Prop. Per un moto centrale con $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k>0$, le ORBITE sono CONICHE con FUOCO nell'ORIGINE (centro delle forze) di ep.

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}}$$

con parametro η ed eccentricità e dati da

$$\eta = \frac{\ell^2}{mk} \qquad e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

Esse sono ellissi, parabole o iperboli per

$E<0$ $\qquad$ $E=0$ $\qquad$ $E>0$

Torniamo al problema ridotto 1dim.

La Lagrangiana è $\quad L_{eff} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 \underbrace{-V(r)-\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{-V_{eff}(r)}$

Si vede subito che l'Energia è una COSTANTE DEL MOTO, cioè il moto avviene su insieme di livello dato da r t.c.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \leftarrow \text{possiamo ricavare } \dot{r}$$

$$\rightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V_{eff}(r)\right)}$$

abbiamo scelto segno + davanti $\sqrt{\ }$ cioè la formula è valida per i pezzi di orbita dove $\dot{r}>0$.

integriamo

$$\Rightarrow \quad t = t_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V_{eff}(r)\right)}} \quad \leftarrow \text{qta ci da una relazione tra } t \text{ ed } r$$

$$\Rightarrow \quad t(r) \xrightarrow{\text{invertendo la funzione}} r(t) \qquad (\bullet)$$

Ricordiamo che $\dot{\theta}(t) = \frac{\ell}{mr(t)^2}$ e che integrandolo otteniamo

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\ell \, dt'}{mr^2(t')}$$

inserendo qui $r(t)$ trovato in (o) otteniamo anche $\theta(t)$

→ Usando le cost. del moto E, possiamo trovare il moto $(r(t), \theta(t))$ risolvendo degli integrali ("per quadrature") e invertendo funzioni.

Una volta trovato $r(t)$, possiamo trovare $\theta(t)$ in un altro modo:

$$\frac{d\theta}{dr} = \dot{\theta} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}}$$

$$\hookrightarrow \theta(r) = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} \quad \leftarrow \quad \theta(t) = \theta(\underbrace{r(t)}_{})$$

↑ sol trovata in (o)

Consideriamo ora i moti con $E<0$ (orbite limitate nel piano)

– nel piano di fase sono curve chiuse –

– moto $r(t)$ è PERIODICO con periodo $T_r(\underbrace{E,\ell}_{})$

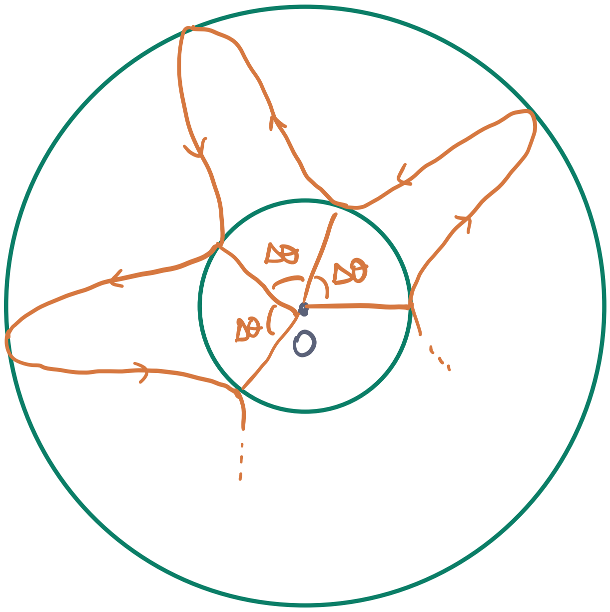
↑ dip. dai due parametri

– ogni periodo di r, in cui $r(t)$ va da r_{min} a r_{max} e ritorno, $\theta(t)$ avanza di una quantità

$$\Delta\theta = 2 \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

– θ è una variabile PERIODICA di periodo 2π

$\Rightarrow$ l'orbita nel piano è CHIUSA se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$



Se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$, prima o poi l'orbita si chiude. Altrimenti, il moto è detto "MOTO A ROSETTA" (orbita non-chiusa)

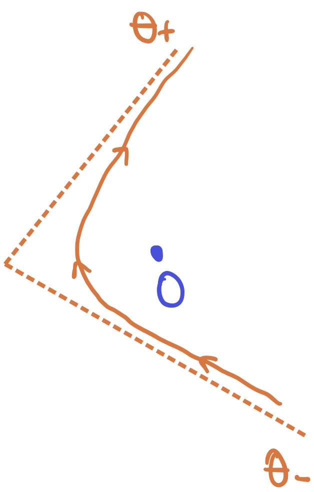
processo d'urto

Consideriamo adesso il caso $E>0$ (orbite illimitate)

$$r \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \infty \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \theta(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \theta_\pm \quad \text{cost.}$$

Una tipica domanda su un processo d'urto contro barriera di potenziale: saputo lo stato iniziale al tempo $t\to-\infty$ (cioè da che direzione arriva il corpo), qual è sarà lo stato finale al tempo $t\to+\infty$ (cioè direzione di uscita)?



$$\Delta\theta = \theta_+ - \theta_- = \frac{2\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

ANGOLO DI SCATTERING

CALCOLO DELL'ORBITA per quadrature

Ricaviamo le orbite con un altro metodo:

Utilizziamo $\Theta(r) = \Theta_0' + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$ per

calcolare le ORBITE per $V(r) = -\frac{K}{r}$, cioè

$$V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\eta}{K}}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{mK}{\ell^2}$$

$$\Theta(r) - \Theta_0' = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mK}{\ell^2 \rho} - \frac{1}{\rho^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \left(\frac{2}{\eta\rho} - \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\eta^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{1}{\eta^2}\left[\left(\frac{2E\eta}{K} + 1\right) - \left(\frac{\eta}{\rho} - 1\right)^2\right]}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{\eta \, d\rho}{\rho^2 \sqrt{e^2 - e^2\left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}} = \frac{\eta}{e} \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}}$$

$$w = \frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}$$

$$dw = -\frac{\eta \, d\rho}{e\rho^2}$$

Siccome $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, allora $\arcsin(x) = -\arccos(x) + \frac{\pi}{2}$

$$= -\int_{\frac{\eta}{er_0} - \frac{1}{e}}^{\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \underbrace{\arccos\left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}\right) + \text{cost.}}_{=\ \theta(r) - \theta_0'}$$

$$\Rightarrow \theta(r) = \arccos\left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}\right) + \underbrace{\theta_0' + \text{cost}}_{\theta_0}$$

invertiamo

$$\frac{\eta}{er(\theta)} - \frac{1}{e} = \cos(\theta - \theta_0)$$

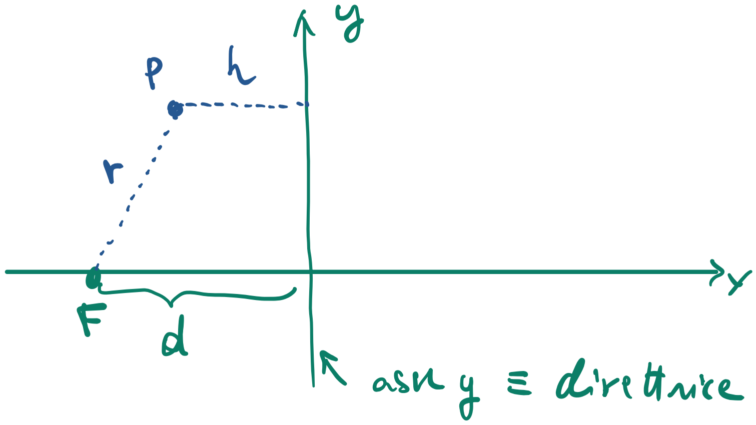
$$\Rightarrow \frac{\eta}{\cancel{e}\, r(\theta)} = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{\cancel{e}}$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

Coniche

Coniche: curve del piano date dal luogo dei pti P per cui è COSTANTE il RAPPORTO $\frac{r}{h}$ delle distanze r e h da un punto (FUOCO) e da una retta (DIRETTRICE); cioè

$$\frac{r}{h} = e \quad \text{con } e \text{ costante}$$



Chiamiamo $d \equiv \frac{\eta}{e}$ la distanza tra il FUOCO e la DIRETTRICE

Esprimiamo la relazione $\frac{r}{h} = e$ in coord cartesiane : $P = (x, y)$

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2} \qquad h = |x|$$

→ Eq. della conica : $r^2 = e^2 h^2$, cioè

$$(x+d)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

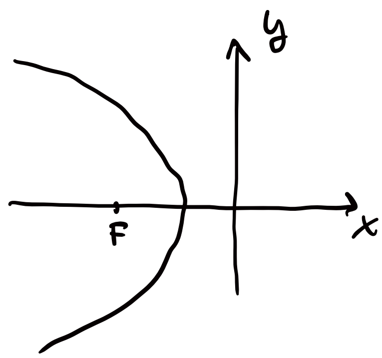
$$\downarrow$$

$$x^2 + 2dx + d^2 + y^2 - e^2 x^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x^2(1-e^2) + 2dx + y^2 = -d^2$$

- Se $e = 1 \longrightarrow x = -\frac{1}{2d} y^2 - \frac{1}{2} d$



- Se $e \neq 1 \longrightarrow x^2 + \frac{2d}{1-e^2} x + \frac{d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{d^2}{1-e^2} + \frac{d^2}{(1-e^2)^2}$

$$\underbrace{\left(x + \frac{d}{1-e^2}\right)}_{\equiv \tilde{x}}{}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\tilde{x}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{(ed)^2}{1-e^2}} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{(ed)^2}{1-e^2}} = 1$$

$\longleftarrow$ Se $e > 1 \rightsquigarrow$ IPERBOLE

Se $e < 1 \rightsquigarrow$ ELLISSE

Infatti l'eq. canonica per queste due coniche è $\quad (d \equiv \eta/e)$

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

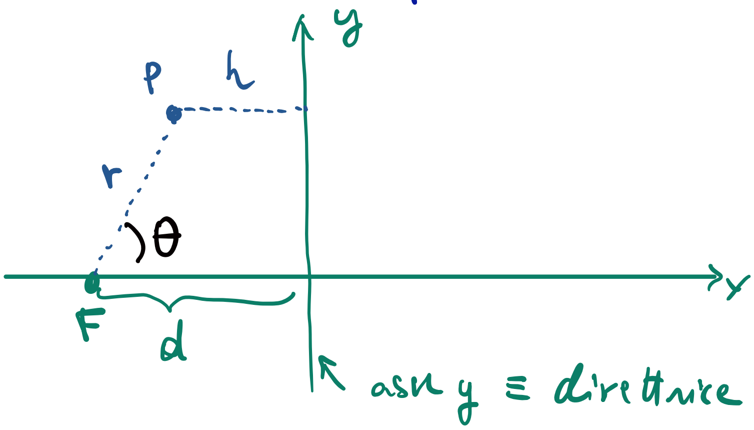
ELLISSE ($+$), IPERBOLE ($-$)

$$a = \frac{ed}{1-e^2} = \frac{\eta}{1-e^2} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{|1-e^2|}} = \frac{\eta}{\sqrt{|1-e^2|}}$$

Nel caso ELLISSE $a > b$ e $b^2 = \eta a$

Abbiamo visto che la definizione data per la CONICA riproduce le equazioni canoniche che danno tali luoghi dei pti in coord. cartesiane.

Vediamo ora che eq. otteniamo in coord. polari.



Innanzitutto: $h = d - r\cos\theta$

- Poniamo l'origine per le coord. polari nel FUOCO F.
- $h = d - r\cos\theta$
- L'equazione $\frac{r}{e} = h$ diventa

$$\frac{r}{e} = d - r\cos\theta \;\rightarrow\; r\left(\frac{1}{e} + \cos\theta\right) = \frac{\eta}{e}$$

$$\rightarrow \qquad r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta}$$

(Con le coord. come le abbiamo scelte, $\theta_0 = 0$.)

Leggi di Keplero

1) Pianeti si muovono descrivendo delle ellissi, con fuoco sul SOLE

2) $\bar{r}(t)$ (con origine nel Sole) descrive aree uguali in tempi uguali ($\Rightarrow$ velocità areolare è cost.)

3) Detto T il periodo di rivoluzione, T^2 è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

Abbiamo già dimostrato 1) e 2). Vediamo ora la 3).

Prop. Il periodo T del moto sulle ellissi è legato al semiasse maggiore a dalla relazione

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Dim. Usiamo la legge 2):

$$T = \frac{\text{area ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi a b}{\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}} = \frac{\pi a b}{\ell/2m}$$

$\downarrow$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m^2\pi^2 \cancel{a^2}\, \overbrace{b^2}^{=\eta a}}{\ell^2 a^{\cancel{3}}} = \frac{4m^2\pi^2 \eta}{\ell^2} = \frac{4 m^{\cancel{2}} \pi^2}{\cancel{\ell^2}} \, \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{m}K} = \frac{4\pi^2 m}{K} \quad //$$

Se ora scrivessimo $K = G m M_s$ con m la massa del pianeta e M_s la massa del Sole, allora concluderemmo

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_s} a^3$$

cioè T indip. dalla massa del pianeta (Keplero)

In realtà $K = G m_p M_s$, mentre $\underset{\text{massa ridotta}}{m} = \frac{m_p M_s}{m_p + M_s} \neq m_p$

Quindi

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \frac{4\pi^2 m_p M_s}{m_p + M_s} \cdot \frac{1}{G m_p M_s} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{G M_s} \frac{1}{1 + \frac{m_p}{M_s}}$$

Nel caso reale $m_p \ll M_s$ e possiamo espandere

$$\frac{T^2}{a^3} \simeq \frac{4\pi^2}{G M_s} \left(1 - \underset{\uparrow}{\frac{m_p}{M_s}} + \dots \right)$$

trascurabile (invisibile a Keplero).