MOTO CENTRALE

Consideriamo DUE CORPI con interazione che dipende solo dalla posizione relativa:

$$L = T - V \qquad \left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^{\,2} \\ V &= V(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \end{aligned}\right\}$$

6 gradi di libertà $\updownarrow$ coord. libere $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$

Possiamo passare a nuove coord.:

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 & \leftarrow \text{posizione relativa} \\ \bar{R} = \dfrac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} & \leftarrow \text{coord. del centro di massa} \end{cases}$$

Definiamo $M \equiv m_1 + m_2$ e invertiamo la trasf. di coord:

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{R} + \dfrac{m_2 \bar{r}}{M} \\ \bar{r}_2 = \bar{R} - \dfrac{m_1 \bar{r}}{M} \end{cases} \longleftarrow \text{sostituiamo nella Lagrangiana}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\bar{R}}^2 + \cancel{\frac{2 m_2}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\bar{R}}^2 - \cancel{\frac{2 m_1}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{} \dot{\bar{r}}^2$$

$$\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2}{M} \equiv m \leftarrow \text{"MASSA RIDOTTA"}$$

$$\frac{\cancel{(m_1 + m_2)} m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}} \equiv m \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = V(\bar{r})$$

$$\Rightarrow \quad L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}_{}$$

Particella libera con massa M e posizione del centro di massa.

Lagrangiana di un corpo di massa m e soggetto a un potenziale $V(\bar{r})$

$\Downarrow$

- Le equazioni di Lagrange di $\bar{R}(t)$ sono triviali.
- Le equazioni di Lagrange di $\bar{r}(t)$ non dipendono dal petto $\frac{M}{2}\dot{\bar{R}}^2$.

$\Rightarrow$ posso concentrarmi a descrivere il moto $\bar{r}(t)$ determinato dalla Lagrangiana

$$L(\bar{r},\dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})$$

Ci restringiamo al caso in cui il potenziale dipende solo dal modulo del vettore $\bar{r}$, cioè $V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|)$:

$$L(\bar{r},\dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|) = \frac{1}{2}m\|\dot{\bar{r}}\|^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

$\hookrightarrow$ L dipende solo dalle NORME dei vettori $\bar{r}$ e $\dot{\bar{r}}$

$\Rightarrow$ L è INVARIANTE per ROTAZIONI $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Momento angolare $\bar{M}$ è COST. DEL MOTO

$\rightsquigarrow$ 3 cost. del moto scalari (le tre componenti del momento angolare)

Se $\bar{M}$ è cost. del moto, i moti $\bar{r}(t)$ che soddisfano le eq. di Lag. sono t.c.

$$\bar{r}(t) \times m\dot{\bar{r}}(t) = \bar{M}_{cost.} \qquad (A)$$

$\hookrightarrow \Rightarrow \bar{r}(t)$ e $\dot{\bar{r}}(t) \perp \bar{M}$

Se $\bar{M}^{\neq 0}$ è fisso durante il moto, vuol dire che

$\bar{r}(t)$ e $\dot{\bar{r}}(t)$ stanno sempre nel piano $\perp$ al mom. ang. $\bar{M}$

$\Rightarrow$ il moto avviene su un PIANO

(Se $\bar{M}=0$, $\bar{r} \parallel \dot{\bar{r}}$ $\to$ il moto è rettilineo.)

$\rightsquigarrow$ possiamo prendere l'asse $z \parallel \bar{M}$ cost.

$$\Rightarrow \bar{r} = x\,\bar{e}_1 + y\,\bar{e}_2 \qquad \dot{\bar{r}} = \dot{x}\,\bar{e}_1 + \dot{y}\,\bar{e}_2$$

$\to$ ridotto il problema a 2 GRADI DI LIBERTA'

$\swarrow$ $\bar{M} \parallel$ asse z

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- per scrivere L a 2 gradi di libertà, abbiamo usato la DIREZIONE di $\bar{M}$, cioè 2 cost. del moto ($M_x = 0$, $M_z = 0$). Rimane il modulo (ovvero M_z, se $\bar{M} = M_z\,\bar{e}_z$)
  $\to$ ci aspettiamo di ritrovare qta cost. del moto nel problema a $n=2$.

Passiamo a COORD. POLARI

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{y} &= \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m r^2\dot{\theta}^2 - V(r)$$

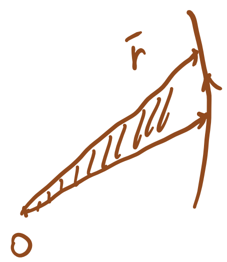
$\longrightarrow$ θ è una COORDINATA CICLICA

$\rightsquigarrow$ $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta$ è COST. DEL MOTO

$M_z = m(\dot x y - x \dot y)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} r^2 \dot\theta}_{\text{VELOCITÀ AREOLARE}}\Big) = 0$ lungo un moto che risolve eq. Lagr.

$\rightarrow$ Velocità areolare è cost. del moto $\longleftrightarrow$ 2^a legge di Keplero



$$A(t) = \int_{\substack{\text{AREA}\\ \text{tra } \theta_0 \text{ e } \theta(t)}} \overbrace{r'\,dr'\,d\theta'}^{dA} = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' \int_0^{r(\theta')} r'\,dr' = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} r(\theta')^2\,d\theta'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r(t)^2}{2} \cdot \dot\theta(t)$$

$m r^2 \dot\theta = \ell$ costante

$\Downarrow$

$\dot\theta = \dfrac{\ell}{m r^2} > 0$ (se $\ell > 0$) $\Rightarrow$ $\theta(t)$ è una funzione MONOTONA (crescente)

$\updownarrow$

$\theta(t)$ è una funz. invertibile (con inversa $t(\theta)$)

$\rightsquigarrow$ $\theta(t)$ fornisce una buona trasformazione di coordinate

$\hookrightarrow$ θ può essere usata in luogo di t come parametro per descrivere le curve tracciate nel piano, cioè le TRAIETTORIE del moto (dette anche ORBITE): nel piano r, θ le curve sono date dal grafico della funzione $r(\theta) \equiv r(t(\theta))$

Usiamo ora la COORDINATA CICLICA θ per ridurre il probl. a 1 grado di lib.

Ricordiamo: $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ e $L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r)$

$$\hookrightarrow \quad L_{eff} = \left(L - \dot{\theta} p_\theta \right) \Big|_{\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 - V(r) - \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)\ell$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V_{eff}(r) \qquad \text{con } V_{eff} = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$\hookrightarrow$ Risolvendo le eq. di Lagrange per L_{eff}, otteniamo la funz. $r(t)$; mettiamo tale funz. nell'eq. $\dot{\theta} = \frac{\ell^2}{m\, r(t)^2}$ che permette di ricavare $\theta(t)$ per semplice integrazione.

$\rightarrow$ Risolvendo il problema ridotto a 1 grado di libertà con Lagr. L_{eff}, siamo poi in grado di determinare il moto $(r(t), \theta(t))$ sul piano dell'orbita.

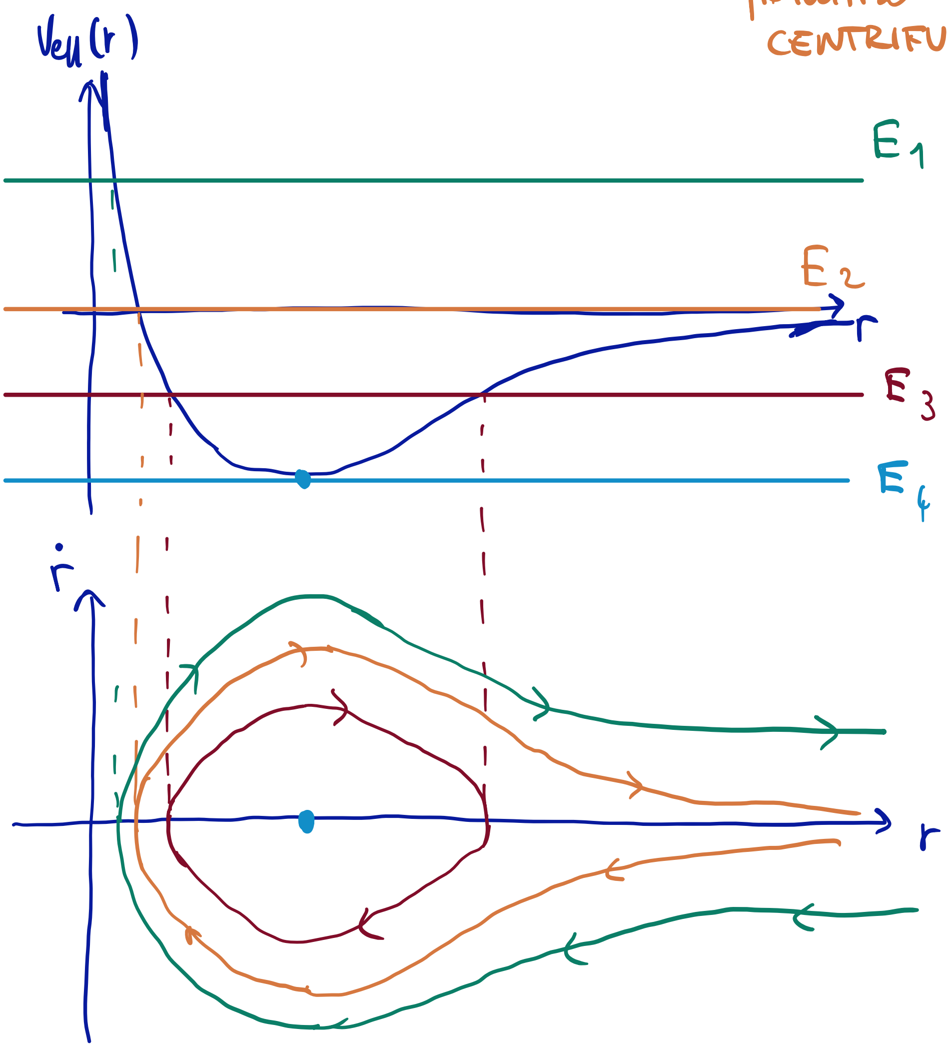
Diagramma di fase per $V(r) = -\frac{K}{r}$ (potenziale Kepleriano)

$\rightarrow V_{eff} = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$ $\qquad V'_{eff}(r) = \frac{K}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = \frac{K}{r^3}\left(r - \frac{\ell^2}{Km}\right)$

potenziale CENTRIFUGO

$E = T + V_{eff}$

$T \geq 0 \Rightarrow V_{eff}(r) \leq E$



E_1) - pto materiale non arriva mai all'origine $(r \geq r_0)$

- $r(t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

- tipico PROCESSO D'URTO (con una barriera di potenziale centrifuga)

E_2) - simile a E_1, ma ora $\dot{r} \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$

E_3) - moto è confinato tra r_{min} e r_{max}

r_{min}: PERICENTRO $\qquad r_{max}$: APOCENTRO

(distanze APSIDALI)

→ nel piano (x,y) le orbite sono LIMITATE
(ma non necessariam. CHIUSE)

$E_4)$ – min. del pot. eff. $\dot r(t)=0 \to r(t)=\text{cost.}$
→ ORBITA è CIRCOLARE $(\dot\theta \neq 0)$

Caso Kepleriano $V(r) = -\frac{k}{r}$

$$L_{eff} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Eq. di Lagr.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot r} = m\ddot r$$

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$\ddot r = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2r^3} \qquad (*)$$

Invece di trovare la funzione $r(t)$ che risolve $(*)$, possiamo cambiare parametro della curva (ORBITA) da t a θ e cercare la funzione $r(\theta)$ t.c. $r(t) \equiv r(\theta(t))$ risolve $(*)$

data da relazione $\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}$

$$\dot r = \frac{dr}{d\theta}\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\ell}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftarrow \dot r(\theta)$$

$$\ddot r = \frac{d}{dt}\dot r(\theta) = \frac{d}{d\theta}\dot r(\theta)\cdot\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}\left(-\frac{\ell}{m}\right)\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot r = -\frac{\ell^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^3} \iff -\frac{\ell^2}{m^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^3}$$

$$\rightarrow \quad -\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{km}{\ell^2} + \frac{1}{r}$$

$$u(\theta) \equiv \frac{1}{r(\theta)} \qquad \frac{1}{\eta} \equiv \frac{km}{\ell^2}$$

$$u'' + u = \frac{1}{\eta}$$

Eq. lin. 2° ordine non-omogenea:

Soluz. partic.: $u(\theta) = 1/\eta$ $\qquad C \equiv \frac{e}{\eta}$

Soluz. gen. omog. ass. $(u'' = -u)$: $u(\theta) = C\cos(\theta - \theta_0)$

$$\downarrow$$

$$u(\theta) = \frac{1}{\eta}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \quad (*)$$

Equazione di una CONICA nel piano (in coord. polari)

L'eccentricità e è legata all'Energia E:

consideriamo il problema unidim. con

$$L_{eff} = T_{eff} - V_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \left(-\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)$$

L'en. totale $E = T_{eff} + V_{eff}$ è una COSTANTE DEL MOTO.

Ricordiamo che il moto ha sempre un valore r_{min} minimo che $r(t)$ assume. Esso può essere determinato sia in funzione dell'energia E che dell'eccentricità e da $(\times)$:

- r_{min} è t.c. $V(r_{min}) = E$ (punto di inversione del probl. ridotto)

Risolviamo eq. $V_{eff}(\xi) = E$, cioè $-\frac{k}{\xi} + \frac{\ell^2}{2m\xi^2} = E \;\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\ell^2}{2m}\left(\frac{1}{\xi}\right)^2 - k\left(\frac{1}{\xi}\right) - E = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\xi_{1,2}} = \frac{km}{\ell^2} \pm \frac{km}{\ell^2}\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

$\eta = \ell^2/km$

$$\rightarrow \begin{cases} r_{min} = \dfrac{\eta}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}} \\[2ex] r_{max} = \dfrac{\eta}{1 - \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}} \end{cases}$$

$\leftarrow$ qta sol. è accettabile solo quando $\frac{2E\ell^2}{mk^2} < 0$.

- r_{min} è il valore di $r(\theta)$ minimo al variare di θ:

$$r_{min} = \min_{\theta}\left(\frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\right) = \frac{\eta}{1 + e}$$

$$\Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

$\leftarrow$ e è l'eccentricità della conica:

$0 \leq e < 1 \;\rightarrow$ ELLISSE $\;\leftarrow\;$ $E < 0$

$e = 1 \;\rightarrow$ PARABOLA $\;\leftarrow\;$ $E = 0$

$e > 1 \;\rightarrow$ IPERBOLE $\;\leftarrow\;$ $E > 0$