

# ORBITA utilizzando il vettore di (Laplace-) Runge-Lenz.

Finora abbiamo calcolato  $r(\theta)$  in 2 modi:

- Valido per ogni potenziale  $V=V(r)$
- 1) risolvendo le eq. di Lagrange (Eq. diff. 2° ord.) per il problema RIDOTTO (usando cost. del moto  $\bar{M}$ )
  - 2) abbiamo usato un'altra cost. del moto, l'ENERGIA, per ridurre l'eq. diff. del 2° ord. a un'eq. diff. del 1° ord. (risolvibile per quadrature)

Introduciamo un'ulteriore COSTANTE DEL MOTO che ci permetterà di ridurre il problema del calcolo di  $r(\theta)$  alla risoluzione di eq. "differenziali del 0 ordine", cioè eq. ALGEBRICHE.

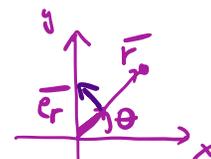
↳ qta nuova cost. del moto esiste solo se  $V(r) = -\frac{k}{r}$ .

Prop. Nel moto Kepleriano, la seguente variabile dinamica (vettoriale) si conserva:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{M} - m k \frac{\bar{r}}{r} = m \dot{\bar{r}} \times \bar{M} - m k \frac{\bar{r}}{r}$$

↑ giace sul piano dell'orbita

$$(\bar{M} = l \bar{e}_z)$$



Dim. Valutiamo  $\bar{A}$  in  $r(t)$  e  $\theta(t)$ .

In termini di qta funz., il moto

$\bar{r}(t)$  è dato da  $\bar{r}(t) = r(t) \bar{e}_r(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\bar{e}}_r = \\ &= \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta \bar{e}_x + \sin\theta \bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta} \sin\theta \bar{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta \bar{e}_y = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta \bar{e}_x + \cos\theta \bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos\theta \bar{e}_x - \dot{\theta} \sin\theta \bar{e}_y = -\dot{\theta} \bar{e}_r$$

Ricordiamo :

$$\bar{e}_r \times \bar{e}_\theta = \bar{e}_z, \quad \bar{e}_r \times \bar{e}_z = -\bar{e}_\theta, \quad \bar{e}_\theta \times \bar{e}_z = \bar{e}_r \quad M = l\bar{e}_z$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}\bar{A} &= m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} = m(\dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta) \times l\bar{e}_z - mk\bar{e}_r = \\ &= -ml\dot{r}\bar{e}_\theta + (mlr\dot{\theta} - mk)\bar{e}_r\end{aligned}$$

Ora calcoliamo la derivata tot. di  $\bar{A}$  rispetto al tempo:

$$\dot{\bar{A}} = -ml\ddot{r}\bar{e}_\theta + 2ml\dot{r}\dot{\theta}\bar{e}_r + mlr\ddot{\theta}\bar{e}_r + mlr\dot{\theta}^2\bar{e}_\theta - mk\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

Valutiamo tale espressione sulle soluz. delle eq. del moto, che

ricordiamo essere  $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$   $\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2r^3}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2l}{mr^3}\dot{r}$$

$$= \bar{e}_\theta m \left[ -l \left( -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{mr^3} \right) + r l \frac{l^2}{m^2r^4} - k \frac{l}{mr^2} \right] +$$

$$+ \bar{e}_r m \left[ 2l\dot{r} \left( \frac{l}{mr^2} \right) + lr \left( -\frac{2l}{mr^3} \dot{r} \right) \right] \underset{\uparrow}{=} 0!$$

Qto avviene quando  
 $r(t)$  e  $\theta(t)$  soddisfano  
eq. del moto  $\Rightarrow \bar{A}$  è cost  
del moto. //

Vediamo come possiamo usare che  $\bar{A}$  è cost. del moto.

[Ricordiamoci come abbiamo sfruttato che  $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$  è cost. del moto:

$\rightarrow$  abbiamo scritto insieme di livello  $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$ , da cui  
ci siamo ricavati algebricam.  $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$ . ]

Partiamo dalla constatazione che  $\bar{M}$  e  $\bar{A}$  sono costanti del moto. Avrò quindi le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \bar{M}_0 \leftarrow \text{cost} \\ \bar{A}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \bar{A}_0 \leftarrow \text{cost.} \end{array} \right\} \text{ sistema di livelli associato alle cost. } \bar{M}_0 \text{ e } \bar{A}_0$$

Scelgo sist. di rif.  $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$  in modo che  $\bar{M}_0$  sia parallelo ad asse  $z$ :  $\bar{M}_0 = l \bar{e}_z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{r}, \dot{\bar{r}} \in \text{piano generato da } \bar{e}_x, \bar{e}_y \\ \bar{A}_0 \in \quad \quad \quad \parallel \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \bar{r} &= r \bar{e}_r = r \cos \theta \bar{e}_x + r \sin \theta \bar{e}_y \\ \dot{\bar{r}} &= \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \bar{e}_x + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \bar{e}_y \\ \bar{A}_0 &= a \cos \theta_0 \bar{e}_x + a \sin \theta_0 \bar{e}_y \end{aligned}$$

Rimangono quindi tre equazioni indipendenti:

$$(\star) \left\{ \begin{array}{l} M_z(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = l \\ A_x(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = a \cos \theta_0 \\ A_y(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = a \sin \theta_0 \end{array} \right.$$

Tre equazioni nelle incognite  $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ : possiamo esplicitare  $r, \dot{r}, \dot{\theta}$  in funzione di  $\theta$ !

In qte maniera otteniamo in particolare  $r(\theta)$

Scriviamo  $\bar{A}$  nella base  $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -m l \dot{r} \bar{e}_\theta + m l r \dot{\theta} \bar{e}_r - m K \bar{e}_r = \\ &= (m l \dot{r} \sin \theta + m l r \dot{\theta} \cos \theta - m K \cos \theta) \bar{e}_x + \\ &\quad + (-m l \dot{r} \cos \theta + m l r \dot{\theta} \sin \theta - m K \sin \theta) \bar{e}_y \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \bar{e}_r = \cos \theta \bar{e}_x + \sin \theta \bar{e}_y \\ \bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{e}_x + \cos \theta \bar{e}_y \end{array} \right]$$

(A) diventano:

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = l \\ mlr\dot{\theta}\cos\theta + mlr\dot{\theta}\cos\theta - mk\cos\theta = a\cos\theta_0 \\ -mlr\dot{\theta}\sin\theta + mlr\dot{\theta}\sin\theta - mk\sin\theta = a\sin\theta_0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione  $\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ : sostituiamo nelle altre due equazioni;

$$\begin{cases} mlr\dot{\theta}\cos\theta + l^2\frac{1}{r}\cos\theta = mk\cos\theta + a\cos\theta_0 \\ -mlr\dot{\theta}\sin\theta + l^2\frac{1}{r}\sin\theta = mk\sin\theta + a\sin\theta_0 \end{cases}$$

Systema lineare in  $r$  e  $\frac{1}{r}$  (che, risolto, mi darà  $r(\theta)$  e  $\dot{r}(\theta)$ )

Prendiamo combinazione lineare  $\cos\theta (eq_1) + \sin\theta (eq_2)$ :

$$l^2\frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = mk(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + a(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0)$$

Cioè  $\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} + \frac{a}{l^2}\cos(\theta - \theta_0)$ , ovvero

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + \frac{a\eta}{l^2}\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

$\rightarrow$  Qta cost. è l'eccentricità  $e$ .

In particolare vediamo che  $e$  dipende dal modulo di  $\bar{A}$ .  
Ma noi sappiamo che  $e$  ha un'espressione anche in funzione dell'eu.  $E \Rightarrow |\bar{A}|$  e  $E$  sono cost. del moto  
dipendenti!

5 (E' per qto che non abbiamo considerato E in qto procedimento per calcolare  $r(\theta)$ : avremmo ottenuto una relazione ridondante.)

Quindi, rispetto a  $\bar{M}$  e  $E$ ,  $\bar{A}$  introduce solo 1 ulteriore cost. del moto indipendente.

[Potremmo anche prendere comb. lineare  $\sin\theta(e_{q_1}) - \cos\theta(e_{q_2})$ :

$$ml\dot{r} = a(\cos\theta_0 \sin\theta - \sin\theta_0 \cos\theta) = a \sin(\theta - \theta_0)$$

Cioè otteniamo anche  $\dot{r}$  in funz. di  $\theta$

$$\dot{r} = \frac{a}{ml} \sin(\theta - \theta_0)$$

Qta e' consistente con

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = - \frac{\cancel{r}}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} (-e \sin(\theta - \theta_0)) \cdot \frac{l}{m} \frac{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2}{\eta^2} \\ &= \frac{el}{m\eta} \sin(\theta - \theta_0) \quad e = \frac{a\eta}{l^2} \Rightarrow \frac{el}{m\eta} = \frac{a}{ml} \quad . \end{aligned}$$

osservazione:

$$\bar{A} \text{ cost. del moto} \Rightarrow \bar{B} = \dot{\bar{r}} - \frac{k}{l} \bar{e}_0 \quad \bar{e} \text{ cost. del moto}$$

$$\underline{\text{Dim.}} \quad m\bar{B} \times \bar{M} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - \frac{k}{l} \bar{e}_0 \times l\bar{e}_2 = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - k\bar{e}_r = \bar{A} //$$

$\bar{p}$   $\longleftrightarrow$  traslazioni

$\bar{M}$   $\longleftrightarrow$  rotazioni in  $\mathbb{R}^3$   $SO(3)$   $OO^T = \mathbb{1}$

$\uparrow$   
3 parametri  
continui

$SO(4)$

$\uparrow$   
6 parametri  
continui

$\bar{A}$   $\longleftrightarrow$  ?

+ 3 parametri  
continui

Simmetrie di  $L$   
moto centrale:  
 $SO(3)$

3 param. cont.

$\downarrow$  Teor. Noth

3 cost. del mot.

$(M_x, M_y, M_z)$

moto kepleriano  
 $SO(4)$

6 param. cont.

$\downarrow$  Teor. Noth

6 cost. del mot.

$(M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z)$

$SO(d)$ : rotazioni in  $\mathbb{R}^d \rightarrow$  parametrizzate da matrici  
antisimm.  $d \times d$ , che hanno  
 $\binom{d}{2} = \frac{d!}{2!(d-2)!} = \frac{d(d-1)}{2}$  parametri.

$SO(2)$ : rotaz. in  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \binom{2}{2} = 1$  parametro

$SO(3)$ : rotaz. in  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \binom{3}{2} = 3$  parametri

$SO(4)$ : rotaz. in  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \binom{4}{2} = 6$  parametri

**Osservazione.** Le costanti del moto sono funzioni definite sullo spazio degli stati ( $2n$ -dimensionale)  
 $I(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ .

Per ridurre il problema da  $n$  a  $n-1$  gradi di libertà ho in generale bisogno di 2 cost. del moto: Qte ci dovrebbe due relazioni

$$\begin{cases} I_1(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = I_1^0 \\ I_2(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = I_2^0 \end{cases}$$

da cui potremmo esplicitare  $\mu$  es.  $q_n$  e  $\dot{q}_n$  in funt. delle  $q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}$ . Quindi se determinassimo il moto in  $(n-1)$ -dim, cioè le funt.  $q_1(t), \dots, q_{n-1}(t)$ , allora  $q_n(t) = q_n(q_1^{(t)}, \dots, q_{n-1}^{(t)}, \dot{q}_1^{(t)}, \dots, \dot{q}_{n-1}^{(t)})$  è determinato.

[Qto è il caso visto in cui usando  $M_x$  e  $M_y$  riduciamo il problema centrale da  $n=3$  a  $n=2$ .]

In casi particolari, invece, basta 1 cost. del moto per ridurre il problema da  $n$  a  $n-1$  gradi di lib. È il caso di quod troviamo una COORD CICLICA.

[Qto è il caso in cui usando  $M_z$  riduciamo il problema centrale da  $n=2$  a  $n=1$ .]

Vedremo meglio qto aspetto in meccanica Hamiltoniana.

LEGGE ORARIA (cioè soluzione delle eq. del moto)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))} \rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}} \rightarrow t(r) \xrightarrow{\text{inversione}} r(t) \quad (*)$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \rightarrow t = \frac{m}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\tilde{\theta})^2 d\tilde{\theta} \rightarrow t(\theta) \xrightarrow{\text{invers}} \theta(t)$$

caso Kepleriano  $\rightarrow$

$$= \frac{m}{l} \frac{l^2}{m^2 k^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{[1 + e \cos(\tilde{\theta} - \theta')]^2}$$

Integrali da fare non sono complicati e quindi  $t(r)$  e  $t(\theta)$  sono esprimibili in termini di funzioni elementari. Quello che è complicato spesso è l'INVERSIONE di pt. funzioni per ottenere  $r(t)$  e  $\theta(t)$

Esempio: prendiamo  $\theta' = 0$  ( $\theta = 0$  è il periclio, cioè  $r_{min}$ ) e consideriamo la traiettoria PARABOLICA ( $e=1$ )

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + \cos\tilde{\theta})^2} = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(\cos\frac{\tilde{\theta}}{2})^2 (\cos\frac{\tilde{\theta}}{2})^2}$$

$\frac{1 + \cos d}{2} = \cos^2 \frac{d}{2}$

$$x = \text{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\sin \tilde{\theta}/2}{\cos \tilde{\theta}/2}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{tg} \theta/2 \\ \int_0^{\theta} dx (1+x^2) \end{array} \right) = \frac{l^3}{2mk^2} \left[ \text{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right] = t(\theta)$$

$t(\theta)$  è una funzione semplice, ma per ottenere  $\theta(t)$  bisogna risolvere un'equazione CUBICA (complicato) e infine INVERTIRE la tangente.

[ Osservazione:  $\theta=0 \leftrightarrow t=0$        $\theta=\pm\pi \leftrightarrow t \rightarrow \pm\infty$   
(consist. con traiettorie possibili) ]

Una volta che abbiamo ottenuto  $\theta(t)$ , per trovare  $r(t)$ :

1) risolvere (\*)

2) siccome conosciamo  $r(\theta)$ :

$$r(t) = r(\underline{\theta(t)})$$

Ovviamente per trovare  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  possiamo seguire il solito metodo dei problemi ridotti: prima risolviamo (\*) ottenendo la funz.  $r(t)$ ; successivamente si mette  $r(t)$  trovate in  $\theta = \int_{t_0}^t \frac{l}{m r(t)^2} dt$  ottenendo  $\theta(t)$ .