BASI per il corso

FUNZIONI COMPOSTE

Prendiamo una funzione $f(x)$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

es. $f(x) = e^x, \cos x, x^2, \dots$

La sua derivata $f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x)$ è essa stessa una funz.

$$\frac{df}{dx} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{df}{dx}(x)$$

Posso definire funz. composte, sostituendo all'argomento x una funzione $\xi(t)$

$$\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \xi(t)$$

$$g(t) \equiv f(\xi(t)) \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Facciamo la derivata di g

$$\frac{dg(t)}{dt} \equiv \dot{g}(t) = f'(\xi(t))\,\dot{\xi}(t) \equiv \frac{df}{dx}(\xi(t)) \cdot \dot{\xi}(t)$$

Es: $f(x) = x^2 \qquad \xi(t) = e^t \quad \to g(t) = e^{2t}$

$$\to \quad \dot{g}(t) = 2e^{2t}$$

$$= \frac{df}{dx} \cdot \dot{\xi} = 2\xi \cdot \dot{\xi} = 2e^t \cdot e^t = 2e^{2t}$$

$$\frac{df}{dx} \downarrow \quad \frac{df}{dx}(x) = 2x \qquad\qquad \dot{\xi} \downarrow \quad e^t$$

Partiamo da una funz. a due variabili

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$\to$ c'è una mappa $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x^2+y^2$$

Le sue derivate parziali sono ancora delle funzioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad\qquad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Prendiamo delle funzioni ξ e η

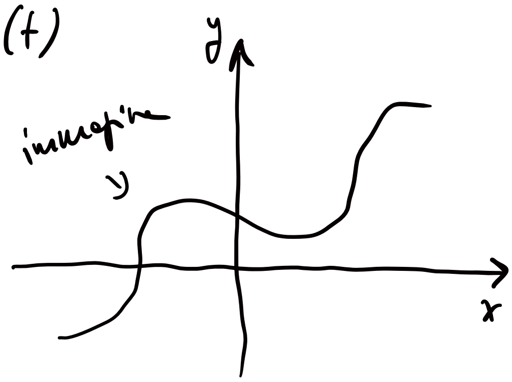
$$\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \xi(t) \qquad\qquad t \mapsto \eta(t)$$

$$(\xi, \eta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\xi(t), \eta(t))$$

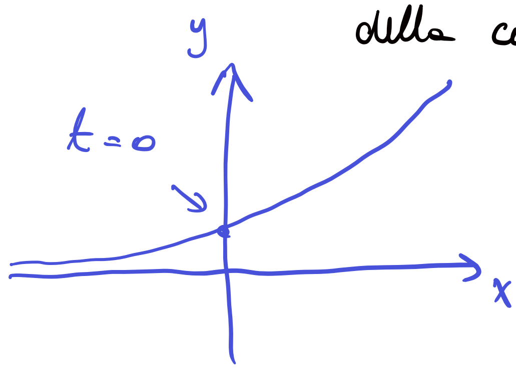
$\rightsquigarrow$ immagine



t è detto il parametro della curva

Es. $\quad \xi(t) = t$

$\quad\quad \eta(t) = e^t$



Def. La funz. composta

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto g(t) = f(\xi(t), \eta(t))$$

Es. $\quad g(t) = f(t, e^t) = t^2 + e^{2t}$

Di qta funz. mi può interessare la derivata

$$\dot g(t) = 2t + 2e^{2t}$$

oppure uso la regola di derivazione di funz. comp.

$$\dot g(t) = \frac{d}{dt} f(\xi(t), \eta(t)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) \cdot \dot\xi(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t), \eta(t)) \cdot \dot\eta(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad f(x,y) = x^2+y^2$$

$$= 2\xi\dot\xi + 2\eta\dot\eta = 2t \cdot 1 + 2e^t \cdot e^t$$

$$= 2t + 2e^{2t}$$

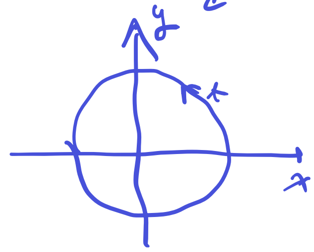
Proviamo a fare un'altra scelta per le funz. $\xi(t), \eta(t)$

$$\xi(t) = \cos t \qquad \eta(t) = \operatorname{sen} t \qquad (f = x^2+y^2)$$

$$g(t) = \xi(t)^2 + \eta(t)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\downarrow$$

$$\dot g(t) = 0$$



$$\dot g = \frac{\partial f}{\partial x}\dot\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\dot\eta =$$

$$= 2\xi\dot\xi + 2\eta\dot\eta = -2\cos t \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} t \cos t = 0$$

Altra possibilità:

$$h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, t) \mapsto h(x, y; t)$$

Es. $h(x,y;t) = xy^2 - \sinh^2 t$

Consideriamo una curva in $\mathbb{R}^2$ data da

$$\xi(t) = 1 \qquad \eta(t) = \cosh t$$
$$\dot\xi = 0 \qquad \dot\eta = \sinh t$$

Def. $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto h(\xi(t), \eta(t); t)$$

$$K(t) = h(\xi(t), \eta(t); t) = \xi(t)\,\eta(t)^2 - \sinh^2 t$$
$$= 1 \cdot \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$
$$\rightarrow \dot K = 0$$

Calcoliamoci $\dot K$ usando la regola della derivata di funz comp.

$$\dot K(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\xi(t), \eta(t); t)\,\dot\xi(t) + \frac{\partial h}{\partial y}(\xi(t), \eta(t); t)\,\dot\eta(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(\xi(t), \eta(t); t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy$$

$h(x,y;t) = xy^2 - \sinh^2 t$

$$= \eta^2 \dot\xi + 2\xi\eta\dot\eta - 2\sinh t \cosh t =$$

$$= (\cosh t)^2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \cosh t \sinh t - 2 \sinh t \cosh t = 0$$

//

SPAZI VETTORIALI

Spazio vettoriale V def. su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}, \dots$)

è un INSIEME di oggetti che chiamiamo VETTORI

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \in V \qquad \alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R}$

su cui definiamo le operazioni $+$ e "prodotto per un numero":

$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V$

$\alpha \bar{v}_1 \in V$

t.c. $\alpha(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \alpha \bar{v}_1 + \alpha \bar{v}_2$

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se

$\exists$ una combinaz. lineare nulla, cioè se

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_m \bar{v}_m}_{\equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{v}_i} = 0$$

(I vett. sono lin. indip. se non sono lin. dip)

BASE per V: insieme di vettori lin. indip.

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ t.c.

$\forall \bar{v} \in V \quad \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ t.c.

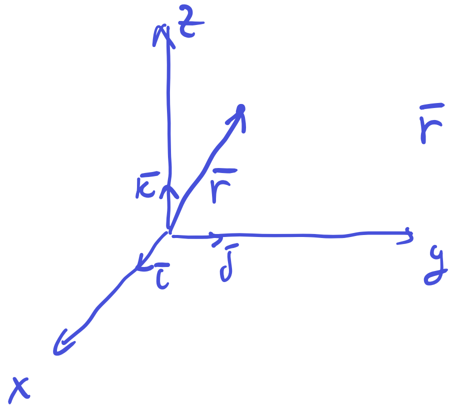
$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

componenti del vettore

Es. $V = \mathbb{R}^3$



$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} \quad \updownarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \mapsto \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \quad \in \mathbb{R}$$

prodotti scalari def. positivi

$\rightsquigarrow \|\bar{v}\|^2 \equiv \bar{v} \cdot \bar{v}$

$\rightsquigarrow$ Base ortonormale $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$
$$= \delta_{ij}$$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$

$$\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \sum_{\text{✿}=1}^{n} \alpha_{\text{✿}} \bar{e}_{\text{✿}} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$
$$\sum_{\text{✿}=1}^{n} \alpha_{\text{✿}} \bar{e}_{\text{✿}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{e}_k$$
$$\bar{v}_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{e}_j$$

$(a+b)(c+d)$
$= a(c+d) +$
$+ b(c+d)$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{e}_j \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\bar{e}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{e}_j \right) \right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{ij} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{ij} = \beta_1 \delta_{i1} + \beta_2 \delta_{i2} + \beta_3 \delta_{i3} + \dots + \beta_n \delta_{in} =$$

$$= \beta_1 \delta_{i1} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ j=i}}{\beta_i} \delta_{ii} + \dots + \beta_n \delta_{in}$$

$$= 0 + \dots + \beta_i + 0 + \dots + 0 \quad = \beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Operatori lineari su V

- Dato sp. vett. V di dim. n, consideriamo gli op. lin.

$$A: V \longrightarrow V \qquad \text{(endomorfismi)}$$

lin: $\quad A(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha (A \bar{v}_1) + \beta (A \bar{v}_2)$

- Scelta una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ di V, A è rappresentato da una matrice che agisce sulle componenti dei vett. in V rispetto alla base scelta:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$$

$$A\bar{e}_i \in V \Rightarrow \quad A\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} (A_{ji}) \bar{e}_j$$

componenti di $A\bar{v}$ sono date da prodotto matrice con vett. colonna di comp.

$$A\bar{v} = A \sum_i \alpha_i \bar{e}_i = \sum_i \alpha_i (A\bar{e}_i) = \sum_j \Big(\sum_i A_{ji} \alpha_i \Big) \bar{e}_j$$

Se base è o.n. $\quad A_{ki} = \bar{e}_k \cdot A\bar{e}_i$

Spazio vettoriale duale

- Dato uno sp. vett. V di dim n, viene definito lo spazio vettoriale DUALE come lo spazio dei FUNZIONALI LINEARI su V

$$V^* = \{ a : V \to \mathbb{R} \mid a(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha a(\bar{v}_1) + \beta a(\bar{v}_2) \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \}$$

V^* è uno sp. vett. di dim n.

- Data una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, possiamo definire la BASE DUALE in V^* $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ t.c.

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

In componenti $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\qquad e_1^* = (1 \; 0 \; 0 \; \dots)$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

- I funzionali lineari vengono anche chiamati 1-FORME
- Il DIFFERENZIALE di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una 1-forma su $\mathbb{R}^n$. In che senso?

$$df[\bar{v}] = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \leftarrow \text{funzionale lineare} \qquad (*)$$

Vediamo come costruire una base:

- "funzioni coordinate" $x_i : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \to x_i$ (es. $f(x)=x$ in $\mathbb{R}$)
- diff. di tali funz. dx_i. Vediamo come agiscono:

$$dx_i[\bar{v}] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = v_i$$

- $$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$\rightsquigarrow$ $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ sono base di V^*; in particolare essa è la base duale di $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Definizione più formale:

- Prendiamo una funz. $f : Q \to \mathbb{R}$ definita su una varietà Q.
- $df(p)$ è un funzionale lineare che agisce sullo spazio tangente in p, cioè $df(p) : T_pQ \to \mathbb{R}$.
- Dato $v \in T_pQ$, $v = \frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0}$ per qualche curva $\gamma : \mathbb{R} \to Q$ con $\gamma(0) = p$.

Il DIFFERENZIALE df di f è definito da

$$df(p)[v] \equiv \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \quad \leftarrow \text{coincide con } (*)$$

TENSORI

Dati due spazi vettoriali V e W di dim n e m, posso definirne un nuovo spazio vett., detto prodotto tensore $V \otimes W$, nel seguente modo:

- prendo una base $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ di V e una base $\{w_k\}_{k=1,\dots,m}$ di W;
- introduco un set astratto di $n \cdot m$ vettori
  $e_{ij} \equiv v_i \otimes w_j \qquad i=1,\dots,n \qquad j=1,\dots,m$
- def. $V \otimes W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ij} \, v_i \otimes w_j \;\middle|\; \Lambda_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

  cioè def. $V \otimes W$ come l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori e_{ij}.

Un caso particolare è quando $W = V$: $e_{ij} = v_i \otimes v_j$

Posso anche def. $\underbrace{V \otimes V \otimes V \otimes \dots}_{N \text{ fattori}} \otimes V$:

- in qto caso la base di qto sp. vett. è
  $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_N} \qquad i_k = 1,\dots,n$
  e i coeff. delle combinazioni lineari sono degli oggetti $\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ con N indici.
- la dim. dello sp. è n^N.

$\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ sono detti TENSORI.