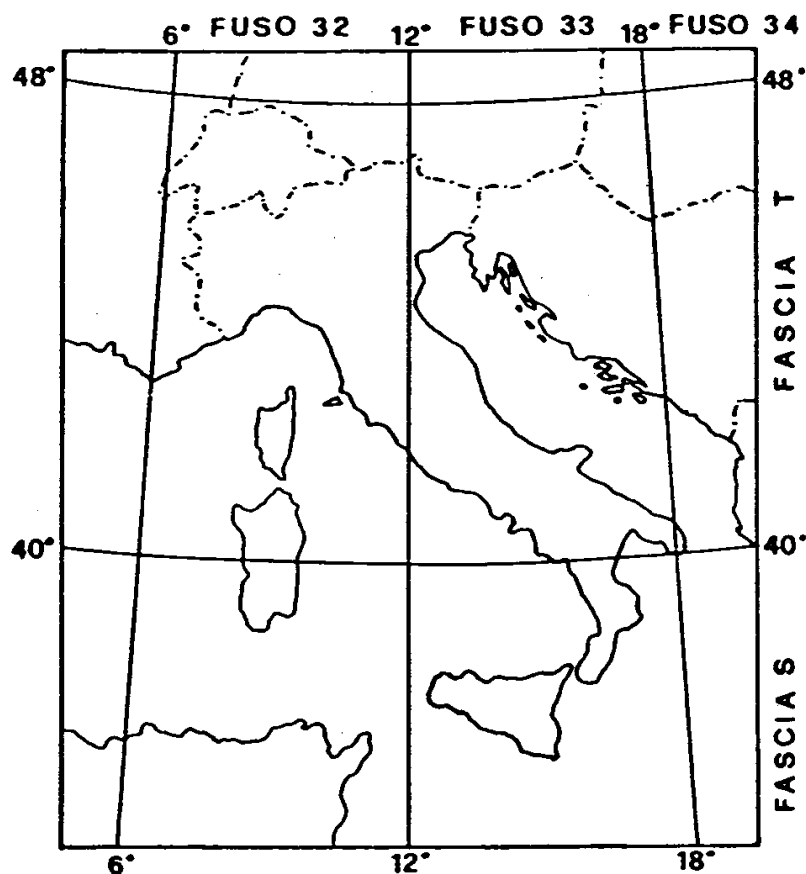


Fig. 10 Le zone del Sistema U.T.M. interessanti l'Italia

La rappresentazione piane di ogni zona è stata infine ulteriormente suddivisa in quadrati di 100 km di lato mediante rette parallele agli assi del sistema di riferimento del fuso: ogni quadrato è individuato da una coppia di lettere maiuscole di cui la prima indica la colonna, la seconda la riga.

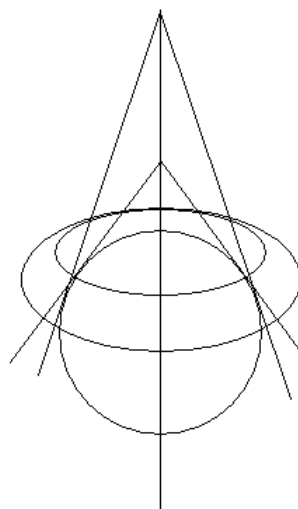
Sulla base di tale suddivisione la designazione completa di un punto qualsiasi viene così effettuata a mezzo di un'unica sigla costituita dal numero del fuso, dalla lettera della fascia, dalla coppia di lettere che individuano il quadrato di 100 km di lato ed infine dalle coordinate E e N del punto stesso.

PROIEZIONI CONICHE

Il cono è la superficie standard di proiezione di questo gruppo di proiezioni. Nel caso polare tutte le coniche hanno linee rette regolarmente intervallate, partenti dal polo, che rappresentano i meridiani. Le principali differenze fra queste proiezioni derivano dalla scelta del parallelo (o paralleli) standard e dalla diversa spaziatura fra i paralleli che sono sempre cerchi concentrici intorno al polo. E' raro trovare proiezioni coniche trasverse o oblique, si farà riferimento quindi solo alle coniche polari.

Le proiezioni coniche polari con singoli paralleli standard hanno meridiani retti radianti dal polo il cui angolo varia in relazione al parallelo standard. Per ogni data apertura di meridiani, che può arrivare a 360° , tutte queste coniche con lo stesso parallelo standard hanno lo stesso angolo fra i meridiani. Questo parametro è noto come **costante del cono**.

La costante del cono viene definita formalmente come il seno della latitudine alla quale il cono è tangente. Quando il parallelo standard è vicino al Polo, l'angolo fra i meridiani sulla proiezione che ne risulta è relativamente ampio, quando è vicino all'Equatore è relativamente acuto.



Rappresentazioni coniche

Proiezione conica centrale (prospettica)

Il cono della proiezione conica centrale è tangente lungo un parallelo standard, con la sorgente luminosa al centro del globo. Il raggio del parallelo standard è, in proiezione, la sua distanza dal vertice del cono. Gli altri paralleli sono cerchi concentrici, intervallati in accordo con le intersezioni proiettate sul cono; questa spaziatura aumenta rapidamente, in ogni direzione, allontanandosi dal parallelo standard.

Il parallelo standard è diviso regolarmente; la scala è corretta solo lungo questo parallelo e aumenta allontanandosene. I meridiani sono linee rette irradianti dal polo, con una spaziatura determinata dalla divisione del parallelo standard.

Questa proiezione, data l'assenza di caratteristiche particolarmente utili, è raramente utilizzata.

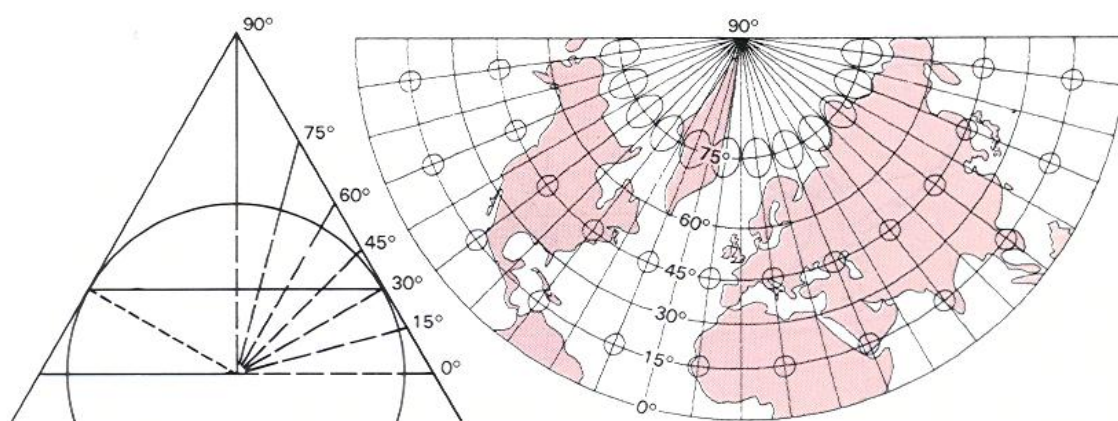


Fig. 11 Proiezione conica centrale (prospettica) avente come parallelo standard il 30° parallelo

Proiezione conica ordinaria o di Tolomeo

Questa proiezione risulta *afilattica*. Per ottenerla si dispone il cono tangente ad un parallelo di latitudine φ_0 e si proiettano i meridiani dal centro della sfera, che si trasformano così nelle generatrici del cono; i paralleli invece non si ottengono per proiezione, ma vengono riportati lungo le sezioni del cono normali all'asse, e ad una distanza reciproca uguale all'arco di meridiano compreso fra essi; la proiezione si dice *modificata*.

Vi è un solo parallelo standard, il cui raggio è definito dalla sua distanza dal vertice del cono, come nella conica centrale. I meridiani sono regolarmente spaziati lungo il parallelo standard e i paralleli sono cerchi concentrici, regolarmente spaziati lungo i meridiani.

La scala è esagerata ovunque tranne sul parallelo standard e lungo i meridiani.

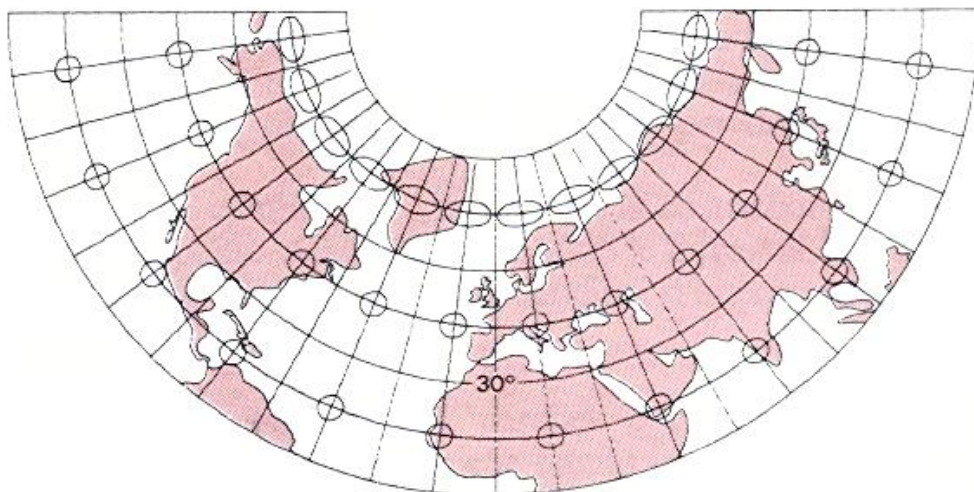


Fig. 12 Proiezione conica semplice, avente come parallelo standard il 30° parallelo

Proiezioni Coniche con due paralleli standard

Invece di essere tangente alla superficie del globo, il cono di proiezione può tagliarla trasversalmente: in questo caso il cono viene chiamato cono secante.

In questo caso si ha una proiezione con due paralleli standard invece di uno. Questa proiezione ha il vantaggio di presentare deformazioni più contenute ed ha due zone a scala corretta invece di una, lungo i due paralleli standard.

Si scelgono i due paralleli, spazati in modo tale che la loro distanza sia corrispondente ai due terzi circa dell'estensione Nord-Sud della carta. In questo modo gli errori di scala vengono distribuiti su tutta l'area della carta.

Gli altri paralleli sono cerchi concentrici disegnati attorno al centro del parallelo standard.

La spaziatura fra i paralleli si basa sulla vera distanza sulla superficie del globo, non sulla distanza lungo il cono secante. Infine, i paralleli standard vengono regolarmente divisi e si disegnano i meridiani congiungendo i punti di divisione.

La scala Est-Ovest della conica semplice con due paralleli standard è troppo ridotta nell'area interna a questi paralleli ed esagerata all'esterno di essi.

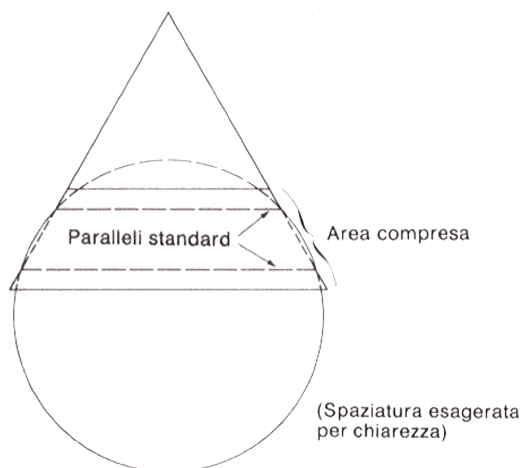


Fig. 13 Proiezione conica con due paralleli standard

Proiezione Conforme di Lambert

In questa proiezione i paralleli sono archi di cerchio concentrici. I meridiani sono linee rette convergenti verso un punto, che è il centro dal quale i paralleli vengono disegnati. La spaziatura fra i paralleli lungo ogni meridiano viene calcolata in modo tale che la rappresentazione risulti *conforme*.

Il modulo di deformazione lineare per elementi infinitesimi non varia al variare della direzione uscente dal punto. Inoltre paralleli e meridiani si intersecano ad angolo retto, essendo la rappresentazione *isogona*.

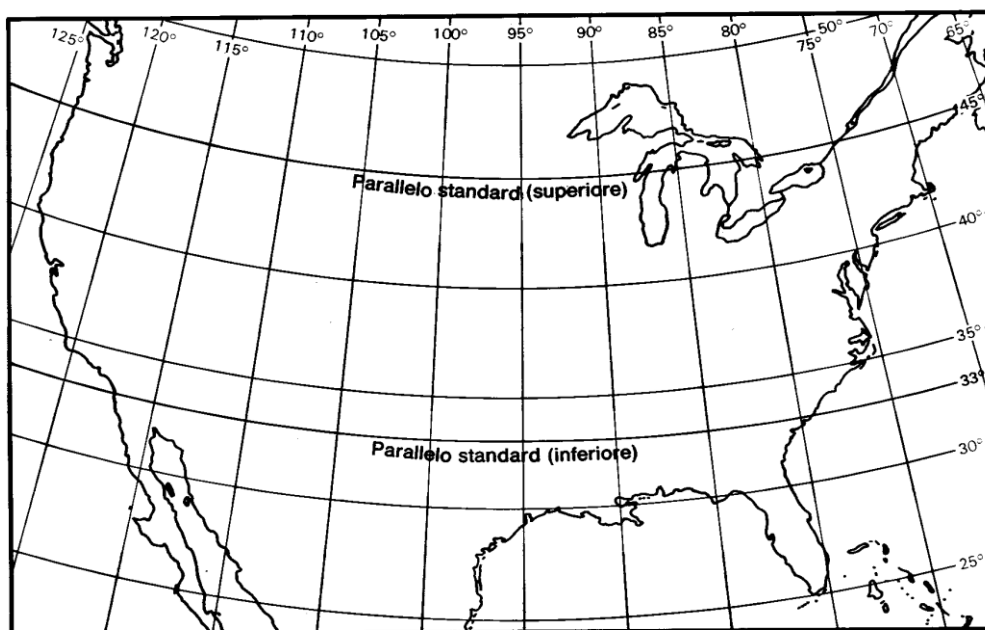


Fig. 14 Proiezione conica conforme di Lambert

Proiezione Stereografica Polare

La posizione della sorgente luminosa per la proiezione stereografica è il punto esattamente opposto a quello di tangenza, cioè agli antipodi del centro della proiezione.

I meridiani sono linee rette uscenti dal Polo. I paralleli sono cerchi concentrici con centro nell'origine degli assi. I raggi di queste circonferenze sono maggiori dei raggi dei corrispondenti paralleli ed in particolare all'Equatore corrisponde una circonferenza di raggio $2R$.

La spaziatura fra i paralleli è ottenuta per proiezione. La rappresentazione è conforme. Meridiani e paralleli si intersecano ad angolo retto.

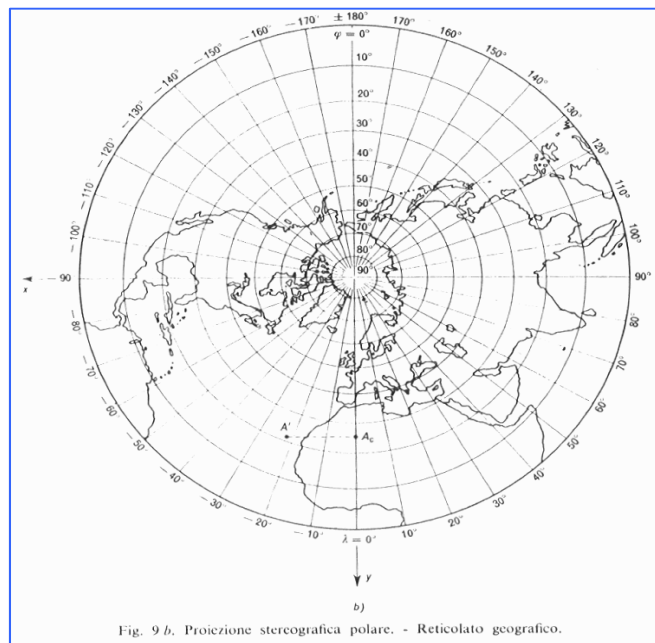
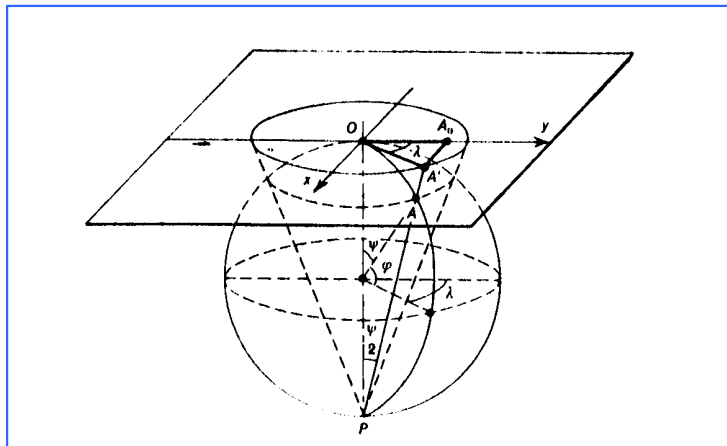
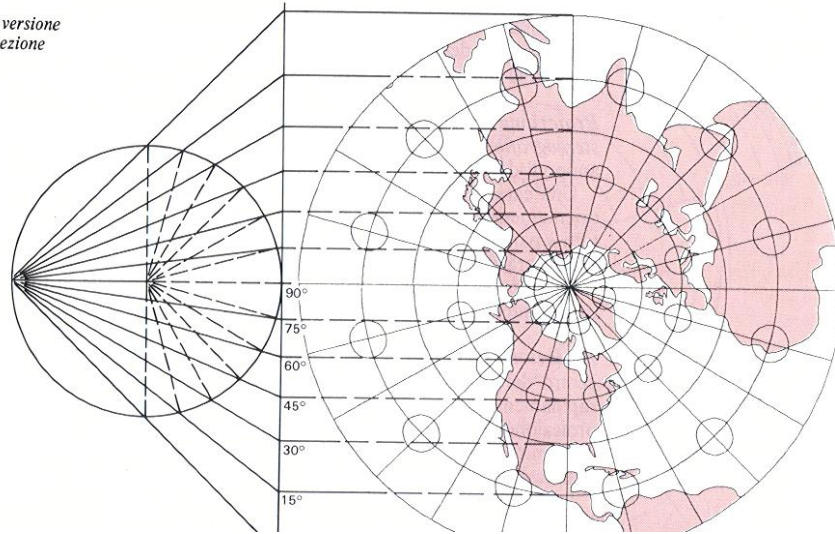


Fig. 15 Proiezione Stereografica Polare

Figura 2.27 - La versione polare della proiezione stereografica.



PROIEZIONE GNOMONICA

In questa proiezione la sorgente luminosa è al centro del globo: questo fa sì che la distanza fra i paralleli aumenti rapidamente a partire dal centro e che non sia possibile rappresentare su questa proiezione un intero emisfero. L'incremento esagerato dei valori di scala lontano dal centro rende inutile la proiezione se non per piccole parti dell'emisfero. La caratteristica più importante di questa proiezione è che tutte le linee rette che vi sono disegnate rappresentano cerchi massimi sul globo. Un cerchio massimo è dato dall'intersezione di un piano passante per il centro della terra con la superficie terrestre. Il fatto che i cerchi massimi appaiano come rette sulla proiezione, rende quest'ultima molto utile nella navigazione. Congiungendo infatti due punti con una linea retta sulla rappresentazione, tale linea rappresenterà la rotta fra i due punti. L'arco di cerchio massimo tracciato sulla proiezione gnomonica viene poi trasferito sulla proiezione di Mercatore per la navigazione.

RAPPRESENTAZIONE DI CASSINI - SOLDNER

La rappresentazione di Cassini-Soldner è usata dal Catasto Italiano per disegnare le mappe catastali e per eseguire con notevoli semplificazioni i calcoli relativi alle reti di inquadramento.

Preso un punto di riferimento O di coordinate ellissoidiche φ_0, λ_0 , le coordinate cartografiche x, y di un punto P di coordinate φ, λ si fanno coincidere con le coordinate geodetiche rettangolari X, Y di P rispetto ad O; le equazioni della rappresentazione sono dunque:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \end{cases}$$

La rappresentazione è *afilattica* ma le deformazioni sono dello stesso ordine di quelle della rappresentazione di Gauss.

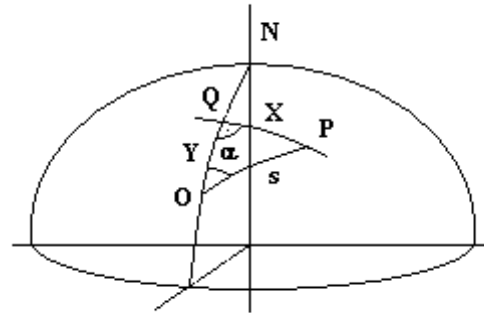
Si considera il meridiano per O e la geodetica per P ortogonale al meridiano per O

$$m = 1 + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{2\rho_0 N_0}$$

α : azimut

ρ_0 : raggio del meridiano

N_0 : grannormale



Nella direzione normale al meridiano passante per l'origine O si ha il valore minimo pari a $m = 1$, nella direzione parallela il valore massimo, pari a $m = \frac{x^2}{2\rho_0 N_0}$.

Il *modulo di deformazione areale* in un punto di ascissa x vale:

$$m_A = 1 + \frac{x^2}{2\rho_0 N_0}$$

Poiché i valori di x nelle applicazioni del Catasto non superano qualche decina di km, m_A risulta sufficientemente prossimo ad 1 per poter considerare la rappresentazione di Cassini-Soldner come praticamente *equivalente*.

La carte del Catasto sono a scala elevata (1: 1000, 1: 2000, 1: 4000) ed inoltre la zona rappresentata nell'intorno dell'origine O viene limitata in modo tale che i calcoli delle coordinate dei punti di inquadramento del rilievo possano essere eseguiti sul piano della rappresentazione; ciò significa che le differenze fra le distanze e gli angoli misurati sull'ellissoide devono essere inferiori alle tolleranze di misura.

In base alle tolleranze ammesse per le misure nei rilievi catastali la zona rappresentata può essere estesa fino a comprendere punti distanti circa 70 km dal punto origine. La deformazione angolare massima raggiunge così il valore di circa 6" e le deformazioni lineari massime raggiungono il valore di 6 cm su un kilometro.

Il territorio nazionale risulta suddiviso in 35 zone per ognuna delle quali è definita un'origine.

LA CARTA TECNICA REGIONALE DEL FRIULI VENEZIA GIULIA CTR

Per la costruzione della **Carta Tecnica Regionale** è stata impiegata la Rappresentazione di Gauss, sistema nazionale (Gauss-Boaga). Nella stessa proiezione sono espresse le coordinate dei vertici trigonometrici nazionali e regionali, e quelle del reticolato chilometrico riportato sulla carta.

Il territorio della Regione FVG è tutto compreso nel fuso Est e resta ad Ovest del meridiano centrale di esso; onde la convergenza dei meridiani dovrà sempre essere sottratta dall'azimut rete per ottenere l'azimut geografico.

La deformazione lineare massima si verifica al bordo Est del territorio regionale, e raggiunge l'entità dello 0,9997: il che significa che una distanza reale di 10 km viene accorciata sulla carta di 3 m al più.

Sulla carta sono riportate di 10 cm in 10 cm le linee del reticolato chilometrico, le quali ripartiscono così la superficie cartografata in quadrati con lato 500 m.

Le coordinate cartografiche (E, N) di un punto si ottengono misurando in mm le distanze dalle linee del reticolato che passano rispettivamente ad Ovest e a Sud del punto, esprimendole in km in scala, ed aggiungendole ai valori numerici che contraddistinguono in km le linee stesse.

Il formato dei fogli è quello unificato UNI A1 ($59.4 \times 84.1 \text{ cm} = 5 \text{ m}^2$).

La squadratura degli elementi è geografica, e cioè i bordi del campo topografico sono costituiti da meridiani e paralleli. Le dimensioni del campo cartografico sono di $2' 30'' \times 1' 30''$; esse corrispondono a circa $3200 \times 2800 \text{ m} = 65 \times 56 \text{ cm}$, con un'area di circa 900 ettari alla latitudine media della Regione.

La squadratura è sottomultipla di quella della carta al 50.000 dell'IGM, la quale a sua volta è sottomultipla della Carta al Milionesimo Internazionale (IMW). Per tale ragione le coordinate geografiche della Carta Tecnica Regionale sono riferite all'Ellissoide Internazionale con orientamento medio europeo, sistema E.D. 1950, e le longitudini sono contate dal meridiano di Greenwich.

L'altimetria della Carta Tecnica Regionale deriva dalla rete di livellazione di alta precisione dell'IGM, sia pure attraverso altre livellazioni geometriche e trigonometriche interposte, ed ovviamente attraverso la restituzione fotogrammetrica. Tutta l'altimetria è pertanto riferita al livello medio marino del mareografo di Genova.

Le quote numeriche che compaiono sulla carta arrotondate al dm, sono generalmente riferite al suolo, in corrispondenza del particolare topografico più evidente che sta alla loro sinistra, o del puntino appositamente riportato. Esse sono di tre tipi:

- a) *quote sottolineate*, scritte in corrispondenza dei capisaldi di livellazione geometrica. La loro attendibilità è caratterizzata da un errore non superiore a 0.1 m, tenuto conto delle condizioni del suolo nei pressi del caposaldo;

- b) *quote diritte*, scritte in corrispondenza dei vertici trigonometrici o comunque di punti quotati a terra. La loro attendibilità è caratterizzata da un errore che nel 90% dei casi non supera 0.5 m;
- c) *quote inclinate*, scritte in corsivo inclinato. Sono ricavate dalla restituzione; la loro attendibilità è caratterizzata da un errore che nel 90% dei casi non supera 1.0 m. Le quote inclinate scritte in corrispondenza dei PRF, contraddistinti dall'apposito segno convenzionale, hanno tuttavia un'attendibilità alquanto migliore della suddetta (di circa il 20%).

La densità delle quote numeriche è all'incirca 10 per dm² della carta (20 per dm² se la pendenza media è inferiore all'1%).

L'equidistanza delle curve di livello *direttrici* (disegnate con linea marcata continua) è di 25 m; quella delle curve *ordinarie* (disegnate con linea sottile continua) di 5 m.

I particolari morfologici (cocuzzoli, selle, brusche variazioni di pendenza) non sufficientemente evidenziati dalle curve ordinarie, sono rappresentati con curve *ausiliarie* (disegnate con linea molto sottile a trattini) equidistanti 1 m.

Nelle zone pianeggianti (pendenza media inferiore al 5%) le curve ausiliarie sono tracciate sull'intero territorio. Se la pendenza media è inferiore all'1% non vengono riportate curve di livello.

L'attendibilità planimetrica delle curve di livello è caratterizzata da un errore che nel 90 % dei casi non supera 1/3 della distanza alla curva più vicina. L'attendibilità di una quota interpolata fra due curve di livello è caratterizzata da un errore che nel 90 % dei casi non supera 2.0 m.

LA CARTA TECNICA REGIONALE NUMERICA del FRIULI VENEZIA GIULIA (C.T.R.N.)

- La CTRN del Friuli Venezia Giulia è un aggiornamento della CTR ed è stata costruita mediante restituzione analitica di fotogrammi aerei rilevati negli anni 2000
- Scala di rappresentazione 1: 5000
- Scala media dei fotogrammi 1: 8000 (quindi la precisione metrica della CTRN è equivalente a quella di una carta in scala 1:2000)
- Contenuto grafico tridimensionale suddiviso in nove classi principali:
- OROGRAFIA
- IDROGRAFIA
- VEGETAZIONE
- EDIFICI E COSTRUZIONI
- VIABILITA'
- RETI ENERGETICHE
- ELEMENTI DIVISORI DEL TERRENO
- LIMITI AMMINISTRATIVI
- PUNTI NOTI
- Rete planimetrica di inquadramento (vertici IGM I-II-III ordine):
sqm coord. E, N $\leq \pm 0.15$ m
- Rete planimetrica di raffittimento (istituita per appoggio planimetrico alla triangolazione aerea analitica):
sqm coord. E, N $\leq \pm 0.15$ m
- Compensazione minimi vincoli
- Rototraslazione applicata ai minimi quadrati
- $\Delta E, \Delta N$ punti comuni $\leq |0.20|$ m.
- Rete altimetrica d'inquadramento e raffittimento (punti livellazione geometrica alta precisione IGM):
sqm quota compensata $\leq \pm 0.10$ m.

PUNTI DI INQUADRAMENTO E PUNTI DI DETTAGLIO

Il rilievo topografico consiste nella determinazione della posizione *plano-altimetrica* di un numero sempre molto elevato di punti.

Nell'organizzare un rilievo i punti vanno distinti in due categorie:

- punti di **inquadramento** (o punti trigonometrici)
- punti di **dettaglio**.

I *punti trigonometrici* costituiscono una piccola percentuale della totalità dei punti rilevati e rappresentano la struttura portante del rilievo; vengono materializzati con segnali che permangono nel tempo, vengono rilevati con metodi raffinati di misura e di calcolo, e se ne calcolano le coordinate con una precisione congruente a quella delle misure, e quindi in genere eccedente la precisione richiesta dalla rappresentazione grafica.

I *punti di dettaglio* servono a definire le particolarità del terreno o dei manufatti, e sono quindi in numero nettamente superiore ai trigonometrici; si rilevano con operazioni di misura e di calcolo meno raffinate, comunque di precisione sufficiente, ma più rapide; la posizione dei punti di dettaglio viene determinata con riferimento a due punti trigonometrici e spesso non se ne determinano le coordinate, in quanto è più agevole riportarli graficamente sulla base delle misure fatte.

Il rilievo planimetrico dei punti trigonometrici viene eseguito mediante misure di azimut o angoli di direzione, di angoli azimutali e di distanze.

La precisione dei punti rilevati dipende dal complesso delle misure eseguite.

Agli effetti della precisione con la quale la posizione di un punto viene determinata, ha spesso molta importanza, a parità di precisione delle misure, la forma della figura che ha per vertici il punto in questione e quelli ai quali il punto viene collegato.

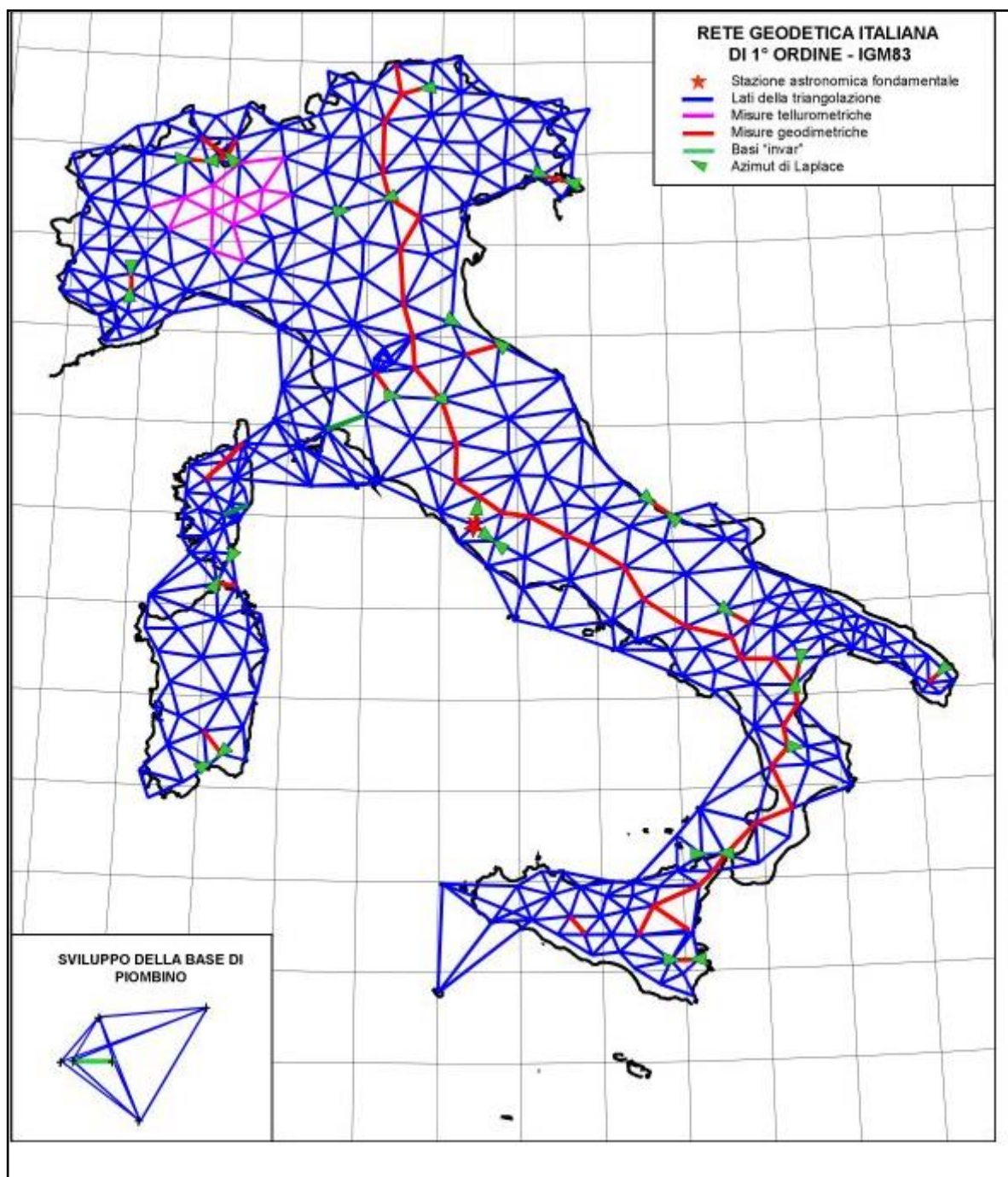


Fig. 16 Rete geodetica italiana del I ordine

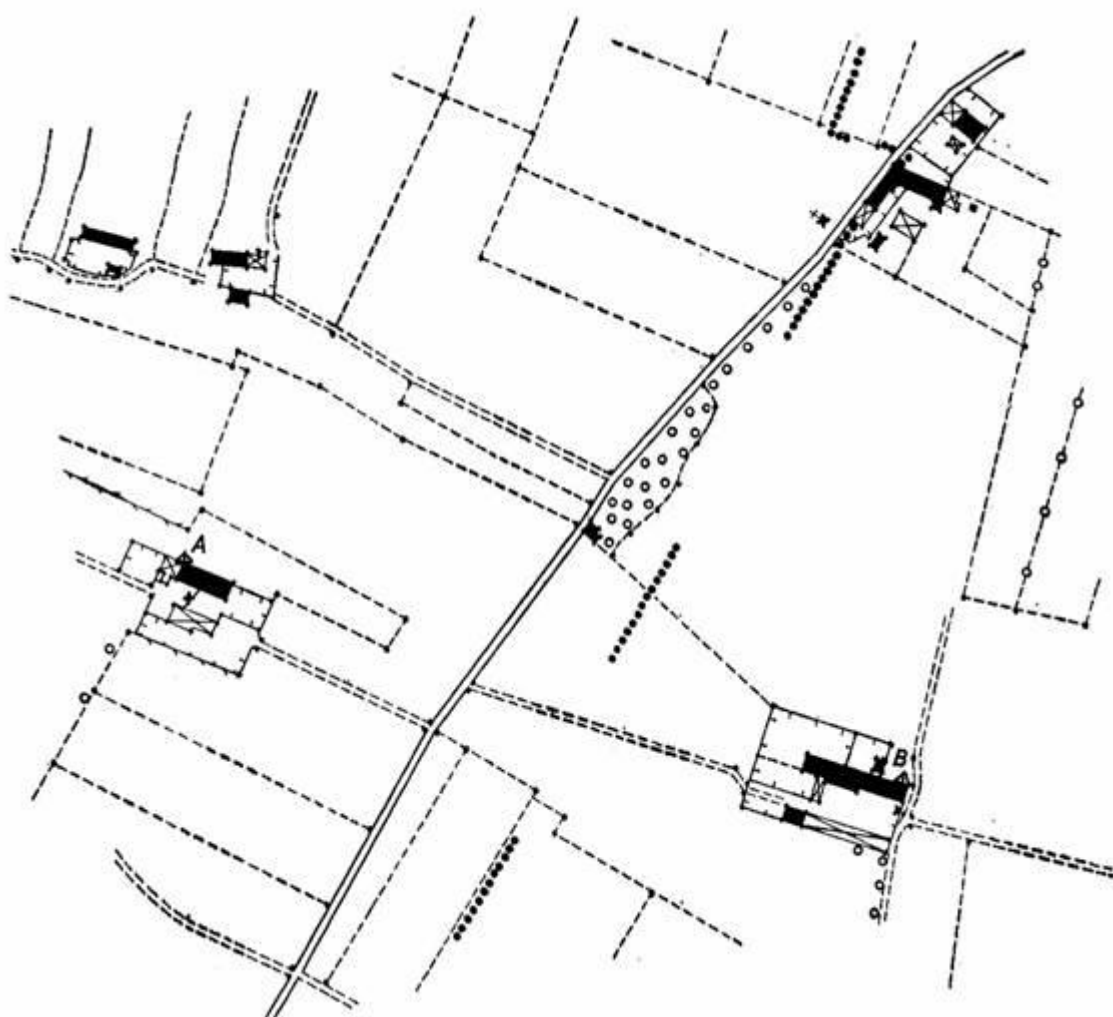


Fig. 17 Punti di dettaglio

VARIABILI STATISTICHE E VARIABILI CASUALI AD UNA DIMENSIONE

La variabile statistica ad una dimensione specifica come un determinato attributo si distribuisce fra gli individui di una popolazione.

Una popolazione è un insieme ben definito di individui ognuno dei quali è caratterizzato da un attributo X che può assumere valori diversi (*valori argomentali*) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$ ($s \geq 2$).

Censire la popolazione significa determinare il valore argomentale x per ciascuno degli N individui che la compongono.

Dopo aver censito la popolazione si procede ad un raggruppamento degli individui in classi cioè:

- si suddivide la differenza fra il valore argomentale più alto e più basso in n intervalli, di solito di ampiezza uguale Δx ;
- si attribuisce ad ogni intervallo un determinato valore argomentale x_i scelto tra quelli compresi nell'intervallo stesso;
- si attribuisce a tutti gli individui compresi nell'intervallo il valore argomentale definito per l'intervallo stesso;
- si conta il numero di individui F_i compresi nell'intervallo;

si ottiene così la variabile statistica ad una dimensione

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_n \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n F_i = N$$

scrivendo ordinatamente ed in senso crescente per ogni valore della classe x_i il numero F_i di individui in essa compreso. La condizione assicura che tutti gli individui sono stati presi in considerazione.

Se si dividono i valori F_i per il numero N di individui si ottengono le frequenze relative:

$$f_i = F_i/N$$

e la variabile assume la forma:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n f_i = 1$$

Ogni f_i rappresenta la frequenza relativa degli individui che presentano il valore argomentale x_i , o, più brevemente, la frequenza relativa del valore argomentale x_i ; la variabile statistica mostra come la frequenza relativa totale 1, si distribuisce fra i vari valori argomentali; in questo senso la variabile statistica è una distribuzione di frequenze.

Esempio:

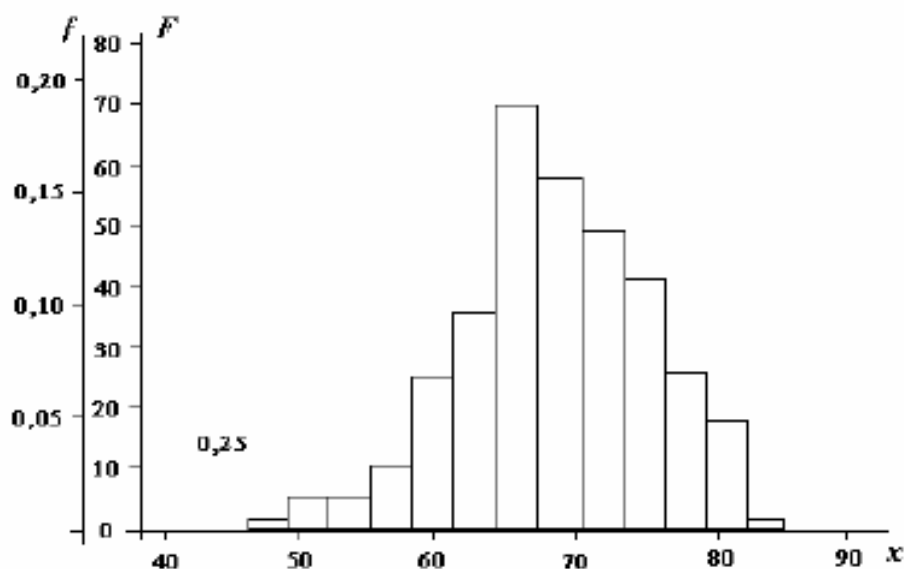
Una partita di 350 pere, da classificare secondo la lunghezza x , dà luogo ad una variabile statistica; effettuata la misura della lunghezza x di ogni individuo della popolazione delle pere, constatato che questa varia da 48 a 84 mm, assunto un intervallo di 3 mm, si ottiene:

$$X \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} 48 & 51 & 54 & 57 & 60 & 63 & 66 & 69 & 72 & 75 & 78 & 81 & 84 \\ 2 & 5 & 5 & 10 & 25 & 36 & 72 & 57 & 49 & 43 & 25 & 19 & 2 \end{array} \right. \quad \sum_{i=1}^{13} F_i = 350$$

$$X \left\{ \begin{array}{ccccccc} 48 & 51 & 54 & 57 & 60 & 63 & 66 \\ 0,006 & 0,014 & 0,014 & 0,029 & 0,072 & 0,104 & 0,205 \\ \hline 69 & 72 & 75 & 78 & 81 & 84 \\ 0,163 & 0,139 & 0,123 & 0,071 & 0,054 & 0,006 \end{array} \right. \quad \sum_{i=1}^{13} f_i = 1$$

Rappresentazione grafica della variabile statistica

La variabile statistica può essere rappresentata graficamente mediante l'*istogramma*. Si riportano sull'asse delle ascisse i valori argomentali corrispondenti a ciascuna classe ed a cavallo di ogni valore si riporta un rettangolo la cui base è pari al valore dell'intervallo Δx e la cui altezza h_i è tale che $h_i \Delta x = F_i$ l'area di ogni rettangolo rappresenta cioè il numero F_i di individui in possesso del valore argomentale x_i ; ovviamente l'istogramma si può costruire anche per le frequenze relative.



Si definisce la variabile **scarto** v_i :

$$v_i = x_i - m_1(x) \quad \text{con} \quad m_1(x) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad \text{media}$$

Un parametro caratteristico della distribuzione è la varianza σ^2 :

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n v_i^2 f_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 f_i$$

La radice quadrata della varianza prende il nome di **scarto quadratico medio** σ .

Media e varianza danno una buona idea sulle caratteristiche della distribuzione.

La *media* indica genericamente qual è la posizione della variabile sulla scala dei valori x , dato che i valori argomentali si distribuiscono attorno a tale valore, ma non da nessuna indicazione su come si distribuiscono; osservando gli istogrammi di alcune distribuzioni tipiche si può notare che in genere i valori argomentali si addensano proprio intorno alla media, come se tutti gli individui della popolazione tendessero ad assumere questo valore.

La *varianza* indica la maggiore o minore dispersione dei valori argomentali attorno alla media (se la varianza è più alta si ha una dispersione dei valori più elevata).

Si può dimostrare, in base alla *disuguaglianza di Tchebycheff*, che la maggior parte dei valori argomentali è contenuta entro i limiti $m_1(x) + 3 \sigma(x)$ ed $m_1(x) - 3 \sigma(x)$, qualunque sia la forma della distribuzione.

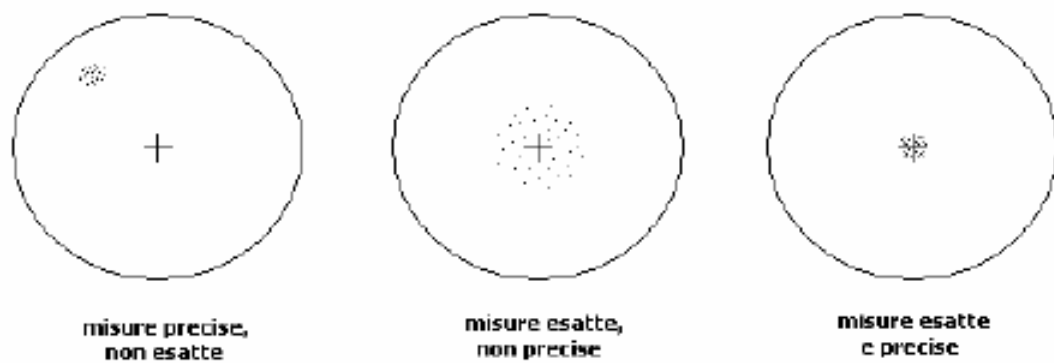
In qualsiasi distribuzione, almeno il 75% dei valori argomentali è distribuito nell'intervallo $\pm 2 \sigma(x)$ intorno alla media, e almeno l'89% dei valori argomentali è distribuito nell'intervallo $\pm 3 \sigma(x)$.

Definizioni di esattezza e precisione

L'**esattezza** (accuracy) è lo scostamento della misura dal valore vero; in una singola misura rappresenta l'errore: una misura è tanto più esatta quanto più piccolo è l'errore. L'errore è una misura della "inesattezza". L'inesattezza è un parametro deterministico se si conosce il valore vero o una sua stima su basi deterministiche. Non è un parametro deterministico se si stima il valore vero mediante la media aritmetica. Se la stima della media di un gruppo di misure non coincide con il valore vero, il gruppo di misure è inesatto: la media risulta affetta da un errore sistematico ("bias").

La **precisione** è il grado di concentrazione dei risultati delle misurazioni ripetute, le cui differenze non hanno sistematicità. E' misurata dallo scarto quadratico medio.

Un esempio classico di misure precise ma non esatte, esatte ma non precise, precise ed esatte è quello del tiro al bersaglio:



Nel caso di più gruppi di misurazioni accade che all'aumentare del numero di misure tende ad annullarsi l'inesattezza ma ad aumentare l'imprecisione.

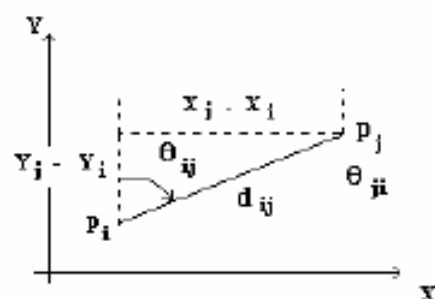
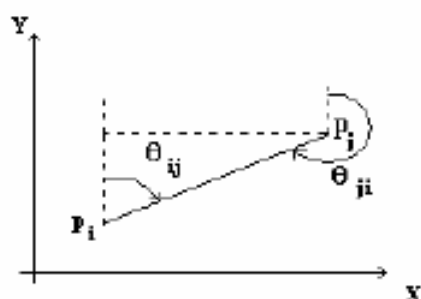
CALCOLO DELLA POSIZIONE DEI VERTICI DI UNA RETE

Dati due punti P_i e P_j di coordinate:

$$P_i (X_i, Y_i) \quad P_j (X_j, Y_j)$$

l'angolo di direzione θ_{ij} è l'angolo di cui la parallela all'asse Y condotta per il punto P_i deve ruotare in senso orario per sovrapporsi alla direzione orientata $P_i P_j$

se la direzione dell'asse Y coincide con la direzione della tangente al meridiano passante per P_i e diretta verso Nord, l'angolo di direzione coincide con l'azimut α_{ij}



$$X_j - X_i = (Y_j - Y_i) \tan \theta_{ij}$$

$$\theta_{ij} = \arctan \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}$$

$$X_j - X_i = d_{ij} \cdot \sin \theta_{ij}$$

$$Y_j - Y_i = d_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}$$

$$d_{ij} = \frac{X_j - X_i}{\sin \theta_{ij}} = \frac{Y_j - Y_i}{\cos \theta_{ij}}$$

$$d_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

d_{ij} : distanza fra i punti P_i e P_j

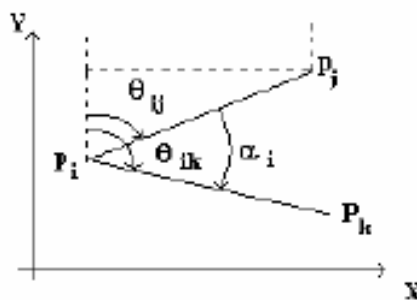
θ_{ji} angolo reciproco di θ_{ij}

$\theta_{ji} = \theta_{ij} + \pi$ il segno $-$ va utilizzato quando $\theta_{ij} > \pi$

Note le coordinate X_i, Y_i del punto P_i , l'angolo di direzione e la distanza d_{ij} , le coordinate di P_j sono date da:

$$X_j = X_i + d_{ij} \cdot \sin \theta_{ij}$$

$$Y_j = Y_i + d_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}$$



La relazione che lega le coordinate dei punti P_i , P_j e P_k all'angolo $P_i P_j P_k$ è:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \theta_{ik} - \theta_{ij} \\ &= \operatorname{atan} \frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{atan} \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\end{aligned}$$

Le relazioni:

$$\operatorname{atan} \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} - \theta_{ij} = 0$$

$$\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} - d_{ij} = 0$$

$$\operatorname{atan} \frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{atan} \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} - \alpha_i = 0$$

stabiliscono delle equazioni fra le coordinate dei vertici di una rete e le grandezze caratteristiche della rete:

- angolo di direzione
- distanza
- angolo azimutale.