

FISICA NUCLEARE (11)

- Reazioni nucleari in regime non relativistico
 - Modello ottico (2)
 - Reazioni con formazione del nucleo composto
 - Reazioni dirette
 - Reazioni di risonanza
- Diff. da pot. Coulombiano (1)

Modello ottico

Descrive interazione con potenziale complesso:

$$U(r) = V(r) + iW(r)$$

$V(r)$ → parte elastica scattering: assomiglia potenziale modello a shell

$W(r)$ → responsabile dell'assorbimento

Esempio (**buca quadrata**):

$$U(r) = -V_0 - iW_0 \quad r < R$$

$$U(r) = 0 \quad r > R$$

Onda diffusa $\propto e^{ikr}/r$, con:

$$k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)/\hbar^2}$$

Posto $k = k_r + ik_i$, onda uscente $\propto \frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$ e dens. prob. radiale $\propto e^{-2k_i r} \Rightarrow$ onda attenuata che si sovrappone al volume del nucleo

• Con assorbimento ridotto [$W_0 < (E + V_0)$], si sviluppa k :

$$k \simeq \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E + V_0)}}$$

Distanza **attenuazione** $1/e$:

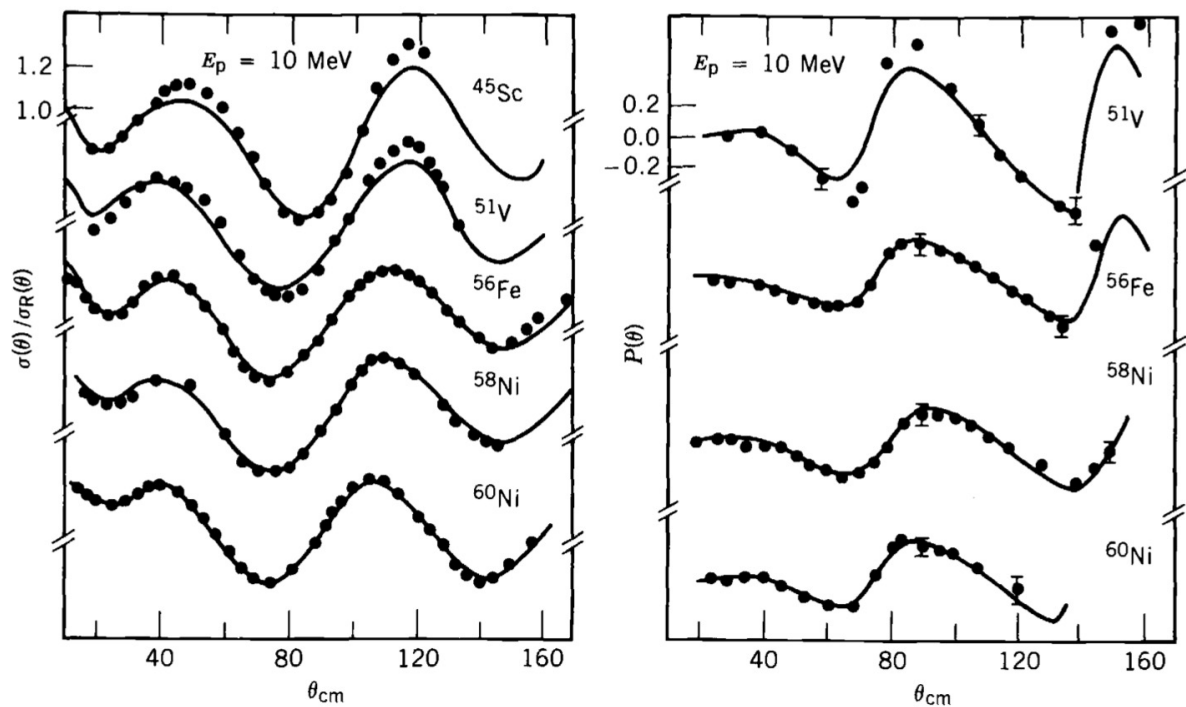
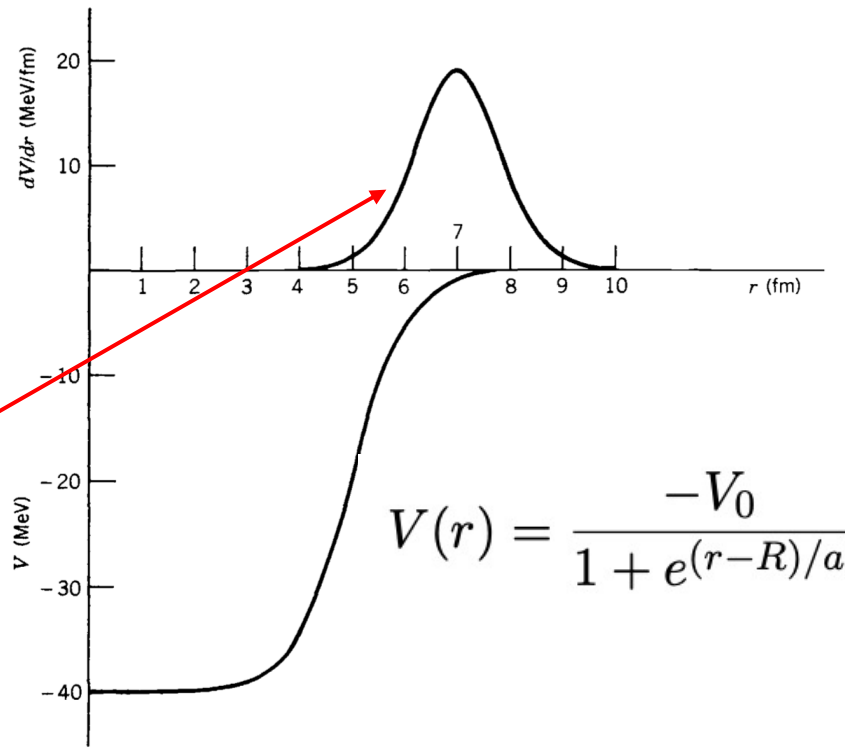
$$d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E + V_0)}{2m}}$$

Tipicamente: se $d \approx R$ (\sim fm); V_0 tipico potenziale di modello a shell (\sim 40 MeV); proiettili con $E_k \approx$ 10 MeV

$\Rightarrow W_0 \approx$ 11 MeV \Rightarrow

... per calcolo di modello ottico:

- si sceglie potenziale (es. Saxon Woods)
- assorbimento $W(r)$ a basse energie: **princ. esclusione** \Rightarrow nucleoni **più interni** non partecipano assorbimento di nucleoni incidenti.
- Se energia proiettili bassa, nucleoni di **valenza** possono assorbire, $W(r) \propto dV/dr$



Sez. d'urto Coulombiana, p da 10 MeV su vari bersagli

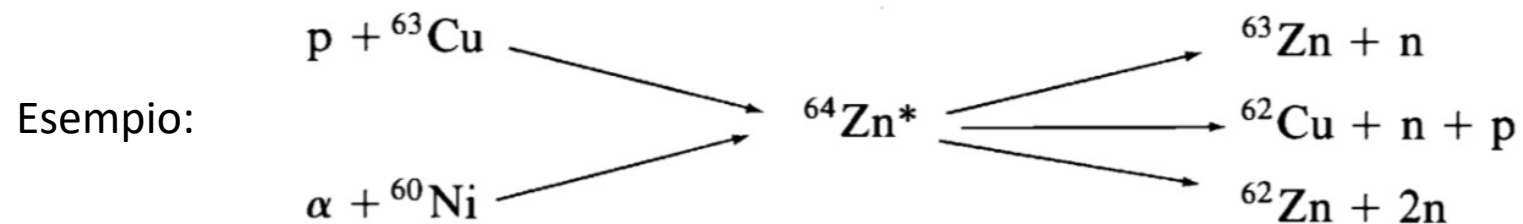
- Si include termine **spin-orbita** con valore maggiore alla superficie del nucleo (**spin dei nucleoni più interni si bilanciano**)
- Se proiettile carico, si include termine coulomb
- Si risolve eq. Schrödinger raccordando condizioni contorno per $r = R$ ottenendo ampiezze complesse

Limiti del Modello ottico

- Non considera e non descrive caratteristiche della struttura microscopica dei nuclei coinvolti e dell'interazione
- Calcoli non dicono cosa ne sia delle particelle assorbite, ma semplicemente le escludono dal canale elastico
- Modello ottico comunque utile nel discutere comportamento medio nei processi di scattering

Reazioni con formazione del nucleo composto

- Proiettile $b < R$ \Rightarrow alta probabilità interagire con molti nucleoni ripartendo energia e divenendo parte sistema
- Redistribuzione statistica energia proiettile può concentrarsi su un nucleone con energia suff. a estrometterlo \Rightarrow \sim **evaporazione** molecola da liquido caldo
- Processo ha luogo con formazione **stato intermedio** dopo assorbimento proiettile e prima di emettere particelle **evaporative**
- Stato è **nucleo composto** $a + X \rightarrow C^* \rightarrow Y + b$
- **C*** può decadere in vari modi con prob. indep. da come si è formato, ma dip. da sua composizione e da energia tot. del sistema
- Redistribuzione \sim **termica** energia cinetica del proiettile fra nucleoni di **C*** \Rightarrow **perdita memoria** del processo di formazione \Rightarrow **decadimento governato da processi statistici**



Se A_P e A_B num. massa di proiettile e bersaglio:

- C^* \Rightarrow descrive bene **reazioni bassa energia** (10 ÷ 20 MeV), con bassa probabilità che particella incidente sfugga dal sistema prima di essersi **termalizzata**
- Per lo stesso motivo sua efficacia cresce al crescere di A_B
- Casualità interazioni in formazione C^* \Rightarrow se $A_P < A_B$ \Rightarrow emissione isotropa prodotti decadimento: **confermata** sperimentalmente
- Se $A_P \lesssim A_B$, mom. ang. trasferito a C^* può essere grande e distrib. angolare particelle emesse ne risente con preferenza per direzioni \perp a quella del mom. ang. trasferito
- **Analogia evaporativa** \Rightarrow numero particelle emesse cresce con l'energia e sez. d'urto ha forma \sim Gauss
- Tempi caratteristici **abbastanza lenti**: $10^{-16} \div 10^{-18}$ s

Reazioni dirette

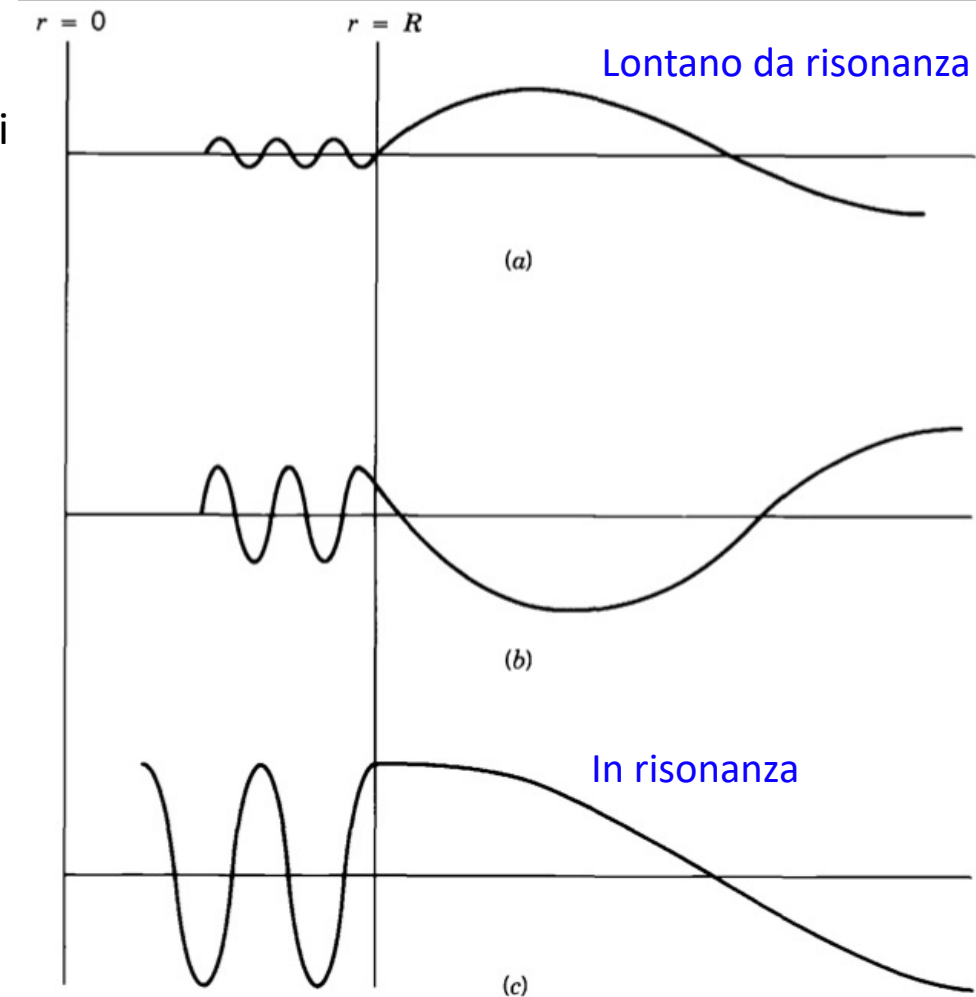
- Nucleone da **1 MeV** ($\lambda \simeq 4 \text{ fm}$) \Rightarrow non risolve singoli nucleoni bersaglio \Rightarrow **nucleo composto**
Nucleone da **20 MeV** ($\lambda \simeq 1 \text{ fm}$) \Rightarrow possibile **interazione diretta** con singolo nucleone del bersaglio
Probabili urti con nucleoni più periferici
- Entrambi meccanismi contribuiscono a reazione, importante distinguerli
In **reazioni dirette**:
 - **tempi caratteristici** $\sim 10^{-22} \text{ s}$, 4÷6 o. di g. meno del nucleo composto
 - **dist. angolari** dei prodotti **anisotrope** e con **picchi**
- Reaz. anelastica può procedere **nei due modi**, con forte dipendenza da energia proiettile: **stripping** deutone **$X(d,n)Y$** , con singolo protone **trasferito** da proiettile a bersaglio
- Alternativamente **$X(d,p)X'$** , più facile per via **diretta** poiché inglobamento **p** in **C*** inibito da barriera coulombiana
- Reazione **$X(\alpha,n)Y$** **difficile** via **diretta**, richiede trasferimento di **3 nucleoni** su shell di valenza di un bersaglio; processo poco probabile
- Reazioni **pickup** (proiettile cattura nucleone al bersaglio), ad es. **$X(p,d)Y$** , danno informazioni su stati di singola particella

Reazioni di risonanza

- Nel C^* stati non legati numerosi \sim spettro continuo \Rightarrow sovrapp. fra stati li rende instabili e sistema ricorda una **struttura calda fluttuante**
- Stati legati accessibili a **reazioni dirette** sono \sim stabili per emissione di particelle e decadono γ . Trattabili come stati discreti con propria funz. d'onda
- Fra i due estremi regione di **risonanza**: livelli discreti ad alta probabilità formazione e **2** soli modi decadimento: **re-emissione** o **emissione γ**
Sez. d'urto corrispondenti ai livelli \Rightarrow **Breit-Wigner**

Qualitativamente: particella su buca quadrata. Fase nel nucleo dipende da energia partic. incidente e influisce su ampiezza relativa fra dentro e fuori nucleo

- (a) bassa probabilità di penetrare nucleo \Rightarrow proiettile forma con esso stato quasi legato
- (c) alta probabilità di penetrare \Rightarrow condizione di **risonanza**



Raccordo funz. d'onda su frontiera buca legato a fase

- Se una sola onda parziale l contribuisce a stato risonante, lo si ha per $\eta_l = -1 \Rightarrow$ **sfasamento** $\delta_l = \pi/2$

Forma della risonanza espandendo sfasamento attorno a questo valore

Converge meglio espandendo $\cot(\delta_l)$, e trascurando termini d'ordine sup.

$$\cot\delta_\ell = -\frac{(E - E_R)}{\Gamma/2} \quad \text{con} \quad \Gamma = 2 \left(\frac{\partial\delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1} \Rightarrow [\Gamma] \rightarrow \text{energia, e}$$

$$\text{sen}\delta_\ell = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4]^{1/2}} \quad \text{e infine} \quad \sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

- Considerando spin di proiettile e bersaglio s_a ed s_X , e mom. ang. orb. l , si sostituisce $(2l+1)$ con

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_X + 1)} \quad \text{dove} \quad \mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_X + \mathbf{l}$$

- Se risonanza può decadere in canali diversi e indipendenti $\Rightarrow \Gamma = \sum_i \Gamma_i$

- Γ^2 a **denominatore** connesso a larghezza decadim. dello stato risonante : $\tau = \hbar/\Gamma$
- Γ^2 a **numeratore** connesso a formazione risonanza e sua probabilità di decadere in canale particolare
- Per **Scattering elastico**, canali ingresso e uscita coincidono $\alpha+X \rightarrow \alpha+X$ e si utilizza la stessa larghezza parziale

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{(\Gamma_{aX})^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

- Per **reazione** del tipo $\alpha+X \rightarrow b+Y$ si pone invece

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

Problema: diffusione da potenziale coulombiano

Ricalcoliamo Rutherford con **Regola d'oro**

- Particella **puntiforme** $Z_1 e$, bersaglio **puntiforme** $Z_2 e$ fermo in **SL**, si trascura **spin**
- $[M_{\text{massa bersaglio}}] \gg [E_{k,\alpha}/c^2] \Rightarrow$ si trascura rinculo \Rightarrow si utilizza **tri-impulso** e se $Z_2 e$ piccolo il **potenziale non molto intenso** \Rightarrow **approssimazione Born**

- Pot. a distanza ∞ **trascurabile** \Rightarrow **proiettili** \approx **liberi** in stati iniziale e finale:

(sono autofunzioni impulso \sim onde piane)

$$\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r} / \hbar} \quad \psi_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r} / \hbar}$$

- V abbastanza grande da **confondere stati discreti con \approx continuo**, e contiene strutture schermaggio di $Z_2 e$ \forall particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. **Risultato finale non deve dipendere da V**

n_a \rightarrow part. incidenti per unit  di volume $\int_V |\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r})|^2 dV = n_a V$ ($V = \frac{N_a}{n_a} \propto R^3$)

N_a \rightarrow part. fascio che incidono su bersaglio

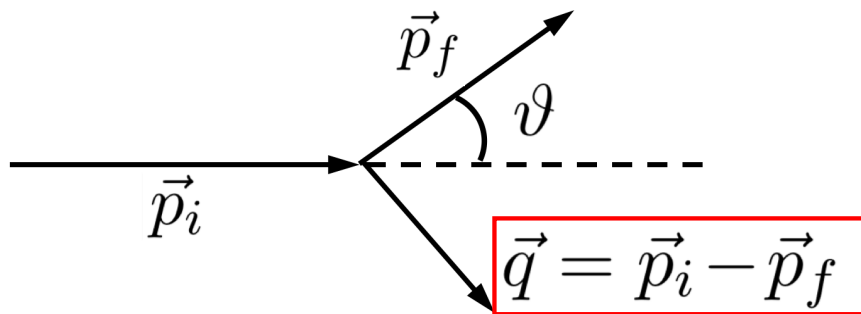
Tasso W di interazioni:

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}$$

E_f : en. totale (kin. + massa)
dello stato finale

Urto elastico $\Rightarrow dE_f = dE' = dE$

Trascurare pot. a grande distanza \Rightarrow conservazione moduli impulsi: $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$



Densità spazio fasi: $dn(|\mathbf{p}_f|) = \frac{4\pi |\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\mathbf{p}_f|$

da cui: $d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\mathbf{p}_f|}{dE_f} d\Omega$

Se energia particelle alta $\Rightarrow v_a \simeq c$ e $|\mathbf{p}_f| \simeq E_f/c$, da cui:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

Hamiltoniano d'interaz.: $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$, con $\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r}$, da cui

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \mathcal{M}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x =$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\mathbf{q})$$

con: $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ **imp. trasferito**

$$|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}| \Rightarrow |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_f|^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f| \cos\vartheta = 2|\mathbf{p}|^2 (1 - \cos\vartheta) = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Integrando: $\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|}\right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\mathbf{q}|^2}$

Da cui: $\sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\mathbf{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\mathbf{q}|^4}$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$$

Nel **limite relativistico** [$E_f \simeq pc$] \Rightarrow $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$ (4 volte maggiore che a basse velocità)

In quello **non-relativistico** [$E_k = p^2/(2m)$ ed $E_f \simeq mc^2$] \Rightarrow $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$

uguale al risultato classico !