DERIVARE LA STRUTTURA DI GAUGE $\mathcal{G}_{SM}$

[Dalle note del corso "Standard Model" di A. Romanino in SISSA]

1) $\mathcal{G}_{SM} \supset SU(3)_c \times U(1)_{em}$

$\Rightarrow$ I generatori di QCD e QED sono anche generatori di $\mathcal{G}_{SM}$

2) Assumiamo che il bosone $W^\pm$ sia un bosone di gauge di $\mathcal{G}_{SM}$.
(non una risonanza composta tipo la $\rho^\pm$ in QCD)

$\Rightarrow$ Le interazioni deboli del bosone W viste prima devono avere la forma predetta dall'invarianza di gauge:

$$\bar{\psi} i \not{D} \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - i g_A V_\mu^A \bar{\psi} \gamma^\mu T_\psi^A \psi$$

- V_μ^A: campo di gauge REALE
- T_ψ^A: generatore del gruppo di gauge associato a V_μ^A nella rappresentazione di ψ.

LEPTONI

Cominciamo considerando i leptoni (1 generazione per semplicità). Vogliamo riprodurre questa interazione:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$$

- Definiamo $L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{L}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{L}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_L$$

- Passiamo da $W_\mu^\pm$ a campi REALI: $W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$

$$\mathcal{L}_{CC} = -g W_\mu^1 \bar{L}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} L_L - g W_\mu^2 \bar{L}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} L_L$$

$$\equiv -g \bar{L}_L \gamma^\mu \left(W_\mu^1 T_L^1 + W_\mu^2 T_L^2 \right) L_L \qquad T_L^{1,2} \equiv \frac{\sigma^{1,2}}{2}$$

Ha la forma corretta ed abbiamo trovato <u>2 generatori di $\mathcal{G}_{SM}$.</u>

- Se T_L^1 e T_L^2 sono generatori, anche $[T_L^1, T_L^2]$ lo è:

$$[T_L^1, T_L^2] = i T_L^3 \quad \Rightarrow \quad T_L^3 = \frac{\sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$T_L^{1,2,3}$ sono i 3 generatori di $SU(2)$ nella rapp. fondamentale $t_a^{(2)}$: $L_L \sim 2$ di $SU(2) \Rightarrow \mathcal{G}_{SM} \supset SU(2)$

$\Rightarrow$ PREDIZIONE

Deve esserci un bosone di gauge W^3_μ associato a $t^3_{SU(2)}$ con interazione:

$$\mathcal{L}_{W^3_\mu} \supset -g\,\bar{L}_L \gamma^\mu T^3_L L_L W^3_\mu$$

$$\boxed{= -\frac{g}{2}\left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L\right) W^3_\mu \quad \text{CORRENTE NEUTRA}}$$

- Come agisce $SU(2)$ su e_R?

  $\rightarrow$ e_R non interagisce con $W^\pm_\mu$, quindi è neutro sotto $SU(2)$: un SINGOLETTO

  $e_R \sim 1$ di $SU(2)$

Per questo motivo viene chiamato $SU(2)_L$

(da non confondere con la sottoalgebra di Lorentz $su(2)_L$)

- $G_{SM} \supset SU(2)_L$ e $G_{SM} \supset SU(3)_c \times U(1)_{em}$

  È qualche generatore di QCD $(t^A_{SU(3)})$ o QCD (Q) identificabile con quelli di $SU(2)_L$?

$SU(3)_c$) L_L è neutro sotto QCD quindi $T^A_L = 0$

e $t^A_{SU(3)}$ e $t^a_{SU(2)}$ sono INDIPENDENTI

$U(1)_{em}$ Sappiamo già come deve agire su L_L:

$$\hat{Q}_L L_L = \begin{pmatrix} Q_\nu \nu_{eL} \\ Q_e e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_\nu & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{Q}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Non è una combinazione dei T_L^a quindi è un generatore indipendente.

L'unica matrice Hermitiana 2×2 indipendente da quelle di Pauli è l'identità:

Definiamo $\hat{Y} \equiv Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ IPERCARICA come nuovo generatore.

Allora abbiamo: $\hat{Q} = \hat{Y} + T_L^3$

Per L_L: $\hat{Y}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y_L = -\frac{1}{2}}$

Per e_R: $Y_e = Q_e - \phi = -1 \Rightarrow \boxed{Y_e = -1}$

$[\hat{Y}, T_L^a] = 0 \rightarrow \boxed{G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$

- PREDIZIONE

Il campo di gauge corrispondente B_μ ha interazioni:

$$\mathcal{L}_B \supset -g' B_\mu \left(Y_L \bar{L}_L \gamma^\mu L_L + Y_e \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right)$$

QUARK

Anche per i quark vogliamo riprodurre

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W^+_\mu \bar{u}_L \gamma^\mu d_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{d}_L \gamma^\mu u_L$$

Definiamo $Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$. Come per i leptoni troviamo:

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{CC} = -g \bar{Q}_L \gamma^\mu \left(W^1_\mu T^1 + W^2_\mu T^2 \right) Q_L$$

Quindi le interazioni sono compatibili con la struttura di gauge $SU(2)_L$, con i quark LH che trasformano nella rappresentazione fondamentale e quelli RH singoletti.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{Q,W} = -g \bar{Q}_L \gamma^\mu \left(\sum_{i=1}^{3} W^i_\mu T^i \right) Q_L$$

Vediamo ora l'ipercarica $\hat{Y} = \hat{Q} - T^3_L$

Per Q_L:

$$Y_{Q_L} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \propto \mathbb{1}_{2\times 2}$$

commuta con $SU(2)_L$, come deve.

$$Y_{u_R} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$Y_{d_R} = -\frac{1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$$

LAGRANGIANA DI GAUGE DEL MODELLO STANDARD

È fissata una volta che abbiamo deciso il gruppo di simmetria di gauge $\mathcal{G}_{SM}$ ed il contenuto di materia, con le rispettive rappresentazioni sotto $\mathcal{G}_{SM}$.

- $\mathcal{G}_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

  campi di gauge associati: G_μ^A, W_μ^a, B_μ

- Contenuto di materia:

	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	Y
L_i	1	2	$-1/2$
e_{Ri}	1	1	-1
Q_i	3	2	$1/6$
u_{Ri}	3	1	$2/3$
d_{Ri}	3	1	$-1/3$

Tre generazioni: $i = 1, 2, 3$

Da questo segue $\mathcal{L}_{SM}^{gauge}$:

$$\mathcal{L}_{SM}^{gauge} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^{A} G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^{a} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{ghosts}$$

$$+ \bar{L}_i i \not{D} L_i + \bar{e}_{Ri} i \not{D} e_{Ri} +$$

$$+ \bar{Q}_i i \not{D} Q_i + \bar{u}_{Ri} i \not{D} u_{Ri} + \bar{d}_{Ri} i \not{D} d_{Ri}$$

dove

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s T_A^{(3)} G_\mu^A + i g T_a^{(2)} W_\mu^a + i g' Y B_\mu$$

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A - g_s f_{ABC} G_\mu^B G_\nu^C \qquad [t_A^{(3)}, t_B^{(3)}] = i f_{ABC} t_C^{(3)}$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c \qquad [t_a^{(2)}, t_b^{(2)}] = i \varepsilon_{abc} t_c^{(2)}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

tensore antisimmetrico $\varepsilon_{123} = +1$

I generatori per i vari fermioni sono:

	$T_A^{(3)}$	$T_a^{(2)}$	Y
L_i	0	$t_a^{(2)}$	$-1/2$
e_{Ri}	0	0	-1
Q_i	$t_A^{(3)}$	$t_a^{(2)}$	$1/6$
u_{Ri}	$t_A^{(3)}$	0	$2/3$
d_{Ri}	$t_A^{(3)}$	0	$-1/3$

- $t_a^{(2)} = \frac{\sigma^a}{2}$ ← Matrici di Pauli

  $Tr[t_a^{(2)} t_b^{(2)}] = \frac{\delta_{ab}}{2}$

- $t_A^{(3)} = \frac{\lambda^A}{2}$ ← Matrici di Gell-Mann

  $Tr[t_A^{(3)} t_B^{(3)}] = \frac{\delta_{AB}}{2}$

Ci sono alcune domande che non trovano risposta nel Modello Standard, dove sono assunte come dato di fatto, per la cui risposta occorre ipotizzare possibili estensioni. Ad esempio:

- Perché ci sono 3 copie (generazioni) di fermioni?
- Perché il gruppo di gauge G_{SM} è proprio quello?
- Perché i numeri quantici dei fermioni (irreps di G_{SM} ed ipercarica) sono proprio quelli?
- Perché Q (ovvero Y) è quantizzata?
- A livello quantistico, le irreps e Y sono esattamente tali che le anomalie di gauge si cancellano "miracolosamente", rendendo la teoria consistente. Qual è il motivo di questo?