

Elementi di Matematica Finanziaria

Paolo Rosato

Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura

Piazzale Europa 1 - 34127 Trieste. Italia

Tel: +39-040-5583569. Fax: +39-040-55835 80

E-mail: paolo.rosato@dia.units.it

La Matematica Finanziaria

La matematica finanziaria è lo strumento operativo per analizzare le operazioni economico-finanziarie, intese come le operazioni che hanno per oggetto l'impiego di uno o più capitali monetari o riconducibili al metro monetario

Essa fornisce gli strumenti per:

- Confrontare fatti economici e finanziari che avvengono in momenti diversi;
- Stimare il valore capitale di flussi di redditi futuri (rendite);
- Stimare il valore attuale di un credito futuro;
- Stimare il valore futuro di un investimento attuale;
- Determinare l'ammontare della rata di un mutuo;
- Stimare l'ammontare di interessi su debito;
- Ecc.

Le Prestazioni Finanziarie

- Le **prestazioni finanziarie** sono rappresentate da flussi di costo e di ricavo.
- Perché una prestazione finanziaria sia definita univocamente dobbiamo conoscerne:
 - **l'ammontare;**
 - **la scadenza.**

L'Interesse

L'interesse è il **prezzo d'uso del capitale** e si esprime con saggio/tasso.

- Il saggio (tasso) d'interesse (r) può essere espresso in **termini percentuali** ($r = 5\%$) o in termini unitari ($r = 0,05$). **L'interesse unitario** è l'interesse maturato da una unità di moneta in una unità di tempo (anno).
- Il saggio di interesse è **direttamente proporzionale al rischio** (ad un rischio maggiore corrisponde un maggiore tasso di interesse).

Il Montante

- Il montante (M o C_n) è la somma del capitale iniziale (C_0) e dei relativi interessi (I) maturati in un certo periodo di tempo (n).
- Il montante unitario (q) è la somma fra un capitale iniziale pari a 1 e degli interessi maturati in un anno:

$$C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 (1 + r) = C_0 q$$

$$(es. $r = 0,05$ $q = 1,05$).$$

Interesse semplice e composto

L'interesse semplice

- gli interessi maturati non producono a loro volta altri interessi (nella pratica si usa quando si considera un periodo di tempo uguale o inferiore ad 1 anno o quando è previsto per legge).

L'interesse composto

- gli interessi maturati maturano a loro volta altri interessi (si usa quando si considera un periodo di tempo superiore ad 1 anno).

Interesse semplice: periodo uguale all'anno

- Interesse $I = C_0 r$
- Montante $C_1 = C_0 q$
- Valore scontato $C_0 = C_1 q^{-1}$

La somma di 1.000 € viene depositata in banca al saggio di interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare: a) degli interessi dopo un anno; b) del montante dopo un anno.

$$I = C_0 r = 1.000 \times 0,05 = 50 \text{ €}$$

$$C_1 = C_0 + I = C_0 (1+r) = C_0 q = 1.000 \times 1.05 = 1.050 \text{ €}$$

Interesse semplice: periodo inferiore all'anno

La durata viene indicata come **frazione di anno**: $n = \text{gg}/365$

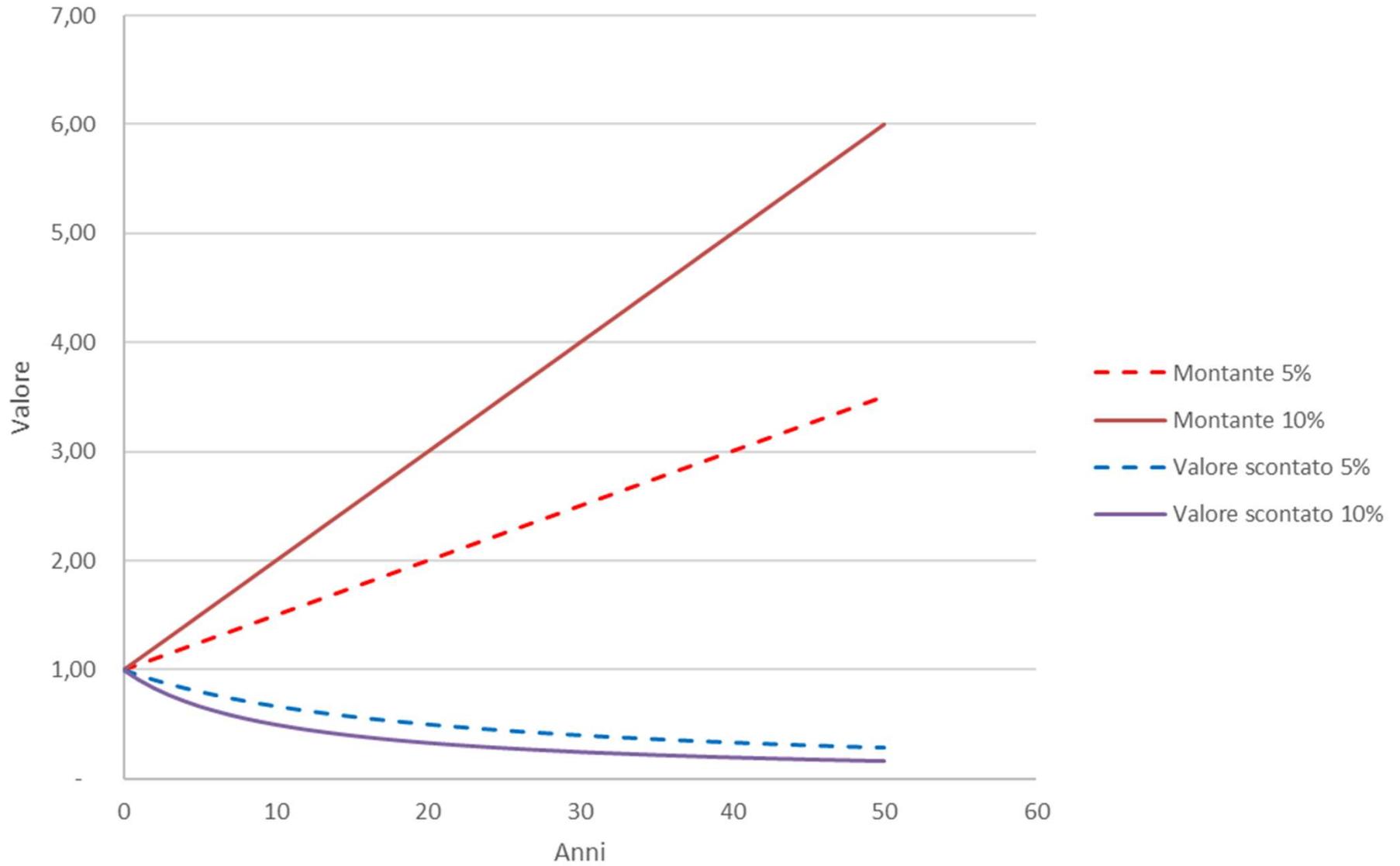
- Interesse $I = C_0 r n$
- Montante $C_n = C_0 (1 + r n)$
- Valore scontato $C_0 = C_n (1 + r n)^{-1}$

La somma di 1.000 € viene depositata in banca per 90 giorni all'interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare: a) degli **interessi**; b) del **montante**.

$$I = C_0 r n = 1.000 \times 0,05 \times (90 / 365) = 12,39 \text{ €}.$$

$$C_n = C_0 + C_0 r n = C_0 (1 + r n) = 1.012,39 \text{ €}.$$

Regime interesse semplice



Interesse composto: la determinazione del montante dopo n anni:

Dopo 1 anno: $C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 (1+r)$

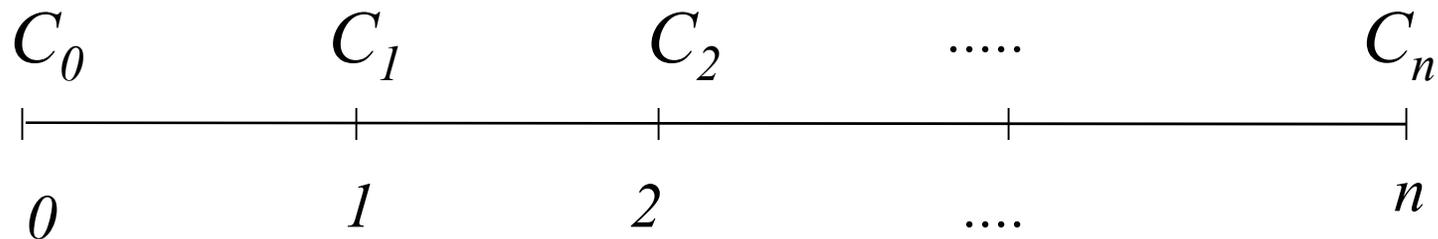
Dopo 2 anni: $C_2 = C_1 + C_1 r = C_1 (1+r)$

$$C_2 = C_0 (1+r) (1+r)$$

$$C_2 = C_0 q^2$$

Quindi: $C_n = C_0 q^n$

$$C_0 = C_n q^{-n}$$



Interesse composto: esempio

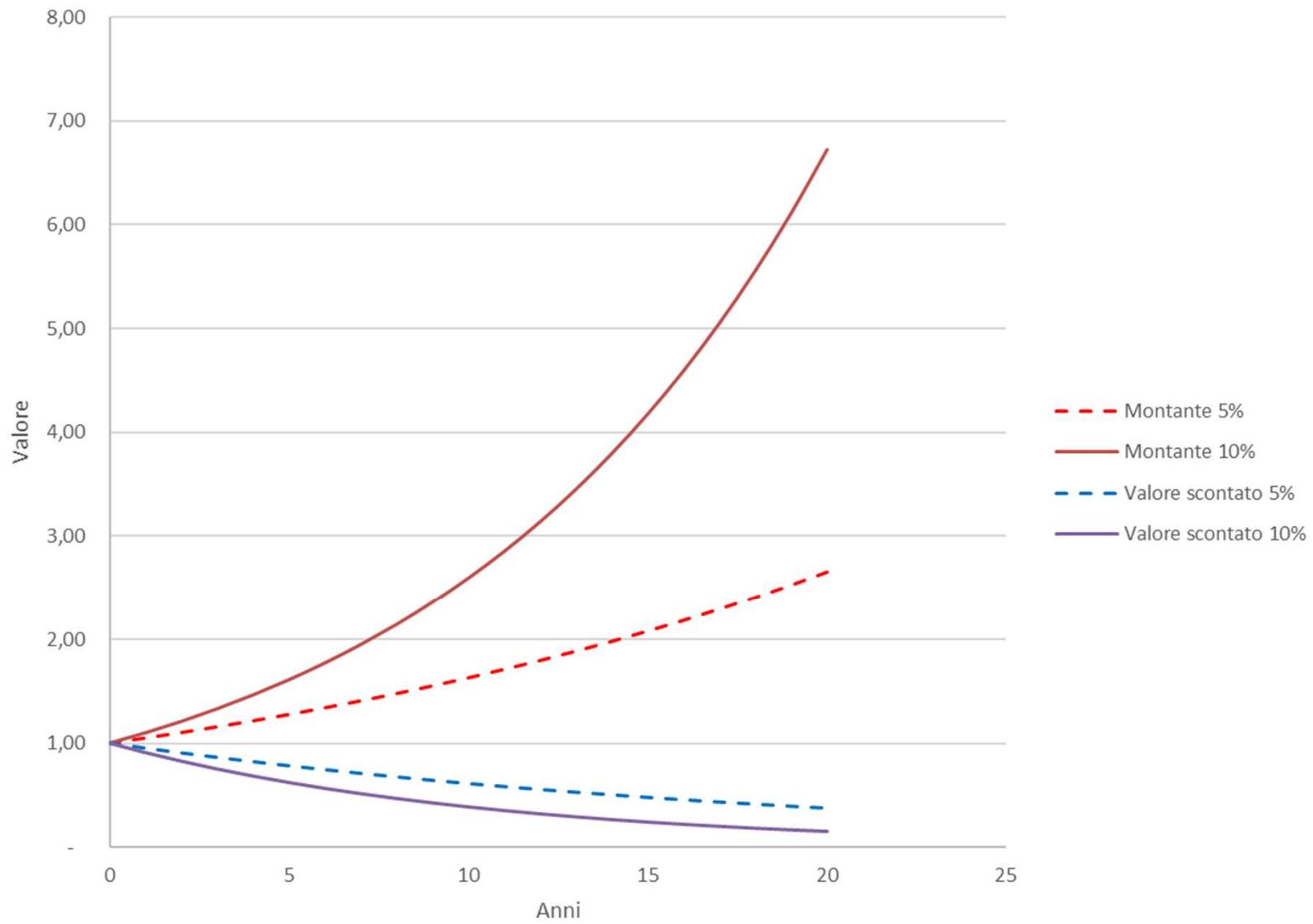
- A quanto ammonterà, tra **10 anni** (n), il capitale di **1.000 €** (C_0) investito in titoli al saggio del **5%**?

$$M = C_0 q^n$$

$$1.000 \times 1,05^{10} = 1.629 \text{ €}.$$

- Se l'interesse non fosse composto, cioè se gli interessi non maturassero altri interessi, il montante sarebbe inferiore: 1.500 €.

Regime interesse composto convertibile discontinuo annuo



Tasso Annuo Nominale e Tasso Annuo Effettivo

Tasso Annuo Nominale (TAN): Tasso interesse puro che corrisponde al Tasso Annuo Effettivo in regime di interesse composto convertibile annuo;

Tasso Annuo Effettivo (TAE): tasso di interesse annuo effettivamente pagato sul capitale e dipende dal numero di volte (k) che l'interesse monta a capitale in un anno (semestralmente: $k=2$, mensilmente: $k=12$, ecc.)

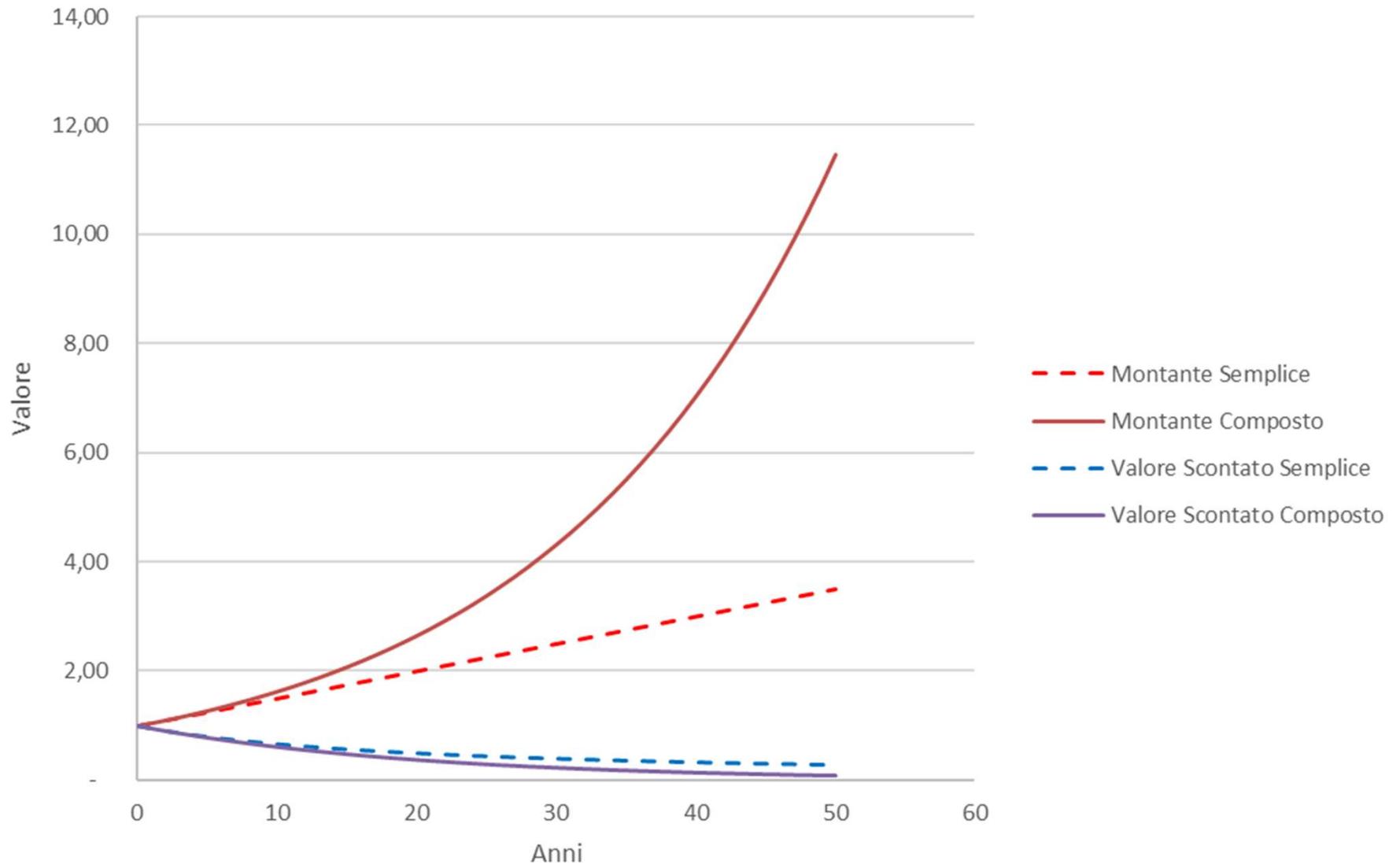
Il TAN differisce dal TAE in ragione di k .

$$TAE = \left(1 + \frac{TAN}{k}\right)^k - 1$$

Tasso Annuo Nominale e Tasso Annuo Effettivo

Convertibilità interessi	<i>k</i>	<i>TAN</i>	<i>TAE</i>
Annuale	1	0,06	0,06000
Semestrale	2	0,06	0,06090
Trimestrale	4	0,06	0,06136
Mensile	12	0,06	0,06168
Giornaliero	365	0,06	0,06183
Istantaneo	∞	0,06	0,06184

Regime interesse a confronto

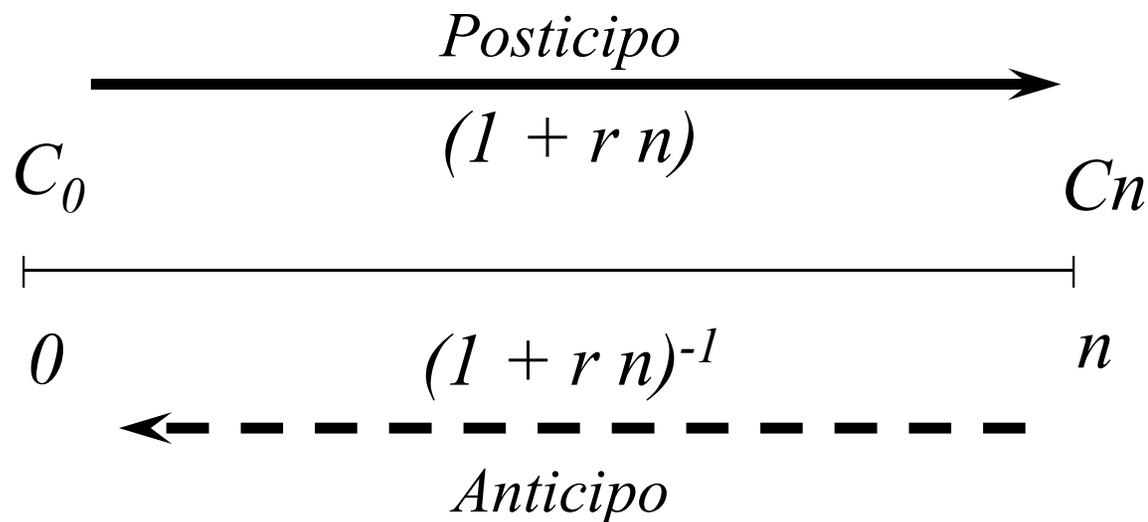


Spostamento di capitali nel tempo

- Non è possibile addizionare, sottrarre o confrontare tra loro valori differiti nel tempo, se prima non sono riportati allo stesso momento.
- E' necessario individuare le formule che consentono di anticipare o di posticipare ciascun valore.
- Un valore spostato nel futuro si trasforma in montante, spostato nel passato si trasforma in valore scontato.

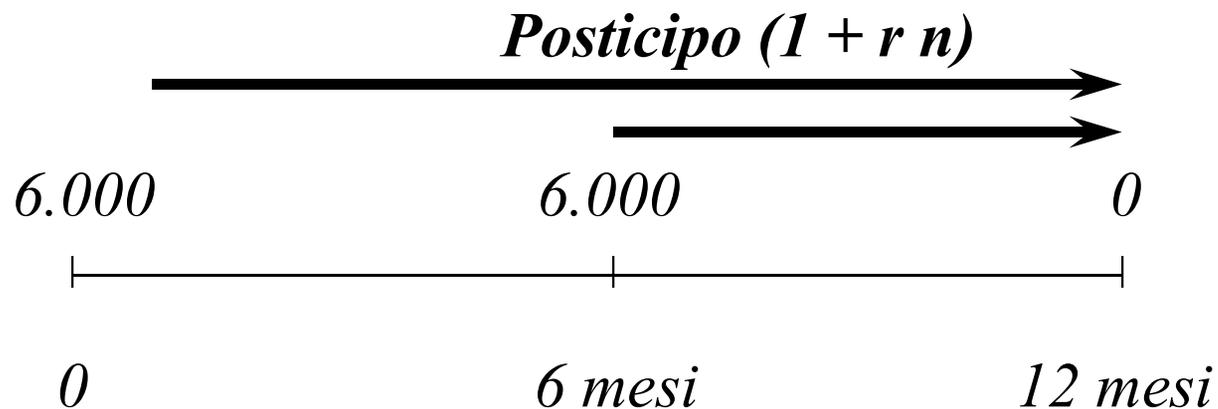
Periodi inferiori o uguali all'anno / Regime interesse semplice

- *Coefficiente di posticipazione: $(1 + r n)$*
- *Coefficiente di anticipazione: $(1 + r n)^{-1}$*



Esercizio

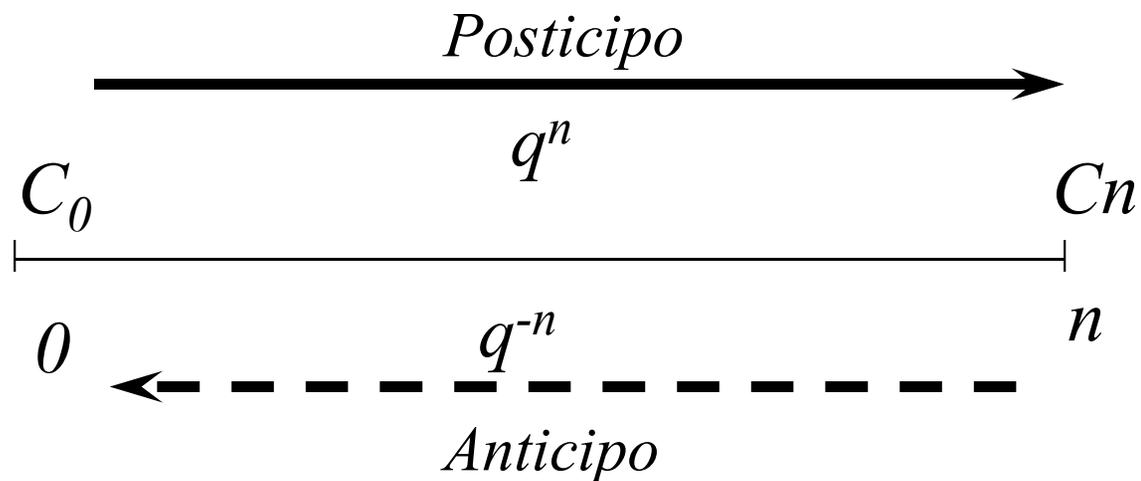
Il canone annuo del vostro appartamento è suddiviso in due rate anticipate di 6.000 Euro ciascuna. A quanto ammonta l'affitto percepito dal proprietario, riferito a fine anno? Sia $r = 5\%$.



$$Ca = 6.000 \times (1 + 0.05) + 6.000 (1 + 0.05 \times 1/2) = 6.000 \times 1.05 + 6.000 (1.025) = 12.450 \text{ €}$$

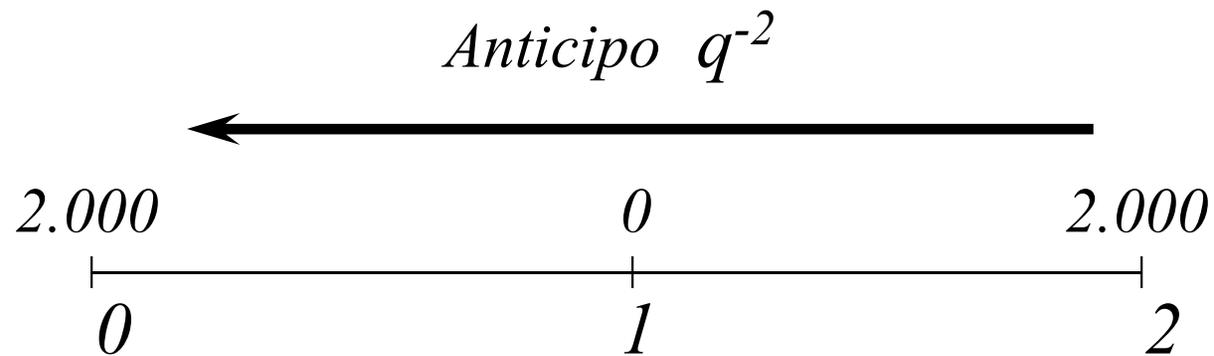
Periodi superiori all'anno

- *Coefficiente di posticipazione: q^n*
- *Coefficiente di anticipazione: q^{-n}*



Esercizio

Comperate un nuovo computer che pagate in 2 rate da 2.000 Euro: la prima subito, la seconda fra due anni. Quanto costa il computer al momento attuale ($r = 6\%$) ?



$$2.000 + 2.000 \times 1,06^{-2} = 3.780 \text{ €}$$

Regimi finanziari e scindibilità

Un regime finanziario è scindibile se il montante dipende solo dalla tempo (n) e non da eventuali capitalizzazioni intermedie (m).

- Il regime di interesse semplice non è scindibile:

$$C_0(1 + rn) \neq C_0(1 + rm)[1 + r(n - m)]$$

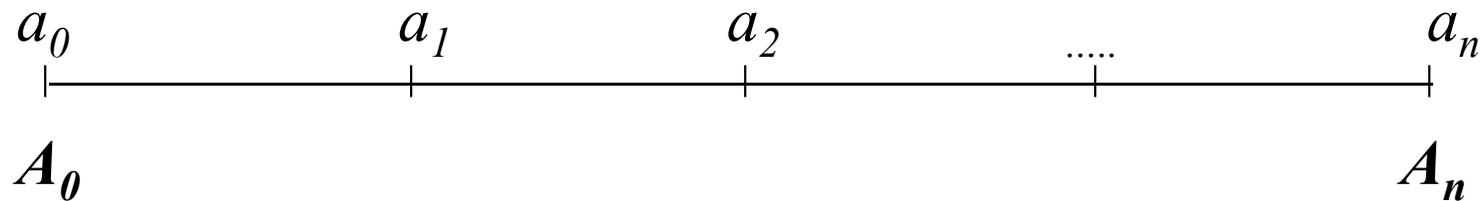
- Il regime di interesse composto è scindibile:

$$C_0q^n = C_0q^m q^{n-m}$$

Le annualità

- Le annualità (a) sono prestazioni finanziarie che si verificano ad intervalli annuali.
- Le annualità sono classificate in:
 - **posticipate o anticipate**, in base alla scadenza di ciascuna annualità, rispettivamente alla fine o all'inizio dell'anno;
 - **costanti o variabili**, in base all'ammontare di ciascuna annualità;
 - **limitate o illimitate**, in base alla durata complessiva della serie di prestazioni.

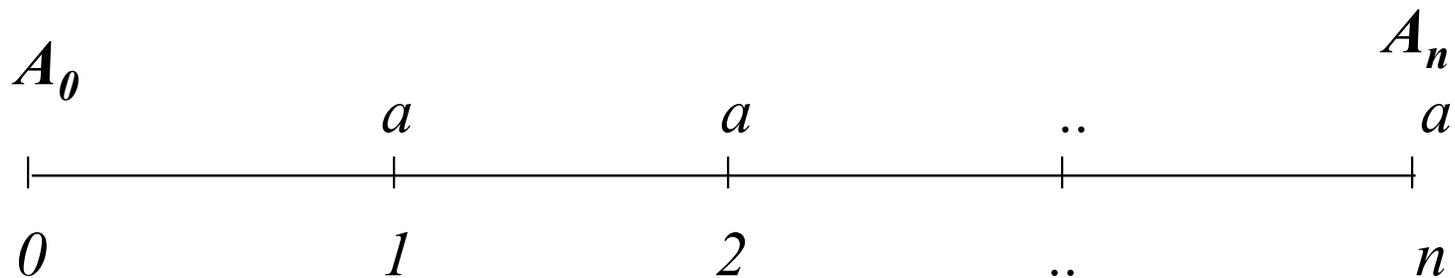
Annualità variabili e limitate



Gli strumenti disponibili: **coefficienti di anticipazione e posticipazione**. Le accumulazioni iniziale e finale assumono rispettivamente la forma:

- $A_0 = a_0 + a_1 / q + a_2 / q^2 + a_n / q^n$
- $A_n = a_0 \times q^n + a_1 \times q^{n-1} + \dots + a_n$
- $A_0 = A_n / q^n$
- $A_n = A_0 \times q^n$

Annualità costanti, posticipate, limitate



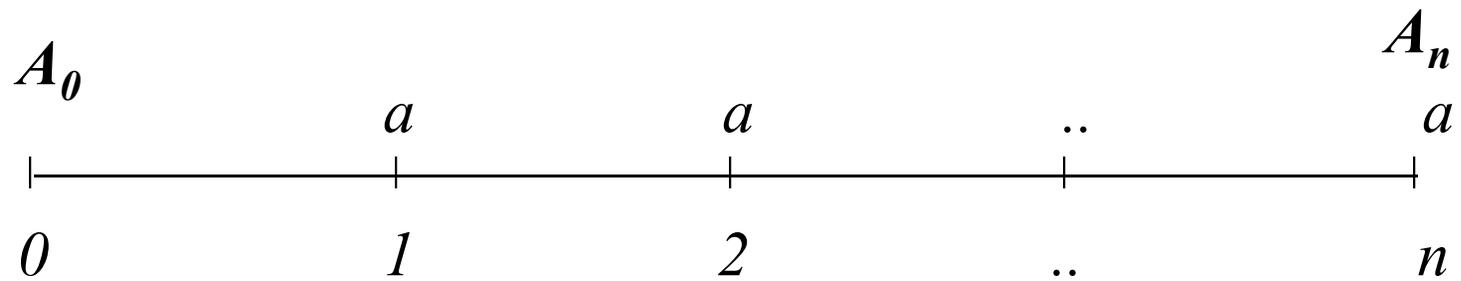
$$\text{Accumulazione finale} = A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} =$$

$$= a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Progressione geometrica di ragione q la cui somma è pari al rapporto fra il prodotto dell'ultimo termine per la ragione meno il primo e la ragione meno uno :

$$A_n = a \frac{q^{n-1}q-1}{q-1} = a \frac{q^n-1}{r}$$

Annualità costanti, posticipate, limitate

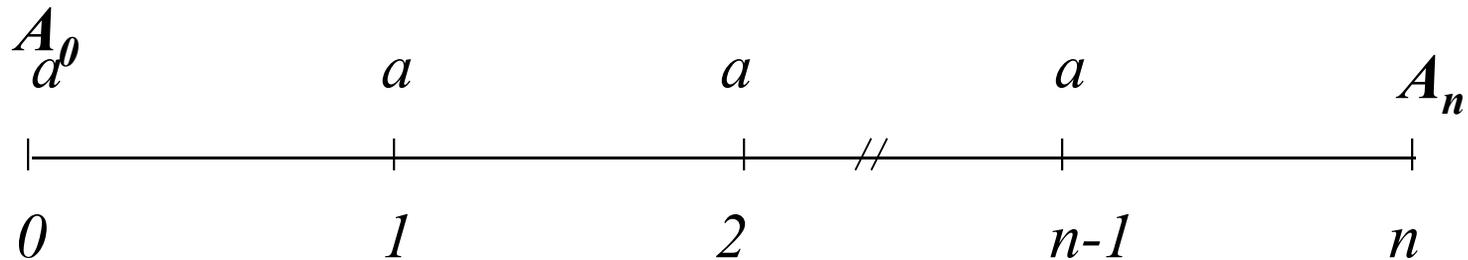


Accumulazione finale:
$$A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$$

Accumulazione iniziale:
$$A_0 = \frac{A_n}{q^n} = a \frac{q^n - 1}{rq^n}$$

Accumulazione intermedia
$$A_m = A_0 q^m = \frac{A_n}{q^{n-m}}$$

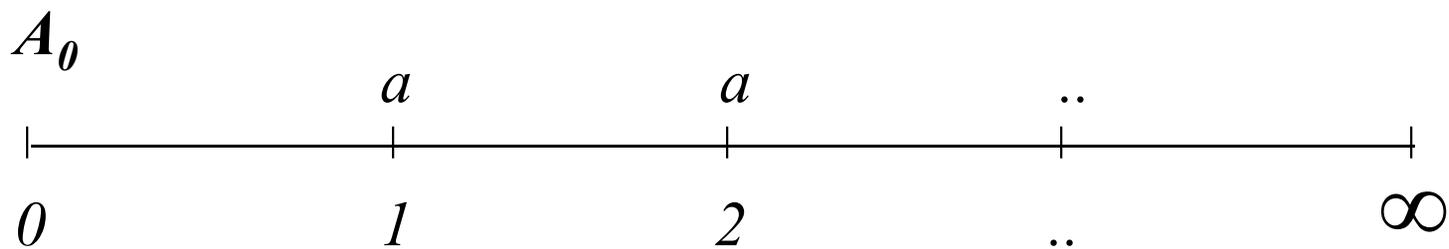
Annualità costanti, anticipate, limitate



- *Accumulazione finale:* $A_n = aq \frac{q^n - 1}{r}$

- *Accumulazione iniziale:* $A_0 = aq \frac{q^n - 1}{rq^n}$

Annualità costanti e illimitate



- Trattandosi di annualità illimitate: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{rq^n} = \frac{1}{r}$

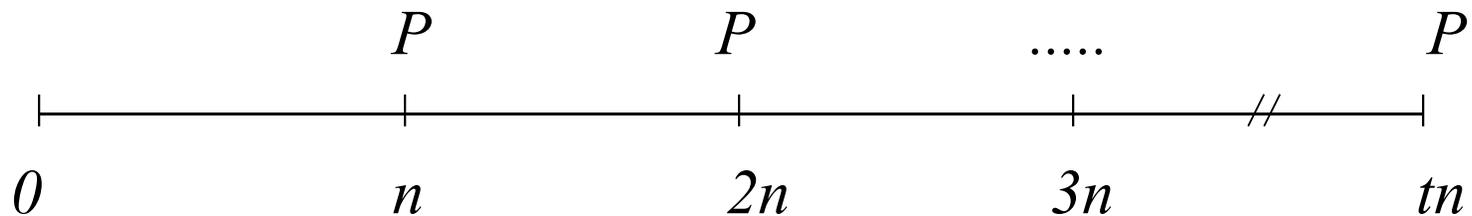
- *Posticipate*: $A_0 = \frac{a}{r}$

- *Anticipate*: $A_0 = \frac{aq}{r}$

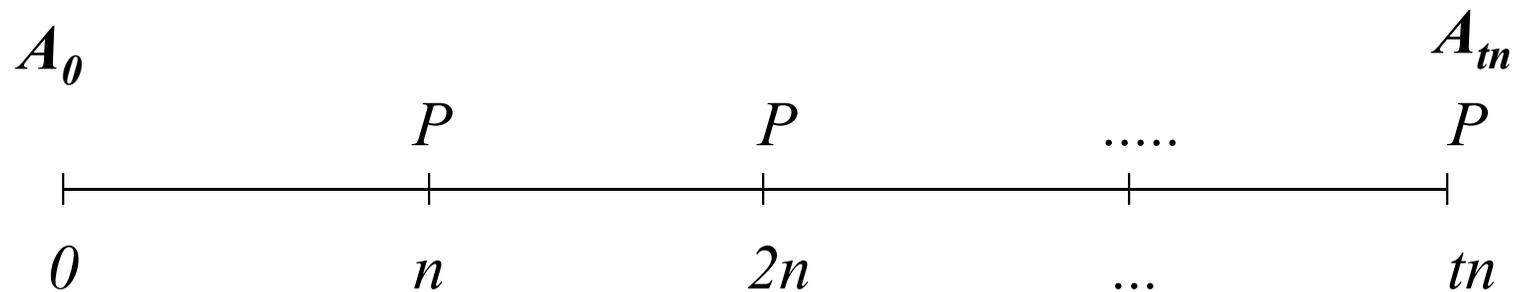
- *Accumulazione intermedia*: $A_m = A_0 q^m$

Le periodicità (o poliannualità)

Le periodicità o poliannualità (P) sono prestazioni finanziarie che si ripetono ad intervalli regolari (n), multipli dell'anno.

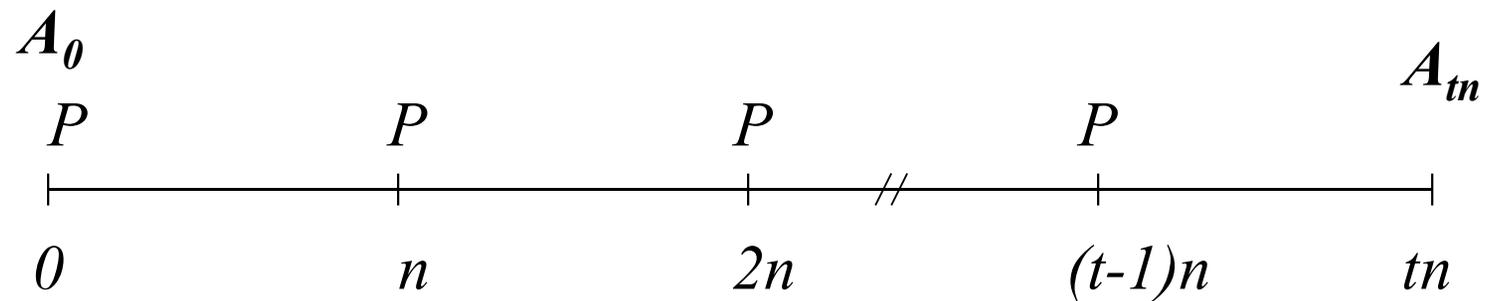


Periodicità costanti, posticipate, limitate



- *Accumulazione finale:* $A_{tn} = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$
- *Accumulazione iniziale:* $A_0 = P \frac{q^{tn} - 1}{(q^n - 1)q^{tn}}$

Periodicità costanti, anticipate, limitate



• *Accumulazione finale:*
$$A_{tn} = Pq^n \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

• *Accumulazione iniziale:*
$$A_0 = Pq^n \frac{q^{tn} - 1}{(q^n - 1)q^{tn}}$$

Periodicità costanti, posticipate, illimitate

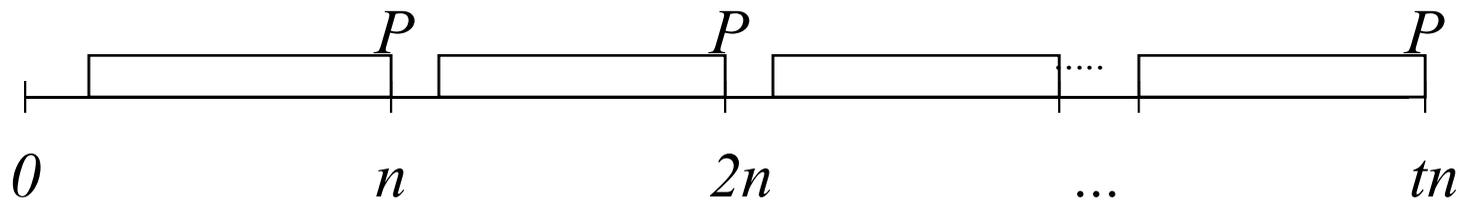
Trattandosi di periodicità illimitate: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q^{tn} - 1}{(q^n - 1)q^{tn}} = \frac{1}{q^n - 1}$

- *Posticipate:* $A_0 = \frac{P}{q^n - 1}$

- *Anticipate:* $A_0 = \frac{Pq^n}{q^n - 1}$

- *Accumulazione intermedia:* $A_m = A_0 q^m$

Trasformazione di periodicità (P) in annualità (a)



$$a = P \frac{r}{q^n - 1}$$

Reintegrazione

La quota di reintegrazione (Q_{re}) è **quell'annualità costante e posticipata** che viene accumulata per un certo numero di anni allo scopo di costituire/rinnovare un capitale di valore iniziale V_i e valore finale V_f

$$Q_{re} = (V_i - V_f) \frac{r}{q^n - 1}$$

Dovendo sostituire ogni 10 anni un macchinario del valore di acquisto a nuovo di 120.000 € e di recupero pari a 20.000 €, si vuol conoscere la somma annua posticipata da accantonare al saggio del 5%.

$$Q_{re} = (120.000 - 20.000) \frac{0,05}{1,05^{10} - 1} = 100.000 \times 0,0795 = 7.950 \text{ €}$$

Esercizio

Un immobile di civile abitazione richiede, per poter fornire un reddito costante, le seguenti spese periodiche :

- a) spese per tinteggiatura ogni 5anni (15 €/mq);
- b) spese per rinnovo impianti ogni 25 anni (150 €/mq);
- c) spese per ristrutturazione interna ogni 80 anni (1000 €/mq).

Calcolare la quota annua relativa alle suddette spese.

$$Qa = 15 \cdot \frac{r}{q^5 - 1} + 150 \cdot \frac{r}{q^{25} - 1} + 1000 \cdot \frac{r}{q^{80} - 1}$$

Ammortamento

La quota di ammortamento (Q_{am}) è quell'annualità costante, posticipata e limitata che deve essere corrisposta per estinguere un debito contratto inizialmente

$$Q_{am} = D_i \frac{rq^n}{q^n - 1}$$

La Q_{am} può essere disaggregata in due distinte componenti:

- ✓ quota capitale (Q_c);
- ✓ quota interessi (Q_i).

Esercizio

Si costruisca il piano di ammortamento di un debito di 10.000 € da estinguere in tre anni al saggio del 10%, con rate annue, costanti e posticipate.

$$Q_{am} = 10.000 \frac{0,1 \cdot 1,1^3}{1,1^3 - 1} = 10.000 \times 0,4021 = 4.021$$

Anno	Rata	Quota capitale	Quota interessi	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	10,000
1	4,021	3,021	1,000	3,021	6,979
2	4,021	3,323	698	6,344	3,656
3	4,021	3,656	365	10,000	0

Esercizio

La situazione finanziaria di un'impresa è la seguente:

- 11.000 € da incassare fra un mese;
- 40.000 € da versare fra sei mesi;
- 20.000 € da restituire fra due anni.

Assumendo un tasso di interesse pari al 6 % annuo, calcolare:

- l'indebitamento totale all'attualità;
- la rata semestrale posticipata che estingue il debito in sette anni.

Calcolo indebitamento:

$$A_0 = - \frac{11.000}{1 + 0,06 \frac{1}{12}} + \frac{40.000}{1 + 0,06 \frac{6}{12}} + \frac{20.000}{1,06^2} = 45.689,61$$

Calcolo rata:

$$Q_{as} = 45.689,61 \frac{0,03 \cdot 1,03^{14}}{1,03^{14} - 1} = 4044,65$$

Esercizio

La costruzione di un complesso immobiliare richiede i seguenti esborsi:

- 3 mln di € da versare subito;
- 5 mln di € all'anno da versare per i prossimi 3 anni;
- 4 mln di € da versare fra 4 anni.

Assumendo un tasso di interesse pari al 6 %, calcolare la rata annua posticipata del mutuo decennale che finanzia la costruzione.

Fabbisogno finanziario:

$$A_0 = 3 + 5 \frac{1,06^3 - 1}{0,06 \cdot 1,06^3} + \frac{4}{1,06^4} = 19,53$$

Quota ammortamento:

$$Q_a = 19,52 \frac{0,06 \cdot 1,06^{10}}{1,06^{10} - 1} = 2,65$$

Esercizio

Compilare il piano di ammortamento di un mutuo di 150.000 € estinguibile con 10 rate annue posticipate al tasso di interesse iniziale del 4 %. Dopo aver pagato la quarta rata il tasso di interesse sale al 5%.

Quota amm/to (1-4): $Q_a = 150.000 \frac{0,04 \cdot 1,04^{10}}{1,04^{10} - 1} = 18.494$

Momento	Quota amm/to	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	150.000
1	18.494	6.000	12.494	12.494	137.506
2	18.494	5.500	12.993	25.487	124.513
3	18.494	4.981	13.513	39.000	111.000
4	18.494	4.440	14.054	53.054	96.946

Esercizio (segue)

Quota amm/to (5-10): $Q_a = 96.496 \frac{0,05 \cdot 1,05^6}{1,05^6 - 1} = 19.100$

Momento	Quota amm/to	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	150.000
1	18.494	6.000	12.494	12.494	137.506
2	18.494	5.500	12.993	25.487	124.513
3	18.494	4.981	13.513	39.000	111.000
4	18.494	4.440	14.054	53.054	96.946
5	19.100	4.847	14.253	67.307	82.693
6	19.100	4.135	14.965	82.272	67.728
7	19.100	3.386	15.714	97.986	52.014
8	19.100	2.601	16.499	114.485	35.515
9	19.100	1.776	17.324	131.809	18.191
10	19.100	910	18.191	150.000	-

Esercizio

La manutenzione di un fabbricato richiede le seguenti spese:

- 2.000 € ogni 4 anni;
- 100 € ogni 6 mesi;
- 6.000 € ogni 10 anni.

Assumendo un tasso di interesse pari al 10 %, calcolare la quota di manutenzione annua.

Quota manutenzione:

$$Q_m = 2.000 \frac{0,1}{1,1^4 - 1} + 100 + 100 \left(1 + 0,1 \frac{6}{12} \right) + 6.000 \frac{0,1}{1,1^{10} - 1} = 1.012,41$$

Alcuni saggi di uso comune

- Saggio interesse (r): Prezzo d'uso (costo) del capitale (posticipazione);
- Saggio di sconto (d): Costo dell'anticipazione di un capitale ($d=r/(1+r)$);
- Saggio di capitalizzazione: Rapporto fra reddito e valore di un bene;
- Saggio di interesse legale (r_l): Saggio fissato per norma con cui si regolano i rapporti (debiti/crediti) fra cittadino e pubblica amministrazione ($s_l = \text{Inflazione} + \text{Rendimento medio titoli di stato (BOT) a 12 mesi}$);
- Tasso ufficiale di riferimento (TUR): Tasso al quale la BCE finanzia le banche per le operazioni principali;
- EURIBOR: European Interbank Offered Rate, tasso di rifinanziamento interbancario a breve, riferimento per i tassi praticati nei mutui a tasso variabile;
- IRS: Interest Rate Swap, tasso di riferimento nei mutui a tasso fisso.