

**Università di Trieste**  
**Dipartimento di Ingegneria e Architettura**

**Corso di**  
**Tecnica delle Costruzioni**

**TAGLIO**

**Prof. Ing. Natalino Gattesco**  
**Dott. Ing. Ingrid Boem**

**BIBLIOGRAFIA**

**Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.**

**Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.**

**Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Prentice Hall, New Jersey, 1988.**

**Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.**

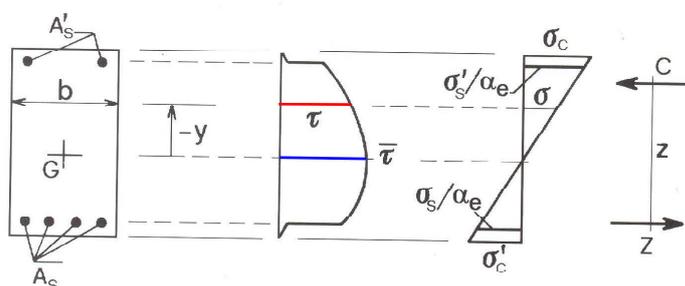
## COMPORAMENTO A TAGLIO DELLE TRAVI

Per lo sforzo di taglio il comportamento delle travi in c.a. evidenzia le maggiori diversità rispetto a quello del solido di de Saint Venant.

Come si vedrà nel seguito, si utilizzano modelli più articolati come:

- il traliccio di Mörsch
- il funzionamento a pettine
- il comportamento ad arco
- gli schemi a puntoni e tiranti

Applicando la nota formula di Jourawski alla sezione interamente reagente si ha:



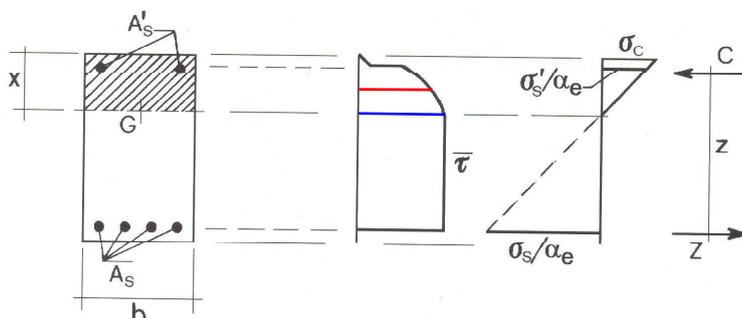
$$\tau = \frac{V S_i}{I_i b}$$

$$\bar{\tau} = \frac{V \bar{S}_i}{I_i b} = \frac{V}{z b} \quad z = \frac{I_i}{\bar{S}_i}$$

$I_i$  Mom. Inerzia sez. ideale  
 $\bar{S}_i$  Mom. statico della parte compressa della sezione omogeneizzata

## COMPORAMENTO A TAGLIO DELLE TRAVI

Nel caso di sezione fessurata, la stessa formula di Jourawski, riferita alla sezione reagente parzializzata, porta a diagrammi come quello di figura, dove si nota come la tensione tangenziale rimanga costante su tutta la zona fessurata di calcestruzzo



$$\tau = \frac{V S_i}{I_i b}$$

$$\bar{\tau} = \frac{V \bar{S}_i}{I_i b} = \frac{V}{z b}$$

$$z = \frac{I_i}{\bar{S}_i}$$

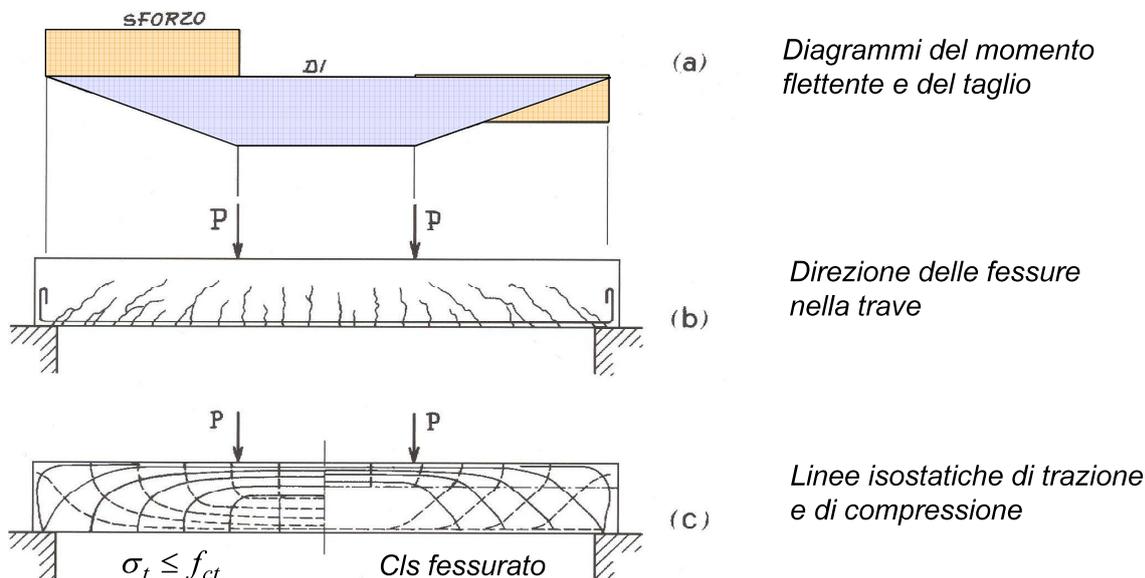
$I_i$  Mom. Inerzia della sezione parzializzata

$\bar{S}_i$  Mom. statico della parte compressa della sezione omogeneizzata

## COMPORAMENTO A TAGLIO DELLE TRAVI

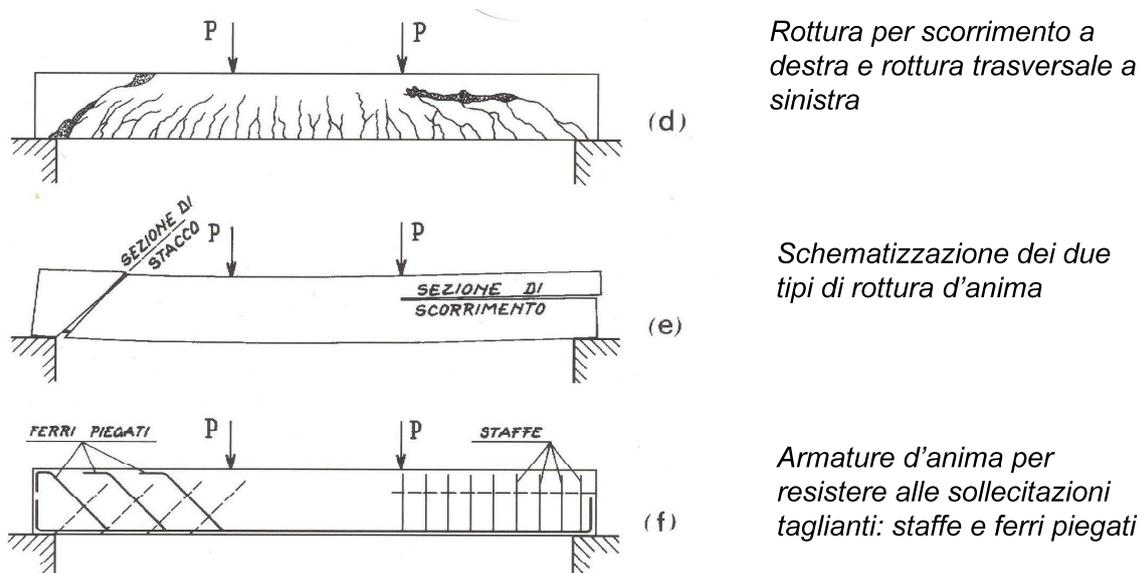
In realtà se si trascura la resistenza a trazione del calcestruzzo non è possibile l'esistenza di pure tensioni tangenziali.

Per chiarire le cose, si consideri il comportamento della trave di figura soggetta a carichi via via crescenti.



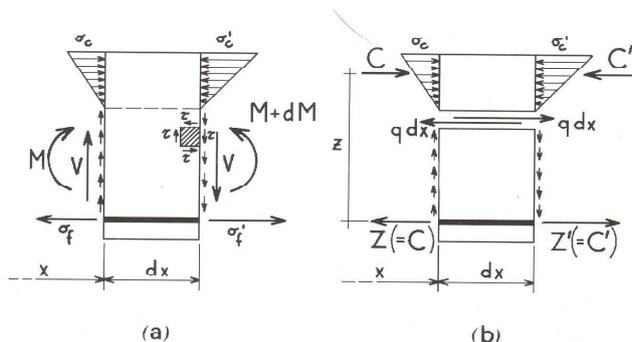
## COMPORAMENTO A TAGLIO DELLE TRAVI

Aumentando ancora il carico la fessurazione si estende fino al raggiungimento della rottura, che può avvenire per rottura trasversale o per scorrimento.



# FORZA DI SCORRIMENTO

Si consideri un elemento infinitesimo di trave soggetto a un momento  $M$  e un taglio  $V$ . Tra variazione del momento e taglio si ha:



$$\frac{dM}{dx} = V$$

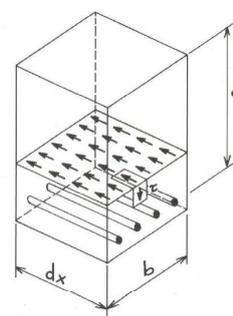
Le tensioni nel caso di trave fessurata sono indicate come in figura

Si scriva ora l'equilibrio alla traslazione del concio di figura b

$$q dx = C' - C = Z' - Z = \frac{dM}{z} = \frac{V}{z} dx$$

$$q = \tau b$$

$q$  = forza di scorrimento unitaria.

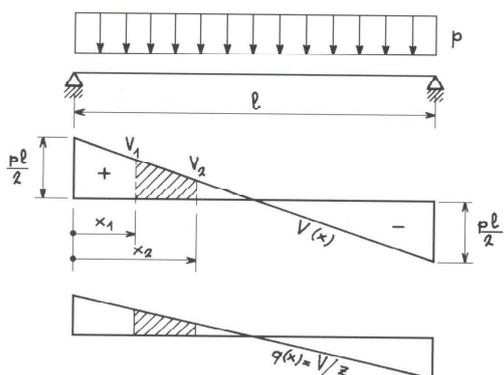


# ARMATURE PER IL TAGLIO

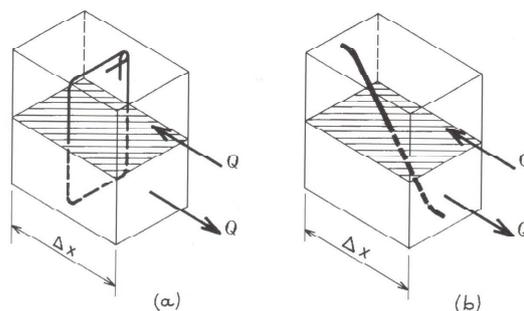
Le armature al taglio, staffe e ferri piegati, vengono distribuite con una certa spaziatura lungo la trave. Ad ognuna di esse compete un tratto di lunghezza finita, compete cioè una quota di forza di scorrimento definita da

$$Q = \int_x^{x+\Delta x} q dx = \int_x^{x+\Delta x} (V/z) dx$$

Per le verifiche si tratterà quindi di valutare porzioni d'area del diagramma dello scorrimento unitario  $q$ , ovvero, per  $z \sim \cos t$ , porzioni d'area del diagramma del taglio per la quale si ha, tra  $x_1$  e  $x_2$

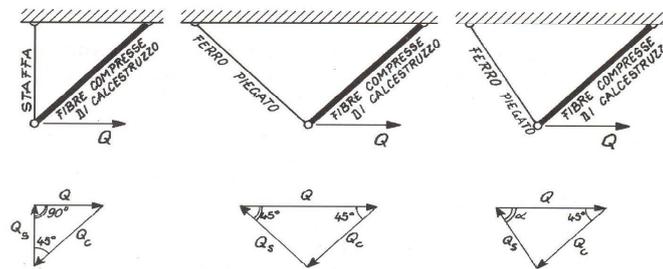
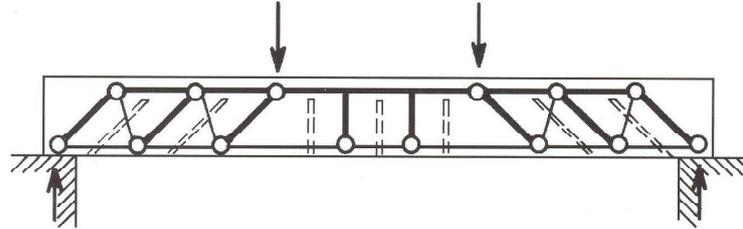


$$Q = \frac{(x_2 - x_1)(V_1 + V_2)/2}{z}$$



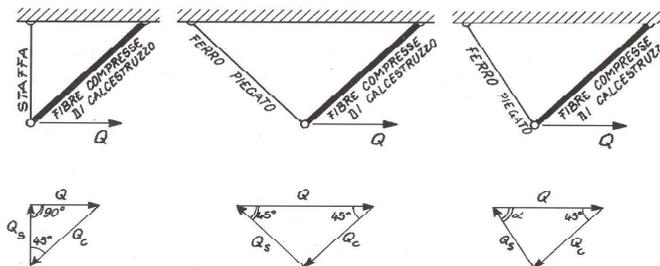
# IL TRALICCIO DI MÖRSCH

Il modello fondamentale di resistenza al taglio della trave in c.a. è stato dedotto dal suo comportamento fessurativo e vede la trave come una struttura reticolare costituita da un corrente compresso (il calcestruzzo reagente a flessione e le eventuali armature compresse), da un corrente teso (l'armatura reagente a flessione) e da un reticolo di aste di parete (conci compressi di cls isolati da fessure a 45° e armature trasversali tese –staffe o ferri piegati)



Schemi per il dimensionamento delle armature d'anima

# IL TRALICCIO DI MÖRSCH



Schemi per il dimensionamento delle armature d'anima

Considerando il caso con armatura di inclinazione generica si ha:

$$\begin{cases} Q_s \cos \alpha + Q_c / \sqrt{2} = Q \\ Q_s \sin \alpha - Q_c / \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$Q_s$  forza di trazione nell'acciaio

$Q_c$  forza di compressione nel calcestruzzo

$$Q_s = \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha} Q$$

$$Q_c = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} Q$$

Per staffe verticali

$$\begin{aligned} Q_s &= Q \\ Q_c &= \sqrt{2} Q \end{aligned}$$

Per ferri piegati a 45°

$$Q_s = Q_c = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

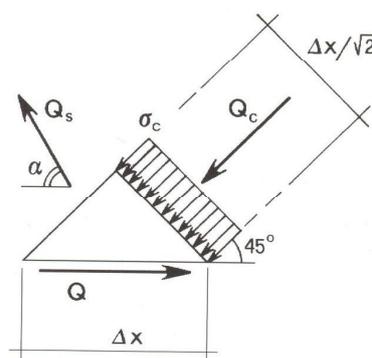
## VERIFICHE DI RESISTENZA

**Il traliccio di Mörsh rappresenta il modello isostatico che permette di verificare la resistenza al taglio di travi provviste di apposite armature senza fare alcun affidamento sulla resistenza a trazione del calcestruzzo.**

Le tensioni che sollecitano le armature trasversali e le bielle di calcestruzzo (di spessore  $b$ ) sono

$$\sigma_s = \frac{Q_s}{A_{st}}$$

$$\sigma_c = \frac{Q_c}{b\Delta x/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}q_c}{b}$$



## VERIFICHE DI RESISTENZA

Viceversa si possono valutare le capacità portanti del concio di trave in base alla resistenza dei materiali. Si ottiene quindi un taglio trazione come quello ultimo compatibile con la resistenza dell'armatura

$$V_{yd} = \frac{zQ}{\Delta x} = \frac{zQ_s}{\Delta x} (\cos \alpha + \sin \alpha) \quad \text{per } \sigma_s = f_{yd} \quad (Q_s = A_s f_{yd})$$

$$V_{yd} = z a_s f_{yd} (\cos \alpha + \sin \alpha) \quad \text{con } a_s = A_s / \Delta x$$

Si ottiene un taglio compressione come quello ultimo compatibile con la resistenza del calcestruzzo d'anima

$$V_{cd} = \frac{zQ}{\Delta x} = \frac{zQ_c}{\Delta x} \frac{(1 + \operatorname{ctg} \alpha)}{\sqrt{2}} \quad \text{per } \sigma_c = f_{c2} \quad (Q_c = f_{c2} b \Delta x / \sqrt{2})$$

$$V_{cd} = z b f_{c2} \frac{(1 + \operatorname{ctg} \alpha)}{2} \quad \text{con } f_{c2} = 0.5 f_{cd}$$

La resistenza ridotta del calcestruzzo delle bielle è per tener conto della presenza di trazioni trasversali alla biella (*armature d'anima tese*)

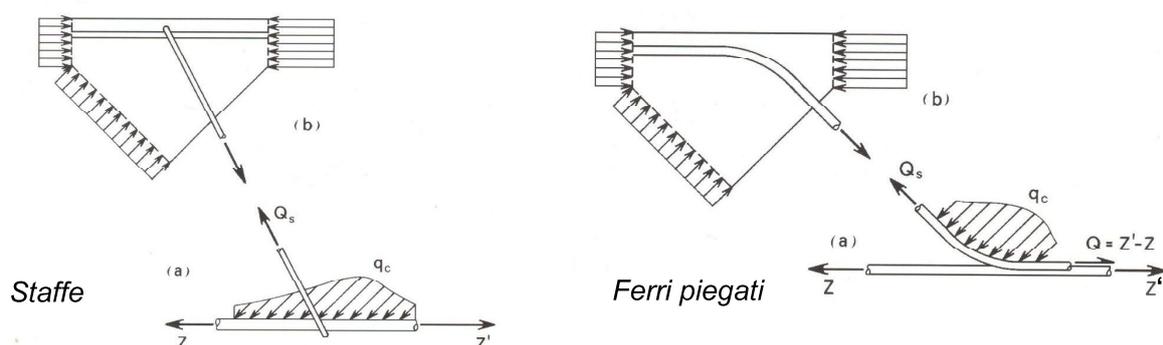
## VERIFICHE DI RESISTENZA

Nel modello a traliccio isostatico la capacità portante è quella corrispondente alla resistenza del suo elemento più debole

$$V_{Rd} = \min(V_{yd}, V_{cd})$$

Queste formule sono notevolmente approssimate a favore della stabilità, perché trascurano alcuni rilevanti contributi che vanno discussi nel seguito.

Per assicurare il funzionamento del modello a traliccio è necessario che i nodi della reticolare siano efficacemente collegati



## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

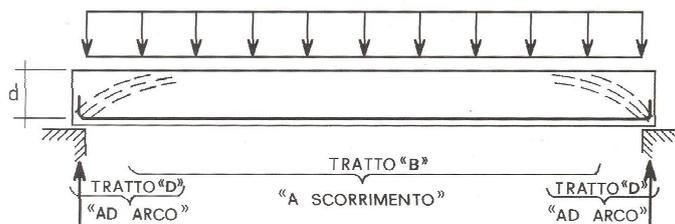
Sulla base di quanto affermato si giunge alle seguenti conclusioni:

- Non vi può essere resistenza a taglio se non ci sono armature d'anima
- Il modello di calcolo di tali armature si basa sul traliccio di Mörsch

In realtà queste conclusioni vengono superate dai più moderni sviluppi della teoria. Difatti, già da molto tempo si utilizzano elementi soggetti a flessione e taglio senza armature trasversali (es. solai, ecc)

La sperimentazione infatti mostra che si hanno diversi contributi resistenti:

- Effetto pettine
- Effetto spinotto
- Effetto ingranamento
- Compressione assiale



I modelli che si andranno a considerare per questi effetti sono affidabili nei tratti di trave funzionanti a scorrimento, lontano dagli appoggi, dove invece si ha un meccanismo ad arco.

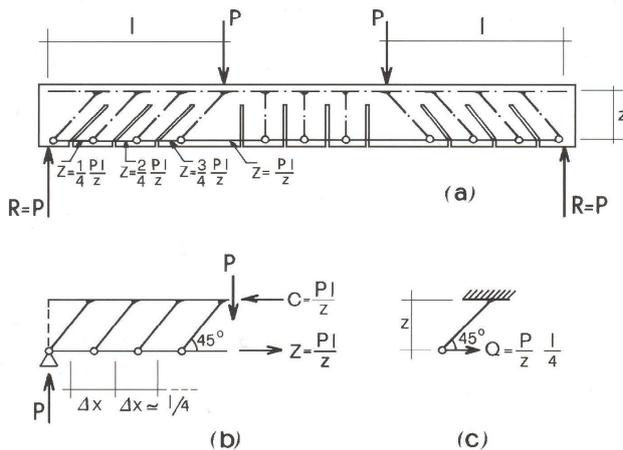
# TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

## Funzionamento a pettine

Per una trave non armata al taglio, supposta fessurata da momento, può assumersi uno schema di funzionamento come quello di figura.

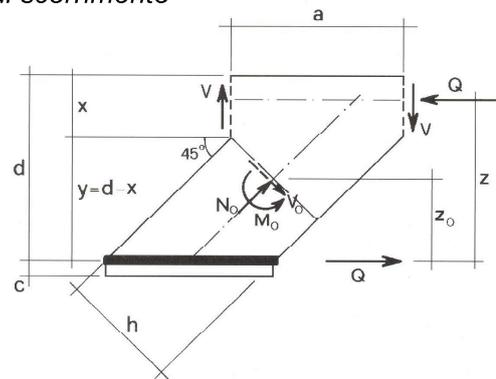
Il funzionamento a pettine dipende dalla resistenza delle sezioni

- Quella di incastro del dente di calcestruzzo, soggetta a  $N_o$  e  $M_o$
- Quella del corrente compresso in corrispondenza della fessura che deve trasmettere lo sforzo di taglio  $V$  assieme alla forza longitudinale  $C=M/z$



Variazione forza di scorrimento

$$Q = Va / z$$



# TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

## Funzionamento a pettine – incastro del dente di calcestruzzo

Trattando in via approssimata il concio inclinato con le formule di verifica delle travi inflesse interamente reagenti si ha:

$$M_o = Q z_o \quad N_o = Q / \sqrt{2}$$

La massima tensione di trazione nella sezione di incastro è

$$\sigma_t = \frac{6 M_o}{b h^2} - \frac{N_o}{b h} \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$z_o = y - \frac{a}{4}$$

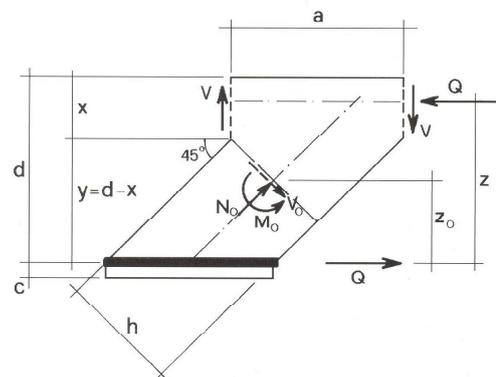
Sostituendo si ottiene

$$\sigma_t = 4 \frac{Q}{b a} \left( \frac{3 y}{a} - 1 \right)$$

Uguagliando  $\sigma_t = \beta f_{ctd} \quad \beta \cong 1.6$

$$V_{Rd} = \frac{Q_{Rd}}{a} z = \beta f_{ctd} b z \frac{0.25}{3 y/a - 1}$$

$$a \cong 1.25 y \quad (\cong d \text{ per } y \cong 0.8 d) \quad z \cong 0.9 d$$

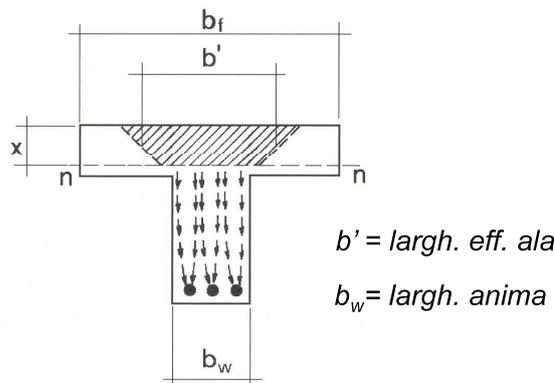
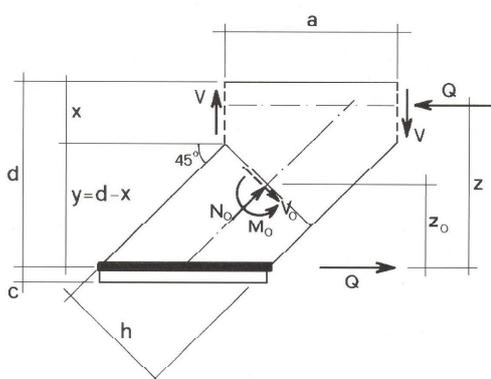


$$V_{Rd} \cong 0.25 f_{ctd} b d$$

## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

Funzionamento a pettine – corrente compresso soggetto a taglio

Il taglio deve essere sopportato dalle sezioni di corrente compresso



$b' = \text{largh. eff. ala}$

$b_w = \text{largh. anima}$

Nelle sezioni rettang. soggette a flessione semplice con  $x/d > 0.16$ , la verifica sul dente garantisce anche la verifica del corrente compr.

Nelle sezioni a T soggette a flessione semplice, la verifica sul dente va corretta con un coefficiente riduttivo per la verifica del corrente

$$\psi = \frac{1.6 b' x}{0.28 b_w z} \frac{b'}{b_w} \frac{5.71 x/d}{1 - 0.5 x/d} \leq 1$$

$$\psi = 0 \quad \text{per} \quad x/d = 0$$

Sezione tensoinflessa

## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

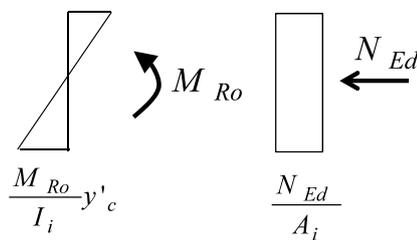
### Compressione assiale

Se l'elemento è soggetto a pressoflessione e taglio, la componente di compressione va ad aumentare la resistenza a taglio.

Si può intervenire con un coefficiente maggiore dell'unità che è funzione dell'azione assiale

$$\delta = 1 + \frac{M_{Ro}}{M_{Ed}} \quad (1 \leq \delta \leq 2)$$

$$\frac{M_{Ro}}{I_i} y'_c = \frac{N_{Ed}}{A_i}$$



$$V_{Rd} \cong 0.25 f_{ctd} b d \delta$$

Momento di decompressione

## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

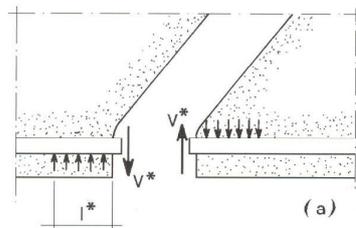
### Effetto spinotto

L'armatura longitudinale che attraversa la fessura è in grado di trasferire una certa quota del taglio. Tale contributo si valuta sulla base dello sfondamento dello strato di ricoprimento.

$$V^* = n l^* \phi \sigma^* = \frac{20}{\pi} \left( n \frac{\pi \phi^2}{4} \right) \sigma^* \quad l^* = 5\phi$$

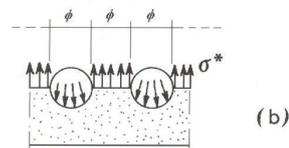
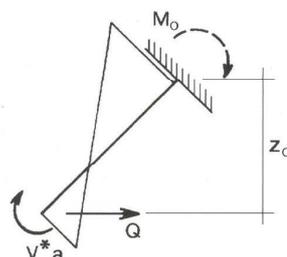
Ponendo  $\sigma^* = f_{ctd}$   $A_s = \frac{n \pi \phi^2}{4}$

$$V^* \cong 6.5 A_s f_{ctd}$$



Sul concio si ha a livello dell'armatura un momento opposto a quello dell'azione flessionale per cui

$$M_o = Q z_o - V^* a$$



## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

### Effetto spinotto

Scrivendo l'equazione di equilibrio a pressoflessione del concio si ha

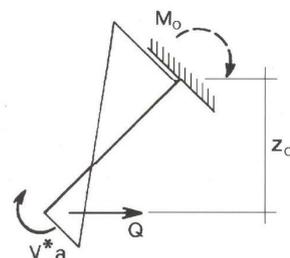
$$\sigma_t = \frac{6 M_o}{b h^2} - \frac{N_o}{b h} = \beta f_{ctd} \quad M_o = Q z_o - V^* a$$

Da cui si ricava, sostituendo le espressioni dei vari parametri.

$$V_{Rd} = \frac{Q_{Rd}}{a} z = \beta f_{ctd} b z \frac{0.25}{3 y/a - 1} \left[ 1 + \frac{78 A_s}{\beta b a} \right]$$

Con  $\beta \cong 1.6$  e  $a \cong d$  si ottiene

$$V_{Rd} \cong 0.25 f_{ctd} b d [1 + 50 \rho_s] \delta$$



$$\rho_s = \frac{A_s}{b d}$$

$$z \cong 0.9 d$$

## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

### Effetto ingranamento aggregati (*aggregate interlocking*)

Questo effetto è dovuto alla scabrosità delle superfici che si fronteggiano all'interno della fessura. Per la presenza della forza di scorrimento  $Q$  si attiva uno scorrimento relativo fra le superfici della fessura che però è contrastato dall'ingranamento degli aggregati.

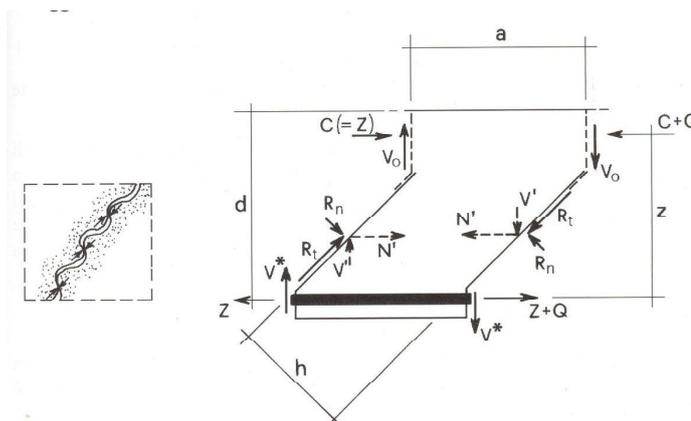
Si forma quindi una forza reattiva parallela alla fessura  $R_t$  e naturalmente una perpendicolare  $R_n$ . Scomponendo queste forze in direzione verticale e orizzontale si ottengono le forze  $N'$  e  $V'$ .

Si può quindi calcolare il momento di incastro del dente come

$$M_o = Q z_o - V^* a - V' a$$

Dai risultati sperimentali si è calibrato il coeff. forfettario

$$\kappa = 1.6 - d$$



## TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

### Relazione finale

Quanto visto aveva lo scopo di far comprendere i meccanismi resistenti ed ha condotto ad una quantificazione della resistenza a taglio di travi senza armatura d'anima.

$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} b d \kappa [1 + 50 \rho_s] \delta$$

Nelle più recenti normative viene fornita una relazione dedotta per via empirica sulla base di numerose prove sperimentali.

$$V_{Rd} = 0.18 b d \kappa \frac{(100 \rho_s f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c} + 0.15 b d \sigma_c$$

Con un minimo

$$V_{Rd} \geq b d v_{\min} + 0.15 b d \sigma_c$$

$$\kappa = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0$$

$$\sigma_c = \frac{N_{Ed}}{A_c}$$

$$v_{\min} = 0.035 \kappa^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

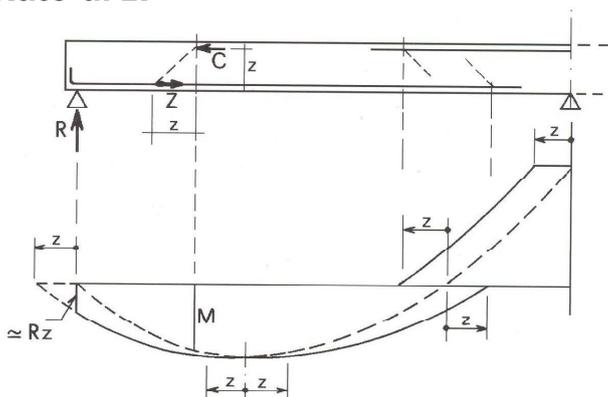
# TRAVI SENZA ARMATURA A TAGLIO

## Traslazione del diagramma dei momenti

Il funzionamento a pettine ha una conseguenza anche sulla distribuzione delle sollecitazioni dovute al momento flettente.

Coerentemente con l'inclinazione a  $45^\circ$  dei denti, attraverso i quali è trasmessa la forza di scorrimento  $Q$ , la diminuzione delle trazioni flessionali nell'armatura avviene con un ritardo di  $z$  rispetto alla diminuzione della compressione nel calcestruzzo.

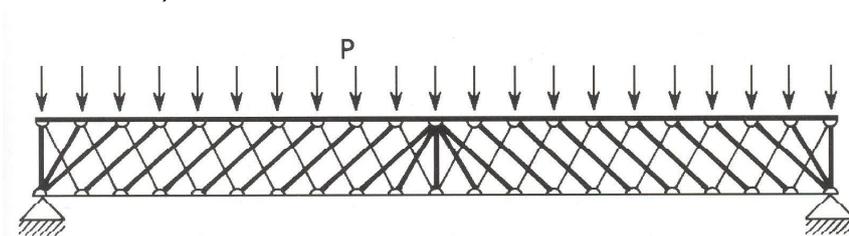
Tener conto di questo fatto è come far riferimento ad un diagramma di momento traslato di  $z$ .



# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traliccio isostatico

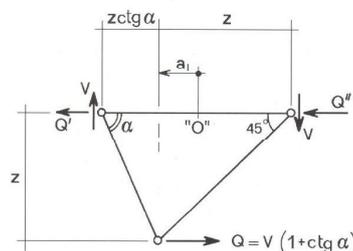
Viene riproposto il modello a traliccio isostatico visto in precedenza (*traliccio di Mörser*).



E' facile intuire che anche con il funzionamento a traliccio è necessario traslare il diagramma dei momenti. L'entità della traslazione dipende dall'inclinazione delle barre di armatura d'anima, restando le bielle compresse sempre inclinate a  $45^\circ$ .

In generale, quindi, si fa riferimento ad un modulo di lunghezza

$$z(1 + \operatorname{ctg} \alpha)$$



# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traslazione del momento

Per l'equilibrio dei due nodi superiori si ha:

$$Q' = V \operatorname{ctg} \alpha$$

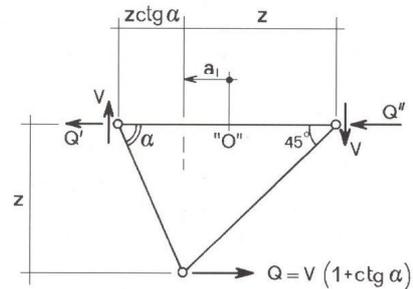
$$Q'' = V$$

Pensando alla continuità strutturale, si può riferire la forza di scorrimento globale  $Q=Q'+Q''$  al punto di mezzo O dell'asta superiore ottenendo così

$$a_l = \frac{1}{2} z (1 + \operatorname{ctg} \alpha) - z \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} z (1 - \operatorname{ctg} \alpha)$$

Per le staffe ( $\alpha=90^\circ$ ) si ha  $a_l = \frac{1}{2} z$

Per ferri piegati ( $\alpha=45^\circ$ ) si ha  $a_l = 0$



# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Spaziatura dei ferri

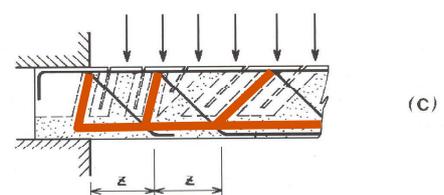
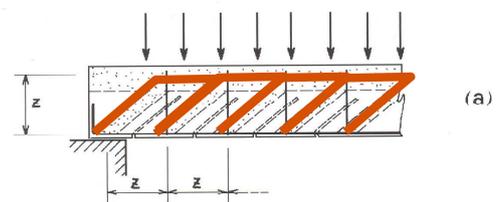
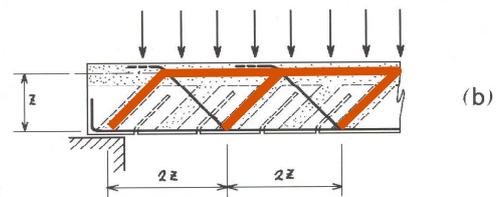
Per garantire il corretto funzionamento delle travi dimensionate secondo il modello del traliccio isostatico e favorire il trasferimento dei carichi agli appoggi.

Per ferri piegati ( $\alpha=45^\circ$ ) si ha  $s = 2z$

Per staffe ( $\alpha=90^\circ$ ) si ha  $s = z$

Per ferri piegati ( $\alpha$ ) si ha  $s = z (1 + \operatorname{ctg} \alpha)$

Per ferri piegati ( $\alpha=45^\circ$ ) in prossimità di appoggi di continuità si ha  $s = z$



In quanto per l'elevato momento le fessure sono quasi verticali quindi puntoni verticali.

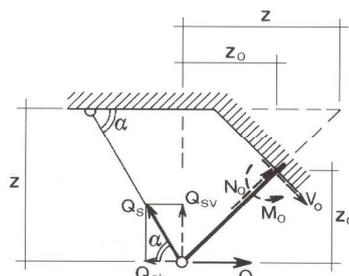
# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traliccio iperstatico

In realtà il traliccio isostatico conduce ad eccessivi dimensionamenti dell'armatura trasversale d'anima. Il modello va quindi perfezionato aggiungendo il contributo della resistenza a trazione del calcestruzzo così come fatto per le travi non armate a taglio.

Quindi si tratta di considerare un modello che includa il traliccio isostatico sovrapposto al meccanismo a pettine.

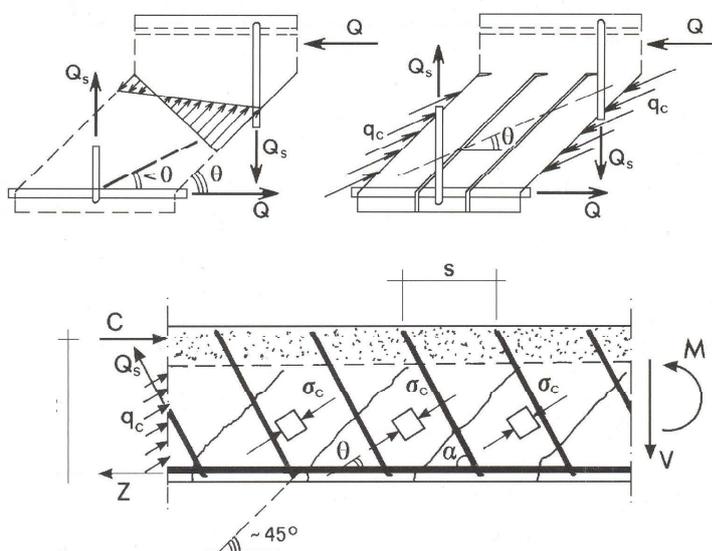
Ma questo porta ad un traliccio iperstatico, che comunque con le opportune ipotesi può essere analizzato con semplici equilibri di forze.



# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traliccio con puntone a inclinazione variabile

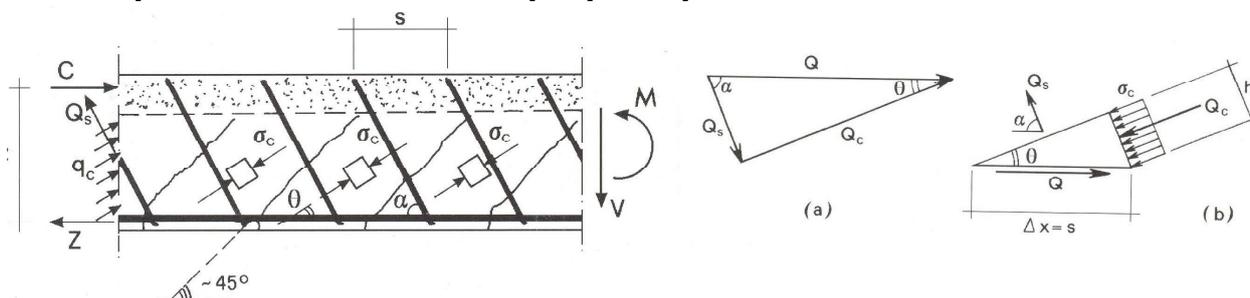
L'attuale metodo, però, si basa ancora sul traliccio isostatico e si tiene conto di questo contributo aggiuntivo modificando l'inclinazione della biella di calcestruzzo (*metodo del puntone a inclinazione variabile*).



# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traliccio con puntone a inclinazione variabile

Gli equilibri al nodo vanno riproposti per la nuova inclinazione  $\vartheta$



$$\begin{cases} Q_s \cos \alpha + Q_c \cos \vartheta = Q \\ Q_s \sin \alpha - Q_c \sin \vartheta = 0 \end{cases}$$

$Q_s$  forza di trazione nell'acciaio

$Q_c$  forza di compressione nel calcestruzzo

$$Q = Q_c \sin \vartheta (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

$$Q = Q_s \sin \alpha (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

# TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

## Traliccio con puntone a inclinazione variabile

Il taglio resistente si può ricavare imponendo i valori max per  $Q_s$  e  $Q_c$

$$Q = Q_c \sin \vartheta (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

$$Q = Q_s \sin \alpha (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

### Resistenza a "taglio-trazione"

$$V_{sd} = \frac{Qz}{s} = \frac{A_s}{s} z f_{yd} \sin \alpha (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

Avendo posto  $Q_s = f_{yd} A_s$

$s$  passo delle staffe

### Resistenza a "taglio-compressione"

$$V_{cd} = \frac{Qz}{s} = b z f_{c2} \sin^2 \vartheta (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

Con  $Q_c = \sigma_c b h = b s f_{c2} \sin \vartheta$

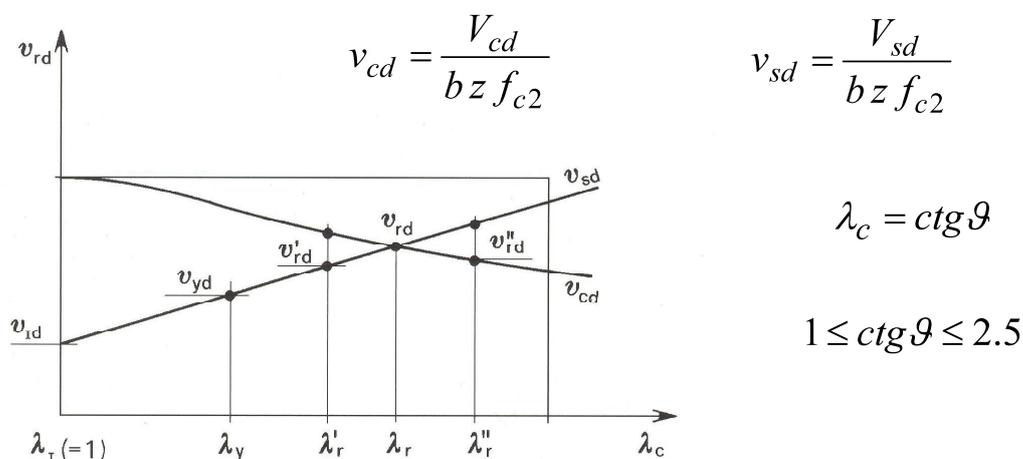
Secondo questo modello la prevalenza di una resistenza sull'altra dipende dall'orientamento  $\vartheta$  assunto per le compressioni d'anima.

$f_{c2}$  resistenza a compressione del calcestruzzo del puntone ( $0.5 f_{cd}$ )

## TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

### Traliccio con puntone a inclinazione variabile

Si evidenzia come variano i tagli resistenti al variare di  $ctg \vartheta$ .



Nel campo delle deboli armature  $ctg \vartheta$  tende verso il valore massimo.

Nel campo delle forti armature  $ctg \vartheta$  tende verso il valore minimo (1.0).

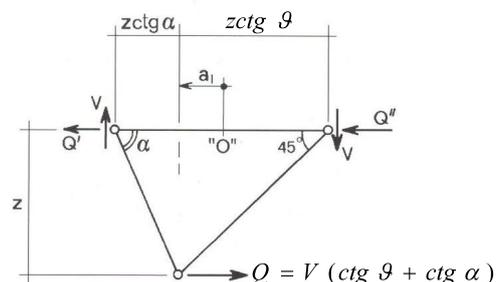
## TRAVI CON ARMATURA A TAGLIO

### Traslazione del diagramma dei momenti

Si deve tener conto che il puntone di cls è inclinato  $\vartheta$  e non  $45^\circ$ .

Si fa riferimento ad un modulo di lunghezza

$$z(ctg \vartheta + ctg \alpha)$$



Operando come nel caso di  $\vartheta=45^\circ$  si ricava:

$$a_1 = \frac{1}{2} z (ctg \vartheta + ctg \alpha) - z ctg \alpha = \frac{1}{2} z (ctg \vartheta - ctg \alpha)$$

Per le staffe ( $\alpha=90^\circ$ ) si ha 
$$a_1 = \frac{1}{2} z ctg \vartheta$$

Per ferri piegati ( $\alpha=45^\circ$ ) si ha 
$$a_1 = \frac{1}{2} z (ctg \vartheta - 1)$$