TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI DI PERSONE

VALUTAZIONI NELLE ASSICURAZIONI VITA

Ermanno Pitacco

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

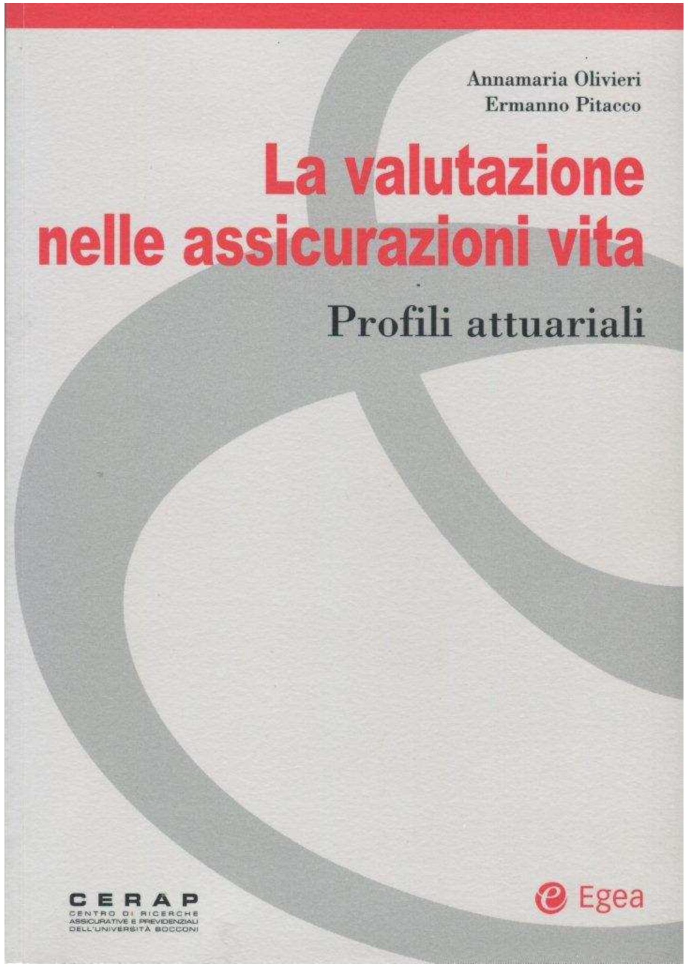
DEAMS

Agenda

1. Dai valori attuariali ai “value-based models”
2. Valutazioni di portafogli
3. Il profit testing
4. Il modello di valutazione con capitale proprio
5. Indici

Agenda

Riferimento bibliografico



A. Olivieri, E. Pitacco (2005)

La valutazione
nelle assicurazioni vita.
Profili attuariali

EGEA, Milano

1 DAI VALORI ATTUARIALI AI “VALUE-BASED MODELS”

ACCEZIONE CLASSICA

La nozione di “valore” (in Matematica attuariale) è riferita ai flussi di contratto (premi, benefici, spese, . . .)

Valutazioni a fini di pricing, riserva o analisi di redditività

- “valore” = valore attuale atteso (principio di equità)
- scenario (struttura a termine dei tassi, tavola di mortalità) deterministico
  - ▷ descrizione *prudenziale*: calcolo di premi e calcolo (tradizionale) di riserve $\Rightarrow$ base tecnica 1° ordine
  - ▷ descrizione *realistica*: analisi di cash flow e di redditività e calcolo di riserve “realistiche” $\Rightarrow$ base tecnica 2° ordine

Analisi di rischio

- tradizionalmente orientate alla valutazione dei rischi biometrici (originati solo da scarti accidentali)
- più recentemente anche rischi finanziari

ESTENSIONI DELLA NOZIONE DI VALORE

Considerazione del *capitale proprio*

- valutazioni dal punto di vista di soggetti diversi (azionisti, management dell’impresa, autorità di controllo, . . .)
  - ▷ dal punto di vista degli azionisti (o del management): ottica di “shareholder value” $\Rightarrow$ creazione di valore

Aleatorietà dei flussi

- considerata in vari momenti della valutazione
  - ▷ pricing delle embedded options
  - ▷ riserve “addizionali”
  - ▷ allocazione del capitale (analisi dei rischi in senso più ampio dell’accezione tradizionale; accertamento della solvibilità)
  - ▷ ALM
- considerazione anche dei rischi di scarti sistematici, in particolare longevity risk (aggregato) $\Rightarrow$ modelli stocastici per gli scenari

EVOLUZIONE DEL CONCETTO DI VALORE

Dal “valore tecnico” di portafoglio all’Appraisal Value

Valore tecnico del portafoglio polizze

- valore attuale atteso dei flussi “industriali” del portafoglio esistente (relativi all’esercizio dell’“industria” assicurativa), su base realistica
- concetto più moderno: *Present Value of Future Profits* (*PVFP*)
- differenza tra i due concetti: tasso di valutazione

Value of in-force portfolio (VIF)

- valore attuale atteso (realistico) dei flussi industriali, tenendo conto del costo del *capitale proprio allocato* al portafoglio; oppure
- valore attuale atteso dei flussi di capitale proprio (“utili distribuibili”)

quantificazioni coincidenti (a parità di ipotesi)

Dai valori attuariali ai “value-based models” *(cont.)*

Excess capital

- capitale proprio “libero”, cioè non allocato a specifici portafogli
- detto anche *free surplus* o *residual assets*

Embedded value

- VIF (relativo al portafoglio complessivo) + capitale proprio (totale)
- riferito all’impresa

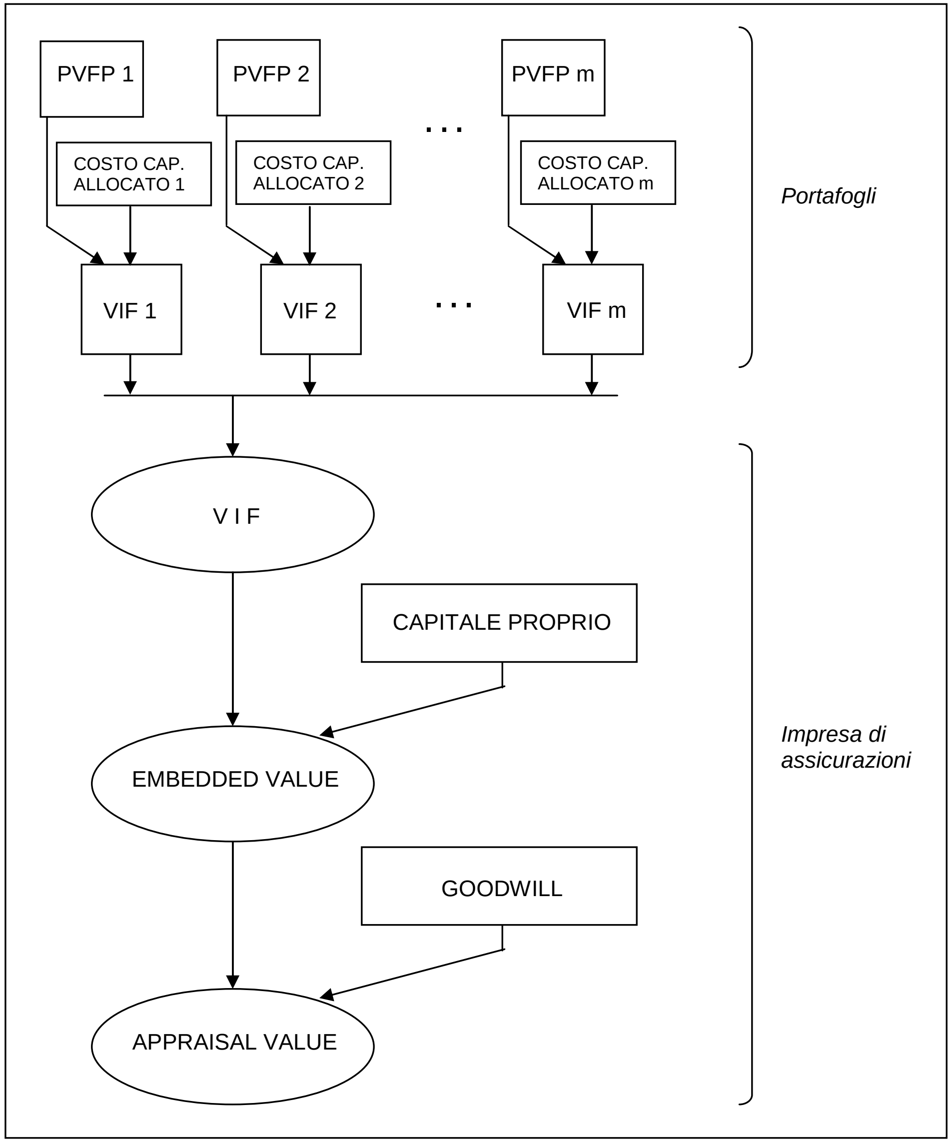
Goodwill

- valore della produzione futura
- dipende dalla capacità dell’impresa di acquisire nuovi contratti

Appraisal value

- embedded value + goodwill
- riferito all’impresa misura la capacità di “produrre”
- quantificazione con metodo attuariale del *valore economico*

Dai valori attuariali ai “value-based models” *(cont.)*



Nozioni di “valore” riferite ai portafogli e all’impresa

Fair value

- concetto recentemente introdotto (anche nella tecnica attuariale) in relazione all’adozione di nuovi standard contabili
- valore di mercato di un attivo (asset) o di un passivo (liability), relativamente ad un mercato con specificate caratteristiche
- fair value dell’impresa = fair value assets - fair value liabilities
- per un’impresa assicuratrice (o per un portafoglio):
  - ▷ il fair value degli assets è ricavabile dal loro *market value*
  - ▷ difficoltà nella definizione e quantificazione del fair value delle liabilities, a causa della mancanza di un adeguato mercato in cui possono essere trattate

Entity specific value

- in assenza di evidenza del mercato o in relazione a specifiche condizioni operative: valore di una liability o di un asset per l’impresa che lo detiene

EVA®

- Economic Value Added (EVA®): valore prodotto dalla gestione, in un dato anno, in eccesso rispetto al costo del capitale

Approcci alla valutazione

- Vari metodi di valutazione, in base agli specifici obiettivi

Impostazione comune: *VAN* (Valore Attuale Netto) o *DCF* (Discounted Cash Flow)

- “valore” = valore attuale di flussi futuri
- gli specifici obiettivi ne individuano particolari implementazioni

Elementi di scelta nell’implementazione dello schema del VAN

- tipo di flussi
- orizzonte temporale
- tasso di attualizzazione (o di valutazione)
- struttura probabilistica per la (eventuale) quantificazione dell’aleatorietà

Scelta dei flussi

Conduce all’adozione di un particolare *criterio di valutazione*

- *flussi monetari* (*cash flows*) $\Rightarrow$ *criterio di cassa*
  - ▷ nuova liquidità “industriale”
  - ▷ liquidità reimpiegabile nel processo produttivo
  - ▷ liquidità distribuibile agli azionisti
  - ▷ ...
- *utili* $\Rightarrow$ *criterio reddituale*
  - ▷ utile operativo (o “industriale”)
  - ▷ utile totale
  - ▷ ...
- *assets, liabilities, capitale proprio* $\Rightarrow$ *criterio patrimoniale*
  - ▷ variazione degli assets e delle liabilities e quindi del capitale proprio

Scelta dell’orizzonte temporale

- nel caso del *portafoglio esistente* $\Rightarrow$ individuata dalla massima durata residua delle polizze in portafoglio
- nel caso dell’*excess capital* $\Rightarrow$ implicita nei valori di mercato dei *residual assets*
- nel caso della *produzione futura* $\Rightarrow$ fissata dal valutatore (in genere: proiezione flussi fino ad una data epoca + valore sintetico di quelli successivi)

Scelta del tasso di attualizzazione

- rendimento atteso dagli investimenti relativi alle riserve matematiche
- rendimento atteso da investimenti alternativi
- costo-opportunità del capitale proprio
- tasso risk-adjusted sulla base di parametri di mercato
- ...

Scelta della struttura probabilistica

- *Approccio deterministico*: assegnazione di un valore certo ad ogni flusso aleatorio, cioè costruzione di uno *scenario* (futuri rendimenti degli investimenti, numeri di assicurati in vita nei vari anni, ecc.)
  - ▷ scenario *best estimate* basato su:
    - ○ valori modali (max probabilità)
    - ○ valori medi
  - ▷ insieme di scenari, cioè di determinazioni alternative
    $\Rightarrow$ *scenario testing* (confronto tra i valori assunti da alcuni risultati nei diversi scenari)
- *Approccio stocastico*: assegnazione della distribuzione di probabilità ai flussi aleatori
  - ▷ costruzione della distribuzione di probabilità (usualmente in via simulativa) di alcuni risultati (flussi monetari, utili, ecc.)

- ASS. NE MISTA ORDINARIA :
  - CAPITALE C IN CASO DI DECESSO
  - CAPITALE S IN CASO DI SOPRAVVIVENZA ALLA SCADENZA
  - ETÀ D'INGRESSO x E DURATA n ANNI
  - BASE TECNICA DI I° ORDINE, (i', q'_x)
  - PREMIO ANNUO COSTANTE, P, PER m ANNI.

a) VALORE ATTUARIALE IN $t=0$: $A'_{x,\overline{n}|} = C \, {}_{n}A'_x + S \, {}_{n}E'_x = C \sum_{h=0}^{n-1} (1+i')^{-h} \, {}_{h/1}q_x + S (1+i')^{-n} \, {}_{n}p_x$

b) PREMIO P ANNUO COSTANTE : $P = \dfrac{A'_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}|}}$

c) RISERVA MATEMATICA PROSPETTIVA : $V_t = A'_{x+t,\overline{n-t}|} - P \, \ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|}$

↳ CON EQ. RICORRENTE (KANNER) : $(V_t + P)(1+i') = \underbrace{(C - V_{t+1})}_{\text{"CAPITALE SOTTO-RISCHIO"}} q'_{x+t} + V_{t+1}$

↳ SCOMPOSIZIONE DEL PREMIO ALL'ISTANTE t :

$$P = \underbrace{(C - V_{t+1})(1+i')^{-1} q'_{x+t}}_{\text{PREMIO DI RISCHIO, } P^{(R)}} + \underbrace{\left(V_{t+1}(1+i')^{-1} - V_t\right)}_{\text{PREMIO DI RISPARMIO, } P^{(S)}}$$

NOTA: VALUTAZIONE REALISTICA FATTA SECONDO LA BASE TECNICA DI II° ORDINE: (i'', q''_x)

DAL SUO IMPIEGO RISULTA CHE:

$$(V_t + P)(1+i'') = (C - V_{t+1})\, q''_{x+t} + V_{t+1}$$

↓

ATTENZIONE! NON È DETTO CHE QUESTA UGUAGLIANZA SUSSISTA. INFATTI, L'ASS.RE STABILISCE UNA BASE TECNICA (i', q'_x) AD ESSO FAVOREVOLE E, PER CUI, $i' \neq i''$ E/O $q'_x \neq q''_x$.

↓

LA DIFFERENZA TRA LE 2 BASI TECNICHE È FAVOREVOLE ALL'ASS.RE NEL SENSO CHE:

1) GLI PERMETTE DI POTER DEFINIRE UN CARICAMENTO DI SICUREZZA INGLOBATO NEL PREMIO PURO. TALE CARICAMENTO HA LO SCOPO DI FINANZIARE MANIFESTAZIONI ACCIDENTALI, OVVERO SCARTI ACCIDENTALI TRA COMPORTAMENTO ATTESO E QUELLO CHE EFFETTIVAMENTE AVRÀ IL RISCHIO ASSICURATO;

2) GLI PERMETTE DI REALIZZARE UN UTILE (ATTESO). L'UTILE È DA INTENDERSI SIA POSITIVO (UTILE IN SENSO STRETTO) CHE NEGATIVO (PERDITA).

LA DIFFERENZA TRA LE 2 BASI TECNICHE IMPLICA CHE:

$$\begin{cases} (V_t + P)(1+i') - (C - V_{t+1})\, q'_{x+t} - V_{t+1} = 0 \\ (V_t + P)(1+i'') - (C - V_{t+1})\, q''_{x+t} - V_{t+1} = \underbrace{u_{t+1}}_{\text{UTILE ATTESO IN } (t,t+1)} \gtrless 0 \end{cases} \quad (1)$$

→ SOTTRAENDO LA I^a DALLA II^a EQ., SI HA LA NOTA FORMULA DI HOMANS:

$$u^*_{t+1} = \underbrace{(V_t + P)(i'' - i')}_{{}_F u^*_{t+1} \gtrless 0} + \underbrace{(C - V_{t+1})(q'_{x+t} - q''_{x+t})}_{{}_D u^*_{t+1} \gtrless 0}$$

${}_F u^*_{t+1} \gtrless 0$ ↓ UTILE O MARGINE FINANZIARIO ↓ DIPENDE DALLA RELAZIONE TRA i'' E i':

- i'' = RENDIMENTO ATTESO DEGLI ATTIVI
- i'' = TASSO DI VALUTAZIONE DI ALTRA NATURA

⋮

QUALE TASSO PRENDERE?

${}_D u^*_{t+1} \gtrless 0$ ↓ UTILE O MARGINE DEMOGRAFICO ↓ DIPENDE DAL SEGNO DEL CAPITALE SOTTO-RISCHIO.

• SUPPONIAMO CHE IL CONTRATTO ASS.NO SIA IN VITA AI VARI ANNIVERSARI t.

↳ AL MOMENTO, STIAMO IMPLICITAMENTE ASSUMENDO CHE L'UNICA CAUSA DI ELIMINAZIONE DEL CONTRATTO SIA IL DECESSO DELL'ASS.TO.

↳ LA SUCCESSIONE $\left\{ u^*_{t+1} \right\}_{t=0}^{m-1}$ È DETTA "PROFIT PROFILE" E IL SUO VALORE ATTUALE ALL'EPOCA DI STIPULAZIONE DEL CONTRATTO È:

(VALORE ATTUALE DEGLI UTILI ANNUI ATTESI)

$$u^* = \sum_{t=0}^{m-1} u^*_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)}$$

↳ CONSIDERANDO CHE OGNI UTILE ANNUO ATTESO SARÀ REALIZZATO SE E SOLO IL CONTRATTO È IN VITA, OSSIA:

$$u^*_{t+1} = \begin{cases} u^*_{t+1} & \sim \ {}_t p''_x \\ 0 & \sim \ 1 - {}_t p''_x \end{cases} \xRightarrow{\text{ALL'EMISSIONE}} (1+i'')^{-(t+1)} u^*_{t+1}, \quad t = 0, \dots, m-1$$

L'UTILE TOTALE ATTESO IN $t=0$ È:

$$(2) \qquad u_{(0,m)} = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-(t+1)} u^*_{t+1} \right] = \sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-(t+1)} u^*_{t+1} \cdot {}_t p''_x$$

↳ LA SUCCESSIONE $\left\{ u^*_{t+1} \, {}_tp^*_x \right\}_{t=0}^{m-1}$ PRENDE IL NOME DI "PROFIT SIGNATURE".

<u>NOTA</u>: L'UTILE TOTALE ATTESO, E GLI UTILI ANNUI ATTESI, POSSONO ESSER RICOSTRUITI GUARDANDO AI CASH FLOW ANNUI ATTESI DAL CONTRATTO, OSSIA:

$$(3) \begin{cases} f^*_{t+1} = P(1+i'') - C q''_{x+t} , & t=0,\dots,m-2 \\ f^*_m = P(1+i'') - C q''_{x+m-1} - S p''_{x+m-1} , & t=m-1 \end{cases}$$

OVVERO, IL CASH FLOW ANNUO ATTESO È VALUTATO PROBABILISTICAMENTE IN t E FINANZIARIAMENTE IN $t+1$, E RAPPRESENTA LA DIFFERENZA TRA L'ENTRATA DI PREMIO E IL POSSIBILE ESBORSO PER IL BENEFICIO.

↳ <u>NOTA</u>: LA DIFFERENZA TRA QUESTE 2 QUANTITÀ PERMETTE DI CAPIRE SE NELL'ANNO $(t,t+1)$ L'ASS.RE REGISTRERÀ UN UTILE O UNA PERDITA, AL NETTO DELLE VARIAZIONI DELLA RISERVA MATEMATICA, OSSIA:

$$(4) \begin{cases} u^*_{t+1} = P(1+i'') - C q''_{x+t} = f^*_{t+1} , & t=0,\dots,m-2 \\ u^*_m = P(1+i'') - C q''_{x+m-1} - S p''_{x+m-1} = f^*_m , & t=m-1 \end{cases}$$

NOTA: LE EQ. DI CUI AL SISTEMA (4) PRESUPPONGONO CHE $^{a}\!\sqrt{}$ SIANO RISERVE MATEMATICHE NULLE AD OGNI ANNIVERSARIO, A MENO DELLA SCADENZA IN CUI $V_n = S$.
DUNQUE, È LOGICO IN TAL CASO CHE GLI UTILI SCATURISCANO DA FLUSSI MERAMENTE DI CASSA. IN REALTÀ, LA RISERVA GIOCA UN RUOLO FONDAMENTALE NELLA DEFINIZIONE DEGLI UTILI, POICHÈ:

a) LE RISERVE SONO INVESTITE E, DUNQUE, GENERANO UN RENDIMENTO CHE PARTECIPA ALLA MATURAZIONE DELL'UTILE FINANZIARIO;

b) LE RISERVE SONO ACCANTONATE FIN TANTO CHE IL CONTRATTO È IN VITA, ALTRIMENTI L'ACCANTONAMENTO VIENE "LIBERATO".

ANALITICAMENTE, LE OSSERVAZIONI POSTE EMERGONO RIPRENDENDO LA DEFINIZIONE DI UTILE ANNUO ATTESO (EQ. (1)) E NOTANDO CHE:

$$(5)\quad \begin{cases} u^*_{t+1} = (V_t + P)(1+i'') - V_{t+1} - (C - V_{t+1})\, q''_{x+t} = V_t(1+i'') + P(1+i'') - V_{t+1} - C q''_{x+t} + V_{t+1}\, q''_{x+t} = \\ \quad = f^*_{t+1} + V_t\, i'' - (V_{t+1}\, p''_{x+t} - V_t) \qquad , \quad t = 0, \dots, n-2 \\ u^*_n = f^*_n + V_{n-1}\, i'' + V_{n-1} \qquad , \quad t = n-1 \end{cases}$$

NOTA: NEL SISTEMA (5), LE QUANTITÀ:

a) f^*_{t+1} È IL CASH FLOW ANNUO ATTESO IN $(t,t+1)$;

b) $V_t \cdot i''$ È IL PROVENTE FINANZIARIO IN $(t,t+1)$ DERIVANTE DALL'INVESTIMENTO DELLE RISERVE;

c) $(V_{t+1}\, p''_{x+t} - V_t)$ È IL SALTO ATTESO DI RISERVA NELL'ANNO $(t,t+1)$

NOTA: ALL'EMISSIONE DEL CONTRATTO ASS.VO, L'UTILE TOTALE ATTESO E IL CASH FLOW TOTALE ATTESO COINCIDONO, DOVE PER CASH FLOW TOTALE ATTESO INTENDIAMO LA QUANTITÀ:

$$f_{(0,m)} = \sum_{t=0}^{m-1} f^*_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \cdot {}_t p''_x$$

INFATTI:

$$u_{(0,m)} = \sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x \, u^*_{t+1} = \sum_{t=0}^{m-1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x \cdot \left[(V_t + P)(1+i'') - V_{t+1} - (C - V_{t+1})\, q''_{x+t} \right] =$$

$$= \sum_{t=0}^{m-1} V_t (1+i'')(1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x + \sum_{t=0}^{m-1} P(1+i'')(1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x - \sum_{t=0}^{m-1} \Big[\underbrace{V_{t+1} + (C - V_{t+1})\, q''_{x+t}}_{= V_{t+1}\, p''_{x+t} + C\, q''_{x+t}} \Big] (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{m-1} V_t (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x + \sum_{t=0}^{m-1} P (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x - \sum_{t=0}^{m-1} V_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \underbrace{p''_{x+t} \, {}_t p''_x}_{= {}_{t+1} p''_x} - \sum_{t=0}^{m-1} C (1+i'')^{-(t+1)} \, q''_{x+t} \, {}_t p''_x = (*)$$

NOTA: IN $\circledast$ SI HA CHE: $\displaystyle\sum_{t=0}^{m-1} V_t (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x - \sum_{t=0}^{m-1} V_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_{t+1}p''_x =$

"SOMMA TELESCOPICA"

$$\sum_{t=0}^{m-1} (a_{t+1} - a_t) = a_m - a_0$$

CON: $a_{t+1} = V_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_{t+1}p''_x$

$a_t = V_t (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x$

$$= -\left(\sum_{t=0}^{m-1} V_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_{t+1}p''_x - V_t (1+i'')^{-t} \, {}_t p''_x \right) = -\left(\underbrace{V_m}_{=S} (1+i'')^{-m} \, {}_m p''_x - \underbrace{V_0}_{=0} \right) =$$

$$= -S (1+i'')^{-m} \, {}_m p''_x$$

▷ SOSTITUENDO IN $\circledast$ SI HA:

$$\overset{\circledast}{=} -S(1+i'')^{-m} \, {}_m p''_x + \sum_{t=0}^{m-1} P(1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x - \sum_{t=0}^{m-1} C(1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x \cdot q''_{x+t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{m-1} \left(P(1+i'') - C q''_{x+t}\right)(1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x - S(1+i'')^{-m} \underbrace{{}_m p''_x}_{} = \; \longrightarrow \; = {}_{m-1}p''_x \cdot p''_{x+m-1}$$

$$= \sum_{t=0}^{m-2} \underbrace{\left(P(1+i'') - C q''_{x+t}\right)}_{f^*_{t+1}} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x + \underbrace{\left(P(1+i'') - C q''_{x+m-1} - S\, p''_{x+m-1}\right)}_{f^*_m} (1+i'')^{-m} \, {}_{m-1}p''_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{m-2} f^*_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x + f^*_m (1+i'')^{-m} \, {}_{m-1}p''_x = \sum_{t=0}^{m-1} f^*_{t+1} (1+i'')^{-(t+1)} \, {}_t p''_x = f(0,m)$$

2 VALUTAZIONI DI PORTAFOGLI

L'UTILE TOTALE

Valutazione di utili attesi: uno dei più importanti compiti della matematica e tecnica attuariale

In matematica attuariale, in particolare:

- confronto tra valori attuariali (alla stipulazione di un contratto) calcolati con base del primo e del secondo ordine rispettivamente
- valutazione degli utili annui attesi in funzione del profilo della riserva matematica

Varie estensioni possibili (e necessarie); in particolare

- ▷ riferimento a un portafoglio di contratti
- ▷ considerazione di spese e caricamenti per spese
- ▷ considerazione di abbandoni (storni, riscatti) e alterazioni contrattuali

Prodotto assicurativo considerato: assicurazione mista

- capitale caso vita S
- capitale caso morte C
- età all'ingresso x
- durata m anni
- premio livellato P (premio netto) pagabile per m anni

$$P = \frac{C\,{}_mA'_x + S\,{}_mE'_x}{\ddot{a}'_{x:m\rceil}}$$

Inizialmente non consideriamo

- spese e caricamenti
- abbandoni e trasformazioni

Il fondo di portafoglio (Life fund)

Riferimento: portafoglio di polizze “identiche”, emesse in $t = 0$, chiuso a nuovi ingressi ($\Rightarrow$ una generazione)

Notazione

- N_0 = numero iniziale (certo) di contratti
- N_t = numero aleatorio di contratti in portafoglio al tempo t
- $D_t = N_t - N_{t+1}$ = numero aleatorio di decessi tra t e $t+1$
- $F_t^{[\mathrm{P}]}$ = fondo di portafoglio (life fund) al tempo t, $t = 0, 1, \ldots, m$

Ipotesi:

$$F_0^{[\mathrm{P}]} = 0$$

Secondo l’informazione disponibile al tempo 0:

$$(F_t^{[\mathrm{P}]} + P\,N_t)(1 + i'') - C\,D_t = F_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$(F_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P\,N_{m-1})(1 + i'') - C\,D_{m-1} - S\,N_m = F_m^{[\mathrm{P}]}$$

Notare:

- i'' = stima (realistica) del rendimento degli investimenti
- unica causa di aleatorietà: mortalità; possibile introduzione di aleatorietà nei rendimenti ($\Rightarrow$ complicazioni modellistiche)
- importo $F_t^{[\mathrm{P}]}$
  - ▷ se positivo: attivi accumulati fino a t, escludendo allocazioni di capitale
  - ▷ se negativo (ad esempio a causa di elevata mortalità): necessità di prendere denaro a prestito
- ipotesi $F_0^{[\mathrm{P}]} = 0$: non realistica (necessità di allocazione iniziale di capitale per abbassare la probabilità di $F_t^{[\mathrm{P}]} < 0$), ma semplifica le interpretazioni
- importo finale $F_m^{[\mathrm{P}]}$: al netto dei benefici pagati in m $\Rightarrow$ utile aleatorio totale

Fondo atteso di portafoglio ed utile atteso totale

Notazione: $\bar{N}_t = \mathbb{E}[N_t]$, $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} = \mathbb{E}[F_t^{[\mathrm{P}]}]$, ...

Calcolo valori attesi in base alla base realistica $\mathrm{TB2}$ (tavola di mortalità e rendimento i'')

Risulta (secondo l'informazione disponibile in 0):

$$\bar{N}_t = N_0 \; {}_t p''_x$$

$$\bar{D}_t = N_0 \; {}_{t|1} q''_x$$

con ${}_t p''_x$ e ${}_{t|1} q''_x$ ricavati dalla tavola realistica

In termini di valori attesi:

$$(\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} + P\ \bar{N}_t)(1+i'') - C\,\bar{D}_t = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$(\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P\ \bar{N}_{m-1})(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$$

$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$ = utile atteso totale, cumulato alla fine della durata del portafoglio

Osservazione

> Linearità delle relazioni tra le quantità aleatorie $F_t^{[\mathrm{P}]}$, N_t, D_t $\Rightarrow$ analoghe relazioni lineari tra valori attesi

Dalle relazioni ricorrenti $\Rightarrow$ espressioni esplicite per i valori attesi del fondo:

$$\bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{t} \left(P \; \bar{N}_h (1+i'') - C \, \bar{D}_h\right) (1+i'')^{t-h}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} \left(P \; \bar{N}_h (1+i'') - C \, \bar{D}_h\right) (1+i'')^{m-(h+1)} - S \, \bar{N}_m$$

Quantità

$$\overline{CF}^{[\mathrm{P}]}_{h+1} = P\,\bar{N}_h(1+i'') - C\,\bar{D}_h; \quad h = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\overline{CF}^{[\mathrm{P}]}_{m} = P\,\bar{N}_{m-1}(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

= valori (alla fine del generico anno) dei cash-flow annui attesi

$\Rightarrow$ $\bar{F}^{[\mathrm{P}]}_{t+1}$ = valore accumulato di tutti i cash-flow fino al tempo $t+1$

$\Rightarrow$ in particolare, $\bar{F}^{[\mathrm{P}]}_{m}$ = valore accumulato di tutti i cash-flow, fino a scadenza (inclusa)

Esempio 1

Portafoglio di assicurazioni temporanee caso morte
($\Rightarrow\ C > 0$, $S = 0$)
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})\ \Rightarrow\ P = 1.93$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Vedi Tabella seguente

t	$\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}$	$\bar{N}_t$	$P\ \bar{N}_t$	$C\ \bar{D}_t$	$\overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}$
0	0.00	10 000.00	19 265.25	10 879.26	8 963.95
1	8 963.95	9 989.12	19 244.29	12 035.23	7 786.38
2	17 019.25	9 977.09	19 221.10	13 316.31	6 481.43
3	24 011.26	9 963.77	19 195.45	14 735.32	5 036.00
4	29 767.59	9 949.03	19 167.06	16 306.38	3 435.69
5	34 096.31	9 932.73	19 135.65	18 045.01	1 664.71
6	36 783.91	9 914.68	19 100.88	19 968.17	−294.26
7	37 593.17	9 894.71	19 062.41	22 094.41	−2 460.13
8	36 260.84	9 872.62	19 019.85	24 443.96	−4 853.51
9	32 495.15	9 848.18	18 972.76	27 038.79	−7 496.85
10	25 973.16	9 821.14			

Il fondo di un portafoglio di assicurazioni temporanee caso morte

Esempio 2

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie ($\Rightarrow\; S = C$)
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Vedi Tabella seguente

t	$\bar{F}_t^{[P]}$	$\bar{N}_t$	$P\ \bar{N}_t$	$C\ \bar{D}_t$	$S\ \bar{N}_m$	$\overline{CF}_{t+1}^{[P]}$
0	0.00	10 000.00	595 400.00	30 447.33	−−	582 804.13
1	582 804.13	9 969.55	593 576.97	33 663.70	−−	577 720.57
2	1 178 008.83	9 935.89	591 572.66	37 208.60	−−	572 111.24
3	1 785 460.33	9 898.68	589 357.30	41 112.36	−−	565 925.66
4	2 404 949.80	9 857.57	586 909.51	45 407.36	−−	559 109.43
5	3 036 207.73	9 812.16	584 206.01	50 128.03	−−	551 604.16
6	3 678 898.12	9 762.03	581 221.43	55 310.67	−−	543 347.41
7	4 332 612.47	9 706.72	577 928.29	60 993.35	−−	534 272.79
8	4 996 863.64	9 645.73	574 296.81	67 215.59	−−	524 310.13
9	5 671 079.68	9 578.51	570 294.86	81 441.57	−−	501 422.98
10	6 354 597.82	9 504.50	561 038.96	98 315.09	−−	474 064.76
13	8 452 858.09	9 235.21	549 855.02	107 842.36	−−	458 508.31
14	9 164 952.14	9 127.37	543 434.19	118 138.69	−−	−8 567 631.47
15	872 269.24	9 009.23			9 009 230.00	

Il fondo di un portafoglio di assicurazioni miste ordinarie

Utile totale: interpretazione alternativa

Sia $\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}$ il valore attuale in 0 dell'utile (o perdita) atteso totale

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} \, (1 + i'')^{-m}$$

In base all'espressione di $\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} P \, \bar{N}_h \, (1+i'')^{-h} - \sum_{h=0}^{m-1} C \, \bar{D}_h \, (1+i'')^{-(h+1)} - S \, \bar{N}_m \, (1+i'')^{-m} \qquad (*)$$

Sia P'' il premio di secondo ordine (calcolato con la $\mathrm{TB2}$):

$$P'' \, \ddot{a}''_{x:m\rceil} = C \; {}_m A''_x + S \; {}_m E''_x$$

cioè

$$\sum_{h=0}^{m-1} P'' \; {}_h p''_x \, (1 + i'')^{-h} = \sum_{h=0}^{m-1} C \; {}_{h|1} q''_x \, (1 + i'')^{-(h+1)} + S \; {}_m p''_x \, (1 + i'')^{-m}$$

A livello di portafoglio:

$$\sum_{h=0}^{m-1} P'' \, \bar{N}_h \, (1+i'')^{-h} = \sum_{h=0}^{m-1} C \, \bar{D}_h \, (1+i'')^{-(h+1)} + S \, \bar{N}_m \, (1+i'')^{-m}$$

In base alla $(*)$:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} (P - P'') \bar{N}_h \, (1+i'')^{-h}$$

$$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} (P - P'') \, \bar{N}_h \, (1+i'')^{m-h}$$

Quantità $(P - P'')\bar{N}_h$ = margine atteso di premio a livello di portafoglio

Esempio

Portafogli di

- temporanee caso morte
- miste ordinarie

Dati come negli esempi precedenti

Prodotto assicurativo	P	P''	$P - P''$
Assicurazione temporanea	1.93	1.71	0.22
Assicurazione mista	59.54	54.84	4.70

Margini di premio individuali

t	$(P - P'')\,\bar{N}_t$	
	Assic. temporanea	Assic. mista
0	2 213.33	47 009.59
1	2 210.92	46 866.46
2	2 208.26	46 708.21
3	2 205.31	46 533.29
4	2 202.05	46 340.03
5	2 198.44	46 126.57
6	2 194.45	45 890.92
7	2 190.03	45 630.91
8	2 185.14	45 344.18
9	2 179.73	45 028.20
10		44 680.25
11		44 297.39
12		43 876.53
13		43 414.35
14		42 907.39

Margini attesi di premio nel portafoglio

RISERVA DI PORTAFOGLIO

Come la riserva matematica individuale, la riserva di portafoglio quantifica:

- il passivo dell'assicuratore per futuri benefici, al netto dei futuri premi
- l'attivo dell'assicuratore, risultato di accumulazione di parte dei premi, a fronte del passivo

Riserva di portafoglio ad un dato istante = somma delle riserve individuali in quell'istante, se:

▷ composizione del portafoglio nota (istante attuale)

▷ stesso approccio di calcolo e stessa base tecnica per riserve individuali e riserva di portafoglio

Agenda

- valutazione di riserve future di portafoglio, con la stessa base tecnica adottata nel calcolo delle riserve individuali, cioè la base prudenziale $\mathrm{TB1}$ $\Rightarrow$ *proiezione* della riserva di portafoglio
- valutazione della riserva di portafoglio con base diversa da $\mathrm{TB1}$, tenendo esplicitamente conto della rischiosità nel portafoglio

Obiettivi

- ▷ determinazione di utili attesi annui di portafoglio
- ▷ definizione di
  - ◦ riserva “realistica” ($V_t^{[\mathrm{real}]}$)
  - ◦ Safety Margin (SM_t)

Proiezione della riserva

Riferimento:

- assicurazioni miste ordinarie ($C = S$)
- portafoglio = una generazione costituita inizialmente da N_0 contratti "identici" (senza nuovi ingressi)
- N_t = numero aleatorio di contratti al tempo t
- V_t = riserva del generico contratto al tempo t

$$V_t = C\, A'_{x+t,n-t\rceil} - P\, \ddot{a}'_{x+t:n-t\rceil}$$

Riserva di portafoglio al tempo t (secondo lo stato di informazione in 0):

$$V_t^{[\mathrm{P}]} = N_t\, V_t; \quad t = 1, 2, \ldots$$

$V_t^{[\mathrm{P}]}$ importo aleatorio essendo N_t aleatorio

Assegnazione di determinazioni $n_1, n_2, \dots$ ai numeri aleatori $N_1, N_2, \dots \;\Rightarrow\;$ stima delle future riserve di portafoglio ("proiezione")

Riserva di portafoglio stimata:

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} = n_t V_t; \quad t = 1, 2, \dots$$

In particolare, se unica causa di uscita è il decesso, si può assumere:

$$n_t = \mathbb{E}[N_t] = N_0 \, {}_t p''_x; \quad t = 1, 2, \dots$$

con ${}_t p''_x$ = probabilità per un assicurato di età x di essere in vita ad età $x + t$, secondo base realistica $\mathrm{TB2}$. Si ha:

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} = \mathbb{E}[V_t^{[\mathrm{P}]}] = \mathbb{E}[N_t] \, V_t; \quad t = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow \; \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$ = *riserva attesa di portafoglio*

Esempio

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie ($\Rightarrow\ S = C$)
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \ \Rightarrow\ P = 59.54$
- $N_0 = 1\,000$
- $\mathrm{TB2} =$
  - ▷ $(0.03, \mathrm{LT2})$
  - ▷ $(0.03, \mathrm{LT3})$

Vedi Tabella seguente

Valutazioni di portafogli *(cont.)*

		LT2		LT3	
t	V_t	$\mathbb{E}[N_t]$	$\mathbb{E}[V_t^{[P]}]$	$\mathbb{E}[N_t]$	$\mathbb{E}[V_t^{[P]}]$
0	0.00	1 000.00	0.00	1 000.00	0.00
1	57.54	996.96	57 368.75	997.29	57 388.07
2	116.11	993.59	115 366.58	994.30	115 448.58
3	175.74	989.87	173 955.34	990.98	174 151.18
4	236.46	985.76	233 091.59	987.32	233 461.39
5	298.33	981.22	292 726.25	983.27	293 340.38
6	361.40	976.20	352 804.19	978.81	353 744.67
7	425.75	970.67	413 263.88	973.87	414 625.97
8	491.45	964.57	474 036.92	968.43	475 930.96
9	558.59	957.85	535 047.83	962.42	537 601.18
10	627.30	950.45	596 213.64	955.80	599 572.90
11	697.70	942.31	657 443.73	948.52	661 777.20
12	769.96	933.35	718 639.69	940.50	724 140.06
13	844.26	923.52	779 695.29	931.68	786 582.62
14	920.85	912.74	840 496.65	921.99	849 021.63
15	1 000.00	900.92	900 922.57	911.37	911 370.10

Proiezione della riserva di un portafoglio di assicurazioni miste

Riserva prudenziale e riserva realistica

Approccio tradizionale alla valutazione della riserva (in particolare in Europa continentale): impiego della base di primo ordine nell'attualizzazione di benefici e premi

- valutazione prudenziale del debito netto dell'assicuratore
- "grado" di prudenza implicito e non immediatamente quantificabile in termini di probabilità di non subire perdite

Definizione di un differente approccio, basato su considerazione esplicita dei rischi ed assegnato target di prudenzialità

Rif. assicurazione temporanea caso morte ($C > 0, S = 0$), premi annui costanti P pagabili per tutta la durata contrattuale; in particolare:

- ○ trascuriamo spese e relativi caricamenti
- ○ consideriamo il solo rischio mortalità, trascurando rischi di investimento, abbandoni, ecc

Valutazioni di portafogli *(cont.)*

Riserva matematica (tradizionale) al tempo t:

$$V_t = C\,{}_{m-t}A'_{x+t} - P\,\ddot{a}'_{x+t:\overline{m-t}|}$$

Si assuma, per attualizzare futuri benefici e premi, la base realistica $\mathrm{TB2}$ $\Rightarrow$ valutazione “realistica” della riserva, cioè *riserva realistica*:

$$V_t^{[\mathrm{real}]} = C\,{}_{m-t}A''_{x+t} - P\,\ddot{a}''_{x+t:\overline{m-t}|}$$

Assumendo che $\mathrm{TB1}$ si basi su mortalità maggiore di quella in $\mathrm{TB2}$:

$$ {}_{m-t}A''_{x+t} < {}_{m-t}A'_{x+t}$$

$$a''_{x+t:\overline{m-t}|} > a'_{x+t:\overline{m-t}|}$$

quindi:

$$V_t^{[\mathrm{real}]} < V_t$$

Differenza

$$V_t - V_t^{[\mathrm{real}]}$$

= margine di sicurezza implicato da $\mathrm{TB1}$ nella valutazione della riserva V_t

Osservazione

L'espressione "riserva realistica" è talvolta usata come traduzione di riserva "best-estimate". In questa sede:

- *riserva realistica* = riserva valutata con base realistica, cioè $\mathrm{TB2}$, in relazione sia alle probabilità sia al tasso di attualizzazione
- *riserva best-estimate* = riserva calcolata secondo i principi di Solvency 2, quindi, in particolare, con probabilità realistiche ma con tasso di attualizzazione risk-free

Margini di sicurezza implicito ed esplicito

Rif. ad una generazione di contratti assicurativi “identici”

Si assuma che, al tempo t, il portafoglio consista di N_t contratti (un numero dato)

Riserva di portafoglio tradizionale: $N_t\, V_t$

Riserva di portafoglio realistica: $N_t\, V_t^{[\mathrm{real}]}$

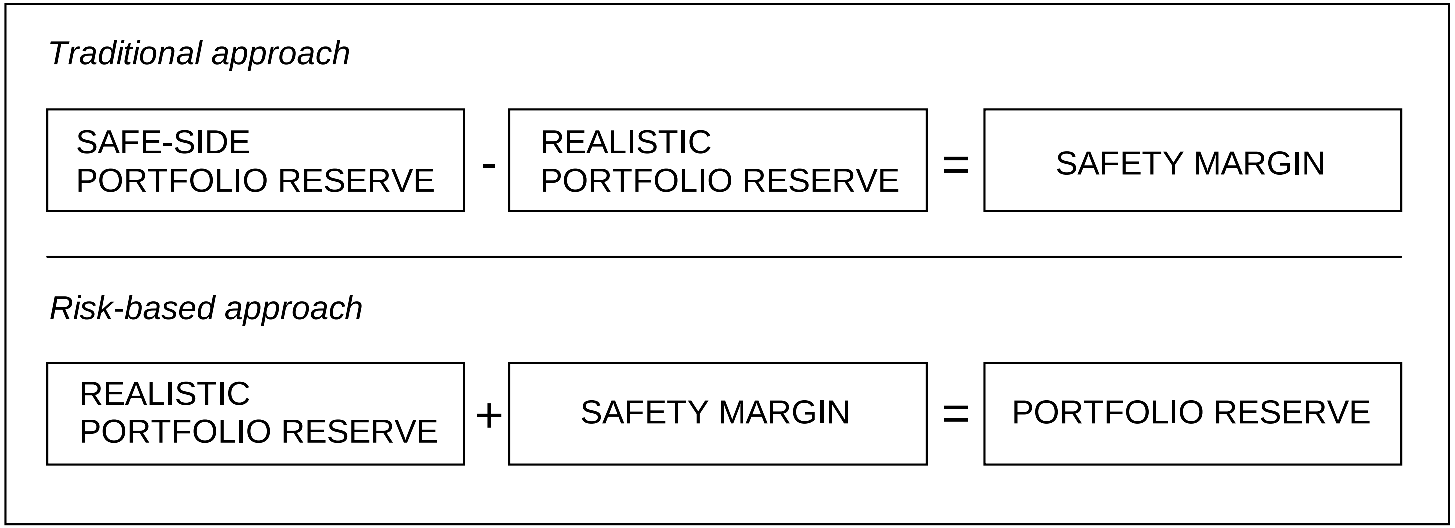
Margine di sicurezza (safety margin) *implicito* a livello di portafoglio:

$$SM_t = N_t\,(V_t - V_t^{[\mathrm{real}]})$$

Approccio corretto alla valutazione dei rischi $\Rightarrow$ appropriata quantificazione dell'impatto sui risultati di portafoglio, in termini probabilistici

Margine di sicurezza (safety margin) *esplicito* da determinare in base al profilo di rischio del portafoglio $\Rightarrow$ approccio *risk-based*

"Inversione" logica della procedura (vedi Figura)



Approcci alla valutazione della riserva di portafoglio

Calcolo del margine di sicurezza esplicito

Determiniamo il Safety Margin come margine esplicito di sicurezza, commisurato alla rischiosità del portafoglio

Consideriamo il solo rischio mortalità

Riferimento alle seguenti quantità aleatorie:

- N_{t+h} = numero aleatorio di contratti ancora in portafoglio in $t+h$
- $N_{t+h} - N_{t+h+1}$ = numero aleatorio di decessi nell'anno $t+h+1$, cioè tra $t+h$ e $t+h+1$
- $Y^{[\mathrm{P}]}(t,m)$ = valore attuale aleatorio al tempo t dei futuri benefici:

$$Y^{[\mathrm{P}]}(t,m) = C \sum_{h=0}^{m-t-1} (1+i'')^{-(h+1)} (N_{t+h} - N_{t+h+1})$$

- $X^{[\mathrm{P}]}(t,m)$ = valore attuale aleatorio al tempo t dei futuri premi:
$$X^{[\mathrm{P}]}(t,m) = P \sum_{h=0}^{m-t-1} (1+i'')^{-h} N_{t+h}$$

- $Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)$ = valore attuale aleatorio al tempo t del risultato di portafoglio sulla durata residua del portafoglio
$$Z^{[\mathrm{P}]}(t,m) = N_t\, V_t^{[\mathrm{real}]} + X^{[\mathrm{P}]}(t,m) - Y^{[\mathrm{P}]}(t,m)$$

Secondo la base realistica:

$$\mathbb{E}[Y^{[\mathrm{P}]}(t,m)] - \mathbb{E}[X^{[\mathrm{P}]}(t,m)] = N_t \Big(C\, {}_{m-t}A''_{x+t} - P\, a''_{x+t:\overline{m-t}|} \Big) = N_t\, V_t^{[\mathrm{real}]}$$

quindi:

$$\mathbb{E}[Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)] = 0$$

Se solo l'ammontare $N_t\, V_t^{[\mathrm{real}]}$ è disponibile a fronte dei futuri impegni al netto dei futuri premi $\Rightarrow$ elevata probabilità di risultato negativo

Necessità di risorse ulteriori, da valutare in base al rischio tramite la distribuzione di probabilità di $Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)$ (via simulazione stocastica)

Costruire la funzione $\Phi_{Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)}$, definita come:

$$\Phi_{Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)}(z) = \mathbb{P}[Z^{[\mathrm{P}]}(t,m) \leq z]$$

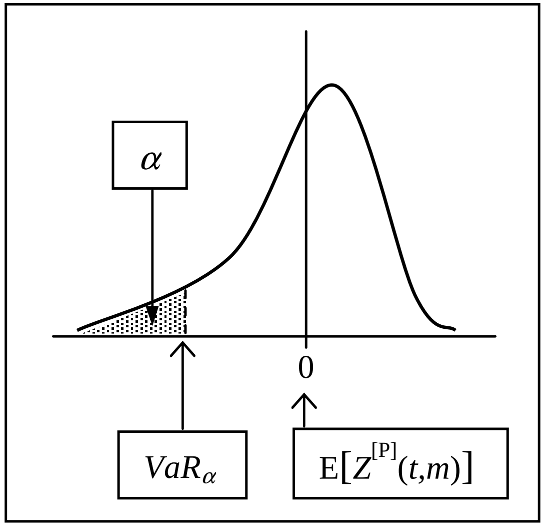
Si assuma, per es., il VaR ad un dato livello di confidenza come misura di rischio (Vedi Figure seguenti)

Se livello di confidenza = $1-\alpha$, il Safety Margin sia dato da:

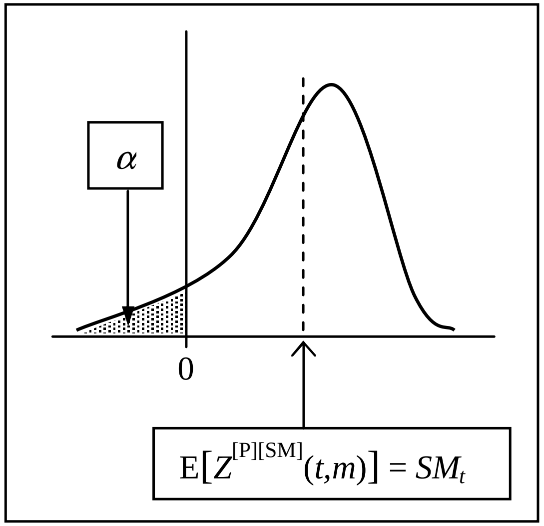
$$SM_t = -VaR_\alpha$$

Si assuma che SM_t “appartenga” al portafoglio $\Rightarrow$ valore attuale aleatorio del risultato di portafoglio ridefinito come segue:

$$Z^{[\mathrm{P}][\mathrm{SM}]}(t,m) = Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)+SM_t = N_t\,V_t^{[\mathrm{real}]}+SM_t+X^{[\mathrm{P}]}(t,m)-Y^{[\mathrm{P}]}(t,m)$$



La distrib. di prob. di $Z^{[\mathrm{P}]}(t,m)$



La distrib. di prob. di $Z^{[\mathrm{P}][\mathrm{SM}]}(t,m)$

Osservazione

Vari approcci alla quantificazione del safety margin proposti, ed adottati nella tecnica assicurativa

- approcci rigorosi basati su misure di rischio (VaR e TailVaR)
- procedure semplificate, es. approccio “Cost of Capital” (Swiss Solvency Test, e Solvency 2) $\Rightarrow$ *Risk Margin*

Esempio

Rif. a portafoglio di assic. temporanee caso morte, durata $m = 10$, $C = 1\,000$, premio annuo (puro) $P = 1.93$ pagabile per l'intera durata del contratto; età all'ingresso $x = 40$

$\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1})$, $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$
Vedi Tabella: riserva di portafoglio prudenziale, realistica, e con safety margin al tempo $t = 3$, per tre dimensioni di portafoglio; safety margin calcolato come VaR_α

N_3	$N_3\,V_3$	$N_3\,V_3^{[\mathrm{real}]}$	$V_3^{[\mathrm{P}]} = N_3\,V_3^{[\mathrm{real}]} + SM_3$		
			$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$
100	192.00	29.03	550.05	1 418.41	2 173.86
1 000	1 920.05	290.32	2 282.10	4 382.54	5 835.17
10 000	19 200.45	2 903.22	7 295.59	13 519.05	17 494.89

Riserva di portafoglio prudenziale, realistica, e comprendente safety margin

La riserva di portafoglio con margine di sicurezza esplicito

Si assumano:

- riserva di portafoglio, $V_t^{[\mathrm{P}]}$, calcolata come riserva realistica più margine di sicurezza (safety margin) esplicito
- margine di sicurezza dato dal VaR ad un fissato livello di confidenza
  $\Rightarrow$ dipende dalla dimensione di portafoglio N_t

Formalmente:

$$V_t^{[\mathrm{P}]} = N_t V_t^{[\mathrm{real}]} + SM_t(N_t)$$

Rif. a un portafoglio consistente inizialmente di N_0 contratti (N_0 dato)

Riserva di portafoglio al tempo (futuro) t: aleatoria, essendo N_t un numero aleatorio

Per ogni data sequenza $n_1, n_2, \ldots \;\Rightarrow$ stima della futura riserva di portafoglio

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} = n_t \, V_t^{[\mathrm{real}]} + SM_t(n_t)$$

Esempio

Rif. al portafoglio descritto nell'Esempio precedente

Il portafoglio consista inizialmente di $N_0 = 1\,000$ contratti

Si ponga $n_t = \mathbb{E}[N_t]$, per $t = 1, 2, \ldots, 10$, secondo la tavola $\mathrm{LT2}$

Si assuma $\alpha = 0.25$

Vedi Tabella: riserva realistica e riserva di portafoglio $\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$ comprendente margine di sicurezza esplicito

Nota: valori negativi di $V_1^{[\mathrm{real}]}$ e $V_2^{[\mathrm{real}]}$ sostituiti da 0

t	n_t	$V_t^{[\mathrm{real}]}$	$n_t\,V_t^{[\mathrm{real}]}$	$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$
0	1 000.00	0.00	0.00	0.00
1	998.91	0.00	0.00	1 235.15
2	997.71	0.00	0.00	3 509.15
3	996.38	0.29	289.27	3 698.46
4	994.90	0.81	801.55	3 605.03
5	993.27	1.18	1 169.16	3 338.84
6	991.47	1.38	1 370.71	2 646.38
7	989.47	1.40	1 382.41	2 482.18
8	987.26	1.19	1 177.86	1 792.33
9	984.82	0.74	727.85	1 258.37
10	982.11	0.00	0.00	0.00

Riserva realistica e riserva comprendente margine di sicurezza esplicito

UTILI ATTESI ANNUI

Precedente modello di valutazione di portafoglio basato sui cash-flow
$\Rightarrow$ valutazione di:

- $\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$ = utile atteso totale cumulato
- $\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}$ = valore attuale dell'utile atteso totale cumulato

cioè valutazioni “sintetiche”

Interesse per valutazioni su base periodica
$\Rightarrow$ utili attesi annui, cioè *timing* dell'emergere dell'utile

Riserva matematica $\Rightarrow$ passaggio da cash-flow annui ad utili annui

Riserva di portafoglio ed utili attesi annui

Riferimento alle quantità:

- $V_t^{[\mathrm{P}]} = N_t\, V_t$ = riserva aleatoria di portafoglio (su base prudenziale)
- $\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} = \mathbb{E}[V_t^{[\mathrm{P}]}] = N_0\, {}_tp''_x\, V_t$ = riserva attesa di portfoglio
- $F_t^{[\mathrm{P}]}$ = attivi (aleatori) del portafoglio
- $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}$ = attivi (attesi) del portafoglio
- $F_t^{[\mathrm{P}]} - V_t^{[\mathrm{P}]}$ = *surplus cumulato* aleatorio $\Rightarrow$ capitale proprio, o *Net Asset Value* (*NAV*)
- $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$ = *surplus cumulato* atteso

Dalle equazioni ricorrenti di $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}$, si ottiene:

$$(\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})(1+i'') + (\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_t)(1+i'') - C\,\bar{D}_t - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} =$$
$$\bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$(\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]})(1+i'') + (\hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_{m-1})(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$$

con $\bar{F}_0^{[\mathrm{P}]} = 0$ (per ipotesi) e $\hat{V}_0^{[\mathrm{P}]} = 0$

Nota: $\hat{V}_m^{[\mathrm{P}]} = 0$ avendo supposto che il fondo alla scadenza m sia al netto del pagamento dei benefici in m

Definizione:
Utile atteso annuo = variazione attesa annua del surplus cumulato (o NAV)

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = (\bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}) - (\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})$$

Dalle precedenti equazioni ricorrenti, si ottiene:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = (\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})i'' + (\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_t)\,(1+i'') - C\,\bar{D}_t - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]};$$

$$t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\overline{PL}_m^{[\mathrm{P}]} = (\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]})i'' + (\hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_{m-1})\,(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

Componenti dell'utile atteso annuo

- *interessi sul NAV*:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{NAV}]} = (\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})i''$$

- *utile industriale*:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_t)\,(1+i'') - C\,\bar{D}_t - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\overline{PL}_m^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (\hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_{m-1})\,(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

In base alla definizione dei cash-flow, si ottiene:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = \overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} + \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}\,(1+i'') - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-1$$

Quindi:

Utile industriale	=	cash-flow
	+	variazione riserva
	+	interessi su riserva iniziale

Esempio 1

Portafoglio di assicurazioni temporanee caso morte
($\Rightarrow$ $C > 0$, $S = 0$)
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 40$, $m = 10$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 1.93$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Nota: dati come nell'esempio sui cash-flow

Vedi Tabella seguente

t	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\bar{F}_t^{[P]} - \hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$
0	0.00	0.00	–	–	–
1	7 585.09	1 378.85	1 378.85	0.00	1 378.85
2	14 016.80	3 002.45	1 623.59	41.37	1 582.23
3	19 130.89	4 880.37	1 877.92	90.07	1 787.85
4	22 745.28	7 022.31	2 141.94	146.41	1 995.53
5	24 658.24	9 438.07	2 415.77	210.67	2 205.10
6	24 646.35	12 137.56	2 699.48	283.14	2 416.34
7	22 462.43	15 130.74	2 993.18	364.13	2 629.05
8	17 833.19	18 427.65	3 296.92	453.92	2 843.00
9	10 456.74	22 038.41	3 610.76	552.83	3 057.93
10	0.00	25 973.16	3 934.75	661.15	3 273.59

Riserva ed utili annui in un portafoglio di assicurazioni temporanee

Esempio 2

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie ($\Rightarrow\ S = C$)
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \ \Rightarrow\ P = 59.54$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Nota: dati come nell'esempio sui cash-flow

Vedi Tabella seguente

t	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\bar{F}_t^{[P]} - \hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$
0	0.00	0.00	–	–	–
1	573 687.47	9 116.66	9 116.66	0.00	9 116.66
2	1 153 665.85	24 342.98	15 226.32	273.50	14 952.82
3	1 739 553.40	45 906.93	21 563.95	730.29	20 833.66
4	2 330 915.86	74 033.94	28 127.01	1 377.21	26 749.80
5	2 927 262.45	108 945.28	34 911.34	2 221.02	32 690.32
6	3 528 041.94	150 856.18	41 910.90	3 268.36	38 642.54
7	4 132 638.76	199 973.72	49 117.54	4 525.69	44 591.85
8	4 740 369.25	256 494.39	56 520.68	5 999.21	50 521.46
9	5 350 478.29	320 601.39	64 106.99	7 694.83	56 412.16
10	5 962 136.36	392 461.46	71 860.07	9 618.04	62 242.03
11	6 574 437.28	472 221.46	79 760.00	11 773.84	67 986.15
12	7 186 396.87	560 004.42	87 782.96	14 166.64	73 616.32
13	7 796 952.88	655 905.21	95 900.79	16 800.13	79 100.66
15	0.00	872 269.24	112 283.58	22 799.57	89 484.01

Riserva ed utili annui in un portafoglio di assicurazioni miste

Osservazione

Nel modello di valutazione di utili attesi ora descritto:

- ▷ nessuna allocazione specifica di capitale proprio (né all'avvio del portafoglio, né nel corso della durata)
- ▷ presenza di capitale proprio ($\bar{F}_t - \hat{V}_t$) dovuta al non-prelievo (ipotizzato ma non realistico) dell'utile che si forma anno dopo anno
- ▷ gli interessi sono quindi prodotti dal fondo (inclusa la riserva)

Logica del modello: *profits retained*

Nel modello di valutazione di utili (su base individuale) mediante equazioni ricorrenti della riserva matematica:

- ▷ nessuna allocazione specifica di capitale proprio (né all'avvio del portafoglio, né nel corso della durata)
- ▷ alla fine di ogni anno si ipotizza il "distacco" dell'utile
- ▷ gli interessi sono quindi prodotti dall'investimento della sola riserva

Logica del modello: *profits released*

Ruolo della riserva

Dalle eq. ricorrenti del surplus $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} \Rightarrow$ espressioni esplicite:

$$\bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{t} \left((\hat{V}_h^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_h)(1+i'') - C\,\bar{D}_h - \hat{V}_{h+1}^{[\mathrm{P}]} \right) (1+i'')^{t-h};$$

$t = 0, 1, \dots, m-2$

$$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} \left((\hat{V}_h^{[\mathrm{P}]} + P\,\bar{N}_h)(1+i'') - C\,\bar{D}_h - \hat{V}_{h+1}^{[\mathrm{P}]} \right) (1+i'')^{m-(h+1)} - S\,\bar{N}_m$$

Dalle precedenti equazioni, la seconda può essere scritta:

$$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{PL}_{h+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} (1+i'')^{m-(h+1)}$$

Inoltre:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} (1+i'')^{-m} = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{PL}_{h+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} (1+i'')^{-(h+1)}$$

Se $\hat{V}_0^{[\mathrm{P}]} = \hat{V}_m^{[\mathrm{P}]} = 0$, dall'espressione di $\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$ si ottiene:

$$\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} \left(P\, \bar{N}_h (1+i'') - C\, \bar{D}_h\right) (1+i'')^{m-(h+1)} - S\, \bar{N}_m$$

cioè = valore accumulato dei cash-flow

$\Rightarrow$ il profilo della riserva di portafoglio

- ▷ non influisce sull'utile totale atteso
- ▷ determina il timing dell'utile, cioè gli utili annui

Esempio 1

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie

Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti, P, pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

Riserva calcolata con i tassi: 0.00, 0.02 ($\mathrm{TB1}$), 0.04

Vedi Tabella seguente

Notare: “accelerazione” o “rallentamento” dell’emergere dell’utile

Valutazioni di portafogli *(cont.)*

t	$\hat{V}_t^{[P](0.00)}$	$\overline{PL}_t^{[P][I](0.00)}$	$\hat{V}_t^{[P](0.02)}$	$\overline{PL}_t^{[P][I](0.02)}$	$\hat{V}_t^{[P](0.04)}$	$\overline{PL}_t^{[P][I](0.04)}$
0	0.00	–	0.00	–	0.00	–
1	1 974 761.61	−1 391 957.48	573 687.47	9 116.66	0.00	582 804.13
2	2 531 909.48	79 815.55	1 153 665.85	14 952.82	159 977.92	417 742.65
3	3 083 449.20	96 528.81	1 739 553.40	20 833.66	740 608.75	−3 720.25
4	3 628 830.21	113 048.12	2 330 915.86	26 749.80	1 338 135.16	−9 382.49
5	4 167 452.93	129 351.62	2 927 262.45	32 690.32	1 952 629.86	−15 241.21
6	4 698 665.52	145 415.16	3 528 041.94	38 642.54	2 584 119.24	−21 306.33
7	5 221 760.78	161 212.11	4 132 638.76	44 591.85	3 232 579.39	−27 589.16
8	5 735 973.20	176 713.19	4 740 369.25	50 521.46	3 897 932.22	−34 102.66
9	6 240 476.31	191 886.22	5 350 478.29	56 412.16	4 580 042.06	−40 861.75
10	6 734 380.40	206 695.95	5 962 136.36	62 242.03	5 278 712.75	−47 883.67
11	7 216 730.95	221 103.84	6 574 437.28	67 986.15	5 993 685.54	−55 188.44
12	7 686 507.78	235 067.89	7 186 396.87	73 616.32	6 724 638.22	−62 799.32
13	8 142 625.36	248 542.42	7 796 952.88	79 100.66	7 471 185.57	−70 743.43
14	8 583 934.49	261 477.94	8 404 966.48	84 403.30	8 232 881.85	−79 052.41
15	0.00	273 821.06	0.00	89 484.01	0.00	−87 763.16
	$\bar{F}_{15}^{[P](0.00)} = 872\,269.24$		$\bar{F}_{15}^{[P](0.02)} = 872\,269.24$		$\bar{F}_{15}^{[P](0.04)} = 872\,269.24$	
	$\overline{PL}^{[P](0.00)} = 559\,876.43$		$\overline{PL}^{[P](0.02)} = 559\,876.43$		$\overline{PL}^{[P](0.04)} = 559\,876.43$	

Utili annui secondo varie linee di riserva (1)

Esempio 2

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie

Dati come nell'Esempio 1

Profili di riserva

- realistica
- realistica + risk margin

Calcolo del risk margin (formula approx):

▷ approccio "Cost of Capital"

▷ $\rho = 0.08$, $r_{\mathrm{f}} = 0.02$

▷ SCR_t = 10% della riserva realistica

Vedi Tabella seguente

Valutazioni di portafogli *(cont.)*

t	$\hat{V}_t^{[P][real]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I][real]}$	$\hat{V}_t^{[P][real]} + RM_t$	$\overline{PL}_t^{[P][I][real+RM]}$
0	0.00	–	0.00	–
1	6 131.41	576 672.72	266 864.82	315 939.31
2	584 035.92	0.00	852 553.45	37.89
3	1 173 668.24	0.00	1 446 631.95	3 609.34
4	1 774 803.95	0.00	2 048 703.30	7 253.27
5	2 387 157.50	0.00	2 658 305.54	10 968.29
6	3 010 376.38	0.00	3 274 906.24	14 752.63
7	3 644 035.08	0.00	3 897 896.70	18 604.13
8	4 287 628.93	0.00	4 526 586.26	22 520.14
9	4 940 567.92	0.00	5 160 196.43	26 497.55
10	5 602 170.71	0.00	5 797 855.36	30 532.71
11	6 271 658.81	0.00	6 438 592.59	34 621.41
12	6 948 151.37	0.00	7 081 334.30	38 758.85
13	7 630 660.67	0.00	7 724 899.52	42 939.58
14	8 318 088.80	0.00	8 367 997.34	47 157.48
15	9 009 225.74	0.00	9 009 225.74	51 405.79
	$\bar{F}_{15}^{[P][real]}$	$= 872\,269.24$	$\bar{F}_{15}^{[P][real+RM]}$	$= 872\,269.24$
	$\overline{PL}^{[P][real]}$	$= 559\,876.43$	$\overline{PL}^{[P][real+RM]}$	$= 559\,876.43$

Utili annui secondo varie linee di riserva (2)

Notare: particolare timing dell'utile implicato dal profilo di riserva realistica

Segue prova formale

Si assuma, a livello di portafoglio

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} = \mathbb{E}[N_t]\, V_t^{[\mathrm{real}]}$$

con $\mathbb{E}[N_t] = N_0\ {}_tp''_x$

Si trova:

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} = N_0\ {}_tp''_x\ (C\ {}_{m-t}A''_{x+t} + S\ {}_{m-t}E''_{x+t} - P\,\ddot{a}''_{x+t:\overline{m-t}|})$$

$$= N_0\ {}_tp''_x \sum_{h=0}^{m-t-1} \left(C\ {}_{h|1}q''_{x+t} - P\ {}_hp''_{x+t}\,(1+i'')\right)(1+i'')^{-(h+1)} + S\ {}_{m-t}p''_{x+t}\,(1+i'')^{-(m-t)}$$

$$= \sum_{h=0}^{m-t-1} \left(C\,\bar{D}_{t+h} - P\,\bar{N}_{t+h}\,(1+i'')\right)\,(1+i'')^{-(h+1)} + S\,\bar{N}_m\,(1+i'')^{-(m-t)}$$

e quindi:

$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} = -\sum_{h=0}^{m-t-1} \overline{CF}_{t+h+1}^{[\mathrm{P}]} (1+i'')^{-(h+1)} \qquad (^\circ)$$

La $(^\circ)$ in forma ricorrente:

$$\hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} = \hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} (1+i'') - \overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}$$

In particolare dalla $(^\circ)$ si ricava:

$$\hat{V}_0^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} = -\sum_{h=0}^{m-1} \overline{CF}_{h+1}^{[\mathrm{P}]} (1+i'')^{-(h+1)} = -\bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} (1+i'')^{-m} = -\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}$$

Si assuma per la riserva di portafoglio il seguente profilo temporale:

$$\hat{V}_0^{[\mathrm{P}]} = 0;$$
$$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} = \hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]}; \quad t = 1, 2, \dots, m-1$$
$$\hat{V}_m^{[\mathrm{P}]} = 0$$

Gli utili attesi industriali sono allora dati da:

$$\overline{PL}_1^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}][\mathrm{real}]} = -\hat{V}_1^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} + \overline{CF}_1^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=0}^{m-1} \overline{CF}_{h+1}^{[\mathrm{P}]} (1+i'')^{-h} = \overline{PL}^{[\mathrm{P}]}(1+i'')$$
$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}][\mathrm{real}]} = \hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]}(1+i'') - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{real}]} + \overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = 0$$

$\Rightarrow$ L’utile atteso emerge completamente nel primo anno

Utili: generalizzazioni

Generalizzazione del modello precedente considerando

- ▷ spese e caricamenti per spese
- ▷ abbandoni (storni e riscatti)

Conseguenti componenti di utile atteso:

1. Mortalità $\Leftarrow$ differenza $q' - q''$
2. Finanziario $\Leftarrow$ differenza $i'' - i'$
3. Caricamenti per spese $\Leftarrow$ differenza tra spese imputate e caricate sui premi e spese realisticamente attese
4. Abbandoni $\Leftarrow$ differenza tra riserve cancellate e valori di riscatto (se positivo)

Struttura di caricamento del premio:

- spese di acquisizione (iniziali): $\alpha\,C$, oppure $\delta\,P^{[\mathrm{T}]}$
- spese di incasso premi: $\beta\,P^{[\mathrm{T}]}$
- spese generali di gestione: $\gamma\,C$ per anno

Stima realistica spese per contratto (durata m anni):

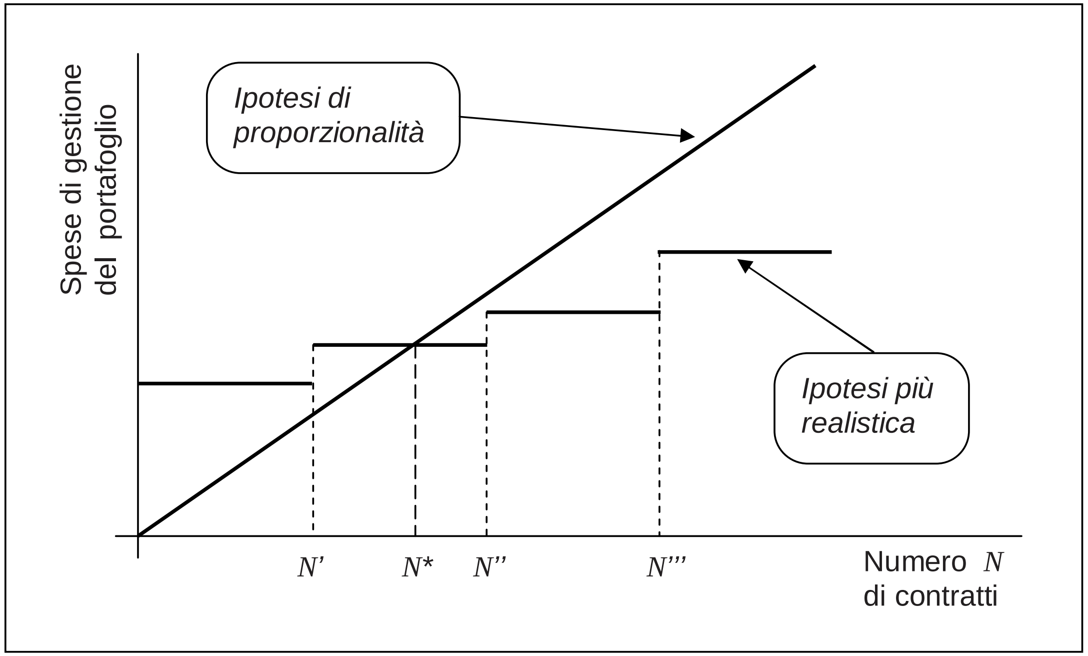
$$EX_0 = \alpha''\,C + \beta''\,P^{[\mathrm{T}]} + \gamma''\,C$$

$$EX_t = \beta''\,P^{[\mathrm{T}]} + \gamma''\,C; \quad t = 1, 2 \ldots, m-1$$

Osservazione

Tutte le spese sono considerate “per polizza”, quindi:

- ▷ spese totali proporzionali al numero di contratti in portafoglio
- ▷ ipotesi di assenza di *spese fisse* (non proporzionali)
- ▷ in realtà $\Rightarrow$ spese di gestione “a gradini”;
  vedi Figura: per $N > N^*$ $\Rightarrow$ *economie di scala*



Abbandoni (storni e riscatti):

A_t = numero di abbandoni al tempo t. Quindi:

$$N_{t+1} = N_t - D_t - A_{t+1}$$

w_t = probabilità di abbandono al tempo t (essendo in portafoglio al tempo $t-1$)

Valori attesi:

$$\bar{N}_t = N_0 \, {}_t p''_x \prod_{h=1}^{t} (1 - w_h)$$

$$\bar{D}_t = \bar{N}_t \, {}_1 q''_{x+t}$$

$$\bar{A}_{t+1} = \bar{N}_t (1 - {}_1 q''_{x+t}) \, w_{t+1}$$

R_t = valore di riscatto al tempo t

Ridefinizione del fondo atteso $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}$:

$$(\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)(1+i'') - C\,\bar{D}_t - R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1} = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]};\quad t = 0,1,\ldots,m-2$$

$$(\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_{m-1} - EX_{m-1}\,\bar{N}_{m-1})(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$$

Utili annui attesi:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = (\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})i'' + (\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)\,(1+i'') - C\,\bar{D}_t - R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]};$$

$t = 0,1,\ldots,m-2$

$$\overline{PL}_{m}^{[\mathrm{P}]} = (\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]})i'' + (\hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_{m-1} - EX_{m-1}\,\bar{N}_{m-1})\,(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

Nota: la riserva può tenere conto o meno di spese e caricamenti
(riserva pura / riserva d'inventario / riserva di Zillmer)

Interessi sul NAV:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{NAV}]} = (\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})i''$$

Utili industriali:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)\,(1+i'') - C\,\bar{D}_t - R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]};$$

$$t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$\overline{PL}_{m}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (\hat{V}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_{m-1} - EX_{m-1}\,\bar{N}_{m-1})\,(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

In particolare, essendo $\hat{V}_0^{[\mathrm{P}]} = 0$, risulta:

$$\overline{PL}_{1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_0 - EX_0\,\bar{N}_0)\,(1+i'') - C\,\bar{D}_0 - R_1\,\bar{A}_1 - \hat{V}_1^{[\mathrm{P}]}$$

Osservazione 1

- Spese EX_0 includono spese di acquisizione $EX_0^{[\mathrm{A}]}$ $\Rightarrow$ molto elevate
- Se $V_1^{[\mathrm{P}]}$ non zillmerata $\Rightarrow$ possibile $\overline{PL}_1^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} < 0$

Osservazione 2

Interpretazione degli elementi dell'utile annuo come voci del conto economico

CONTO ECONOMICO TECNICO	
Ricavi	
Premi	$P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t$
Reddito da investimenti	$(\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)\;i''$
Costi	
Benefici pagati	$C\,\bar{D}_t + R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1}$
Spese	$EX_t\,\bar{N}_t$
Variazione di riserva	$\hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$
Utile (o *Perdita*)	$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$

Valori attuariali come elementi di un conto economico

Esempio

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie

Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $\delta = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015 \;\Rightarrow\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
- $N_0 = 10\,000$
- valori di riscatto $R_t = \begin{cases} 0; & t = 1, 2 \\ 0.90\, V_t^{[\mathrm{Z}]}; & t \geq 3 \end{cases}$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$

- ipotesi per spese ed abbandoni
  - ▷ caso 1:
    $\delta'' = \delta$, $\beta'' = \beta$, $\gamma'' = \gamma$;
    $w_t = 0 \; (t = 1, 2, \ldots, 15)$
  - ▷ caso 2:
    $\delta'' = 0.58$, $\beta'' = 0.04$, $\gamma'' = 0.0018$;
    w_t: vedi Tabella

t	w_t	t	w_t	t	w_t	t	w_t	t	w_t
1	0.05	4	0.03	7	0.03	10	0.03	13	0.03
2	0.02	5	0.03	8	0.03	11	0.03	14	0.00
3	0.06	6	0.03	9	0.03	12	0.03	15	0.00

Risultati: vedi Tabella seguente

Notare: riserva di Zillmer $\Rightarrow$ emergere dell'utile più regolare
(ma utile totale inalterato)

t	Riserva pura				Riserva di Zillmer			
	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$
0	0.00	–	–	–	0.00	–	–	–
1	573 687.47	−338 323.21	0.00	−338 323.21	229 504.95	5 859.32	0.00	5 859.32
2	1 153 665.85	34 574.46	−10 149.70	44 724.16	831 961.82	12 095.97	175.78	11 920.19
3	1 739 553.40	41 392.01	−9 112.46	50 504.47	1 440 674.18	18 567.20	538.66	18 028.55
4	2 330 915.86	48 438.80	−7 870.70	56 309.51	2 055 205.00	25 270.44	1 095.67	24 174.77
5	2 927 262.45	55 709.71	−6 417.54	62 127.25	2 675 059.85	32 201.45	1 853.79	30 347.66
6	3 528 041.94	63 197.63	−4 746.25	67 943.87	3 299 682.92	39 354.06	2 819.83	36 534.22
7	4 132 638.76	70 893.17	−2 850.32	73 743.49	3 928 452.98	46 719.92	4 000.45	42 719.47
8	4 740 369.25	78 784.41	−723.52	79 507.93	4 560 679.68	54 288.20	5 402.05	48 886.15
9	5 350 478.29	86 856.50	1 640.01	85 216.49	5 195 599.99	62 045.24	7 030.70	55 014.54
10	5 962 136.36	95 091.34	4 245.70	90 845.64	5 832 375.25	69 974.16	8 892.05	61 082.10
11	6 574 437.28	103 467.17	7 098.45	96 368.73	6 470 088.83	78 054.50	10 991.28	67 063.22
12	7 186 396.87	111 958.15	10 202.46	101 755.69	7 107 744.78	86 261.79	13 332.91	72 928.88
13	7 796 952.88	120 533.88	13 561.20	106 972.68	7 744 267.65	94 567.03	15 920.77	78 646.26
14	8 404 966.48	129 158.95	17 177.22	111 981.73	8 378 503.97	102 936.24	18 757.78	84 178.46
15	0.00	137 792.39	21 051.99	116 740.40	0.00	111 329.87	21 845.87	89 484.01
	$\bar{F}_{15}^{[P]} = 839\,525.38$				$\bar{F}_{15}^{[P]} = 839\,525.38$			
	$\overline{PL}^{[P]} = 538\,859.40$				$\overline{PL}^{[P]} = 538\,859.40$			

Utili annui (Caso 1)

t	Riserva pura				Riserva di Zillmer			
	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$	$\hat{V}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$
0	0.00	–	–	–	0.00	–	–	–
1	545 003.10	−333 308.95	0.00	−333 308.95	218 029.70	−6 335.55	0.00	6 335.55
2	1 074 062.91	51 481.77	−9 999.27	61 481.04	774 556.45	24 014.83	−190.07	24 204.89
3	1 522 352.77	60 449.50	−8 454.82	68 904.32	1 260 791.60	22 504.21	530.38	21 973.84
4	1 978 681.38	52 594.93	−6 641.33	59 236.26	1 744 634.34	25 080.81	1 205.50	23 875.30
5	2 410 364.18	58 324.96	−5 063.48	63 388.44	2 202 695.71	31 946.39	1 957.93	29 988.46
6	2 817 905.84	63 928.11	−3 313.73	67 241.84	2 635 511.68	38 653.80	2 916.32	35 737.48
7	3 201 783.16	69 400.72	−1 395.89	70 796.61	3 043 589.18	45 200.54	4 075.93	41 124.61
8	3 562 446.72	74 738.22	686.13	74 052.09	3 427 407.77	51 583.20	5 431.95	46 151.25
9	3 900 322.75	79 935.10	2 928.28	77 006.82	3 787 421.56	57 797.33	6 979.45	50 817.88
10	4 215 815.33	84 984.82	5 326.33	79 658.49	4 124 061.49	63 837.47	8 713.37	55 124.10
11	4 509 308.99	89 879.85	7 875.88	82 003.98	4 437 737.94	69 697.06	10 628.49	59 068.57
12	4 781 171.70	94 611.56	10 572.27	84 039.29	4 728 843.79	75 368.42	12 719.40	62 649.02
13	5 031 758.48	99 170.21	13 410.62	85 759.60	4 997 758.10	80 842.69	14 980.46	65 862.23
14	5 424 139.66	86 811.44	16 385.72	70 425.72	5 407 062.09	69 888.63	17 405.74	52 482.89
15	0.00	92 508.29	18 990.07	73 518.22	0.00	75 430.72	19 502.39	55 928.33
	$\bar{F}_{15}^{[P]} = 725\,510.54$				$\bar{F}_{15}^{[P]} = 725\,510.54$			
	$\overline{PL}^{[P]} = 465\,677.61$				$\overline{PL}^{[P]} = 465\,677.61$			

Utili annui (Caso 2)

Dalla generazione al portafoglio

Applicazione dei modelli descritti estesa a portafogli (costituiti da più generazioni) $\Rightarrow$ somma dei risultati relativi alle singole generazioni, grazie ad additività del valore atteso ($\Rightarrow$ non considerazione della rischiosità)

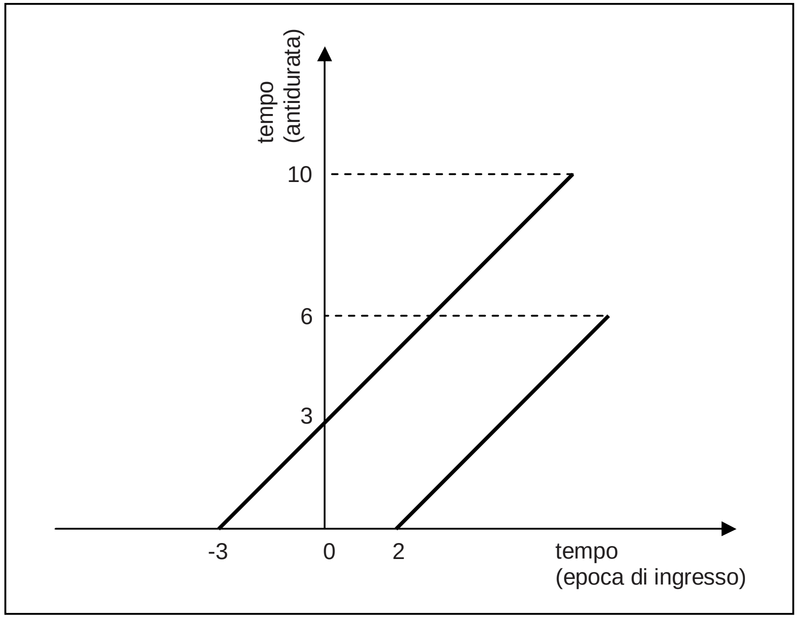
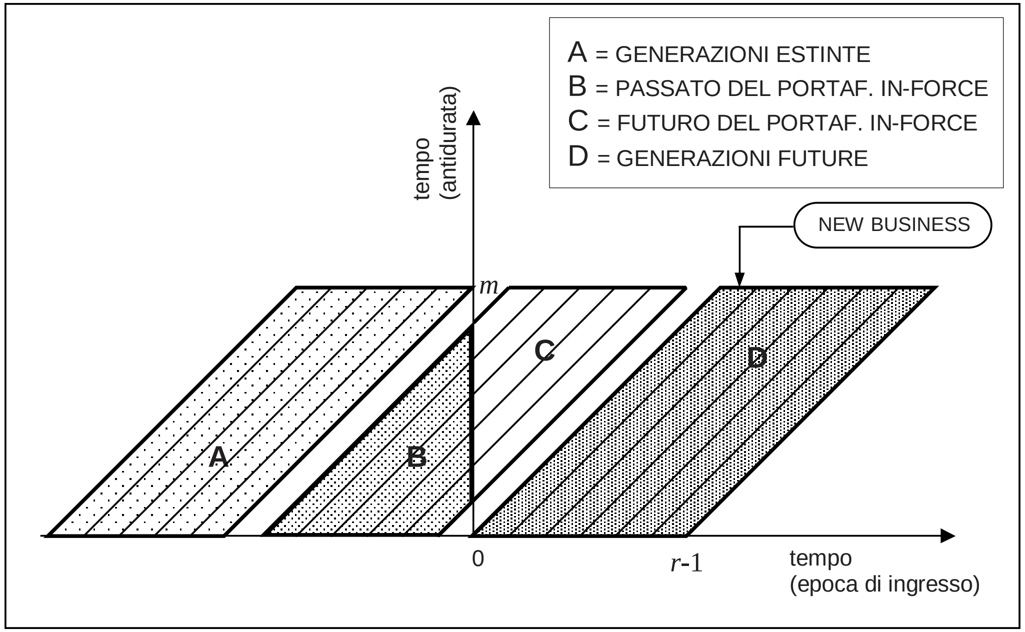


Diagramma di Lexis: linea = generazione

Valutazioni di portafogli *(cont.)*



Portafoglio in-force (o chiuso a nuovi ingressi): regione B+C

- ▷ valutazione in *run-off* $\Rightarrow$ regione C

Produzione futura: regione D

Portafoglio aperto a nuovi ingressi: regione B+C+D

- ▷ valutazione in *going concern* $\Rightarrow$ regione C+D

3 IL PROFIT TESTING

Metodologia di valutazione proposta in U.K., sviluppata negli anni Settanta per la progettazione di nuovi prodotti assicurativi

Obiettivo principale: analisi della redditività dei contratti

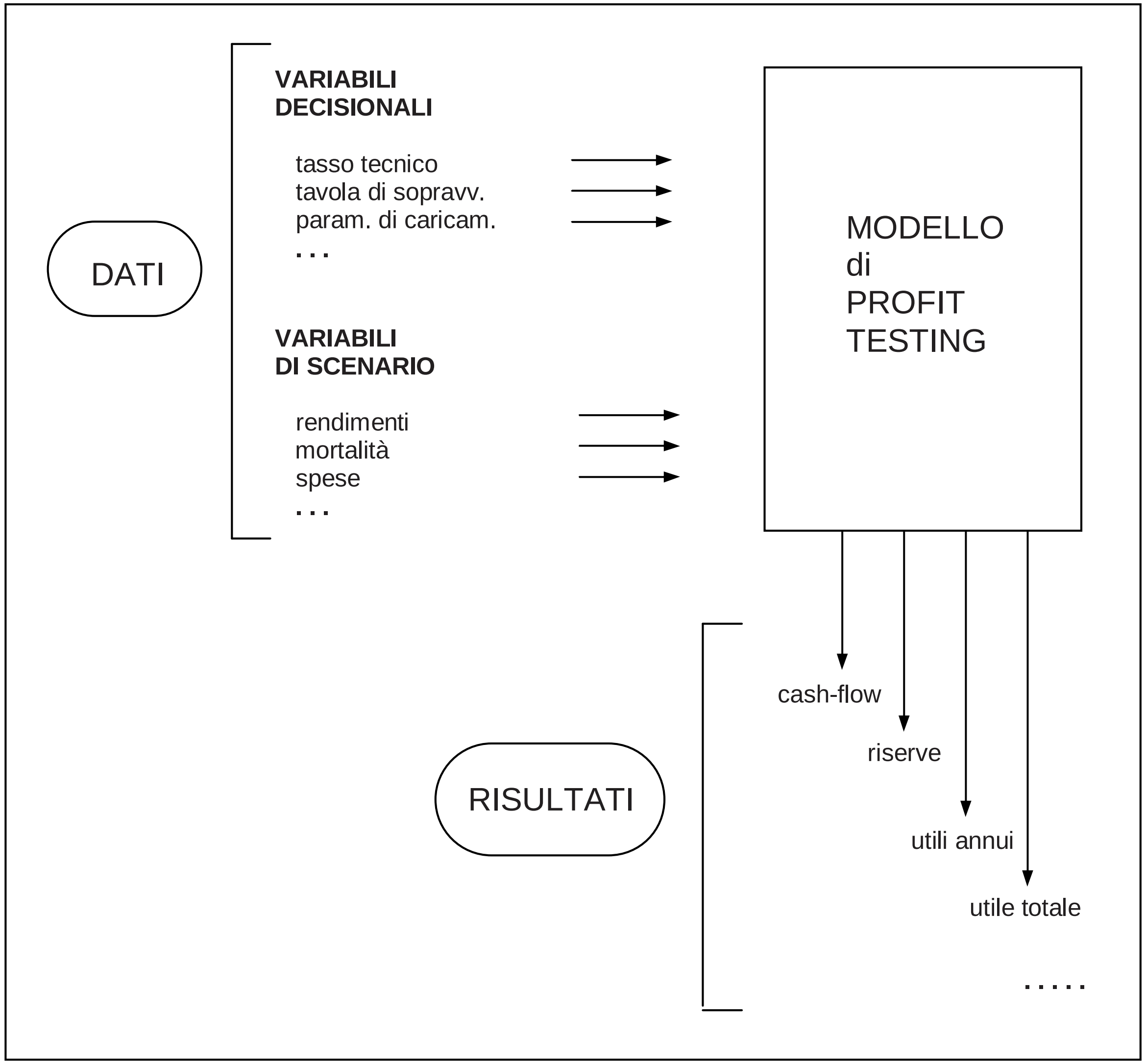
Oggetto di valutazione: generazione di contratti, valutati alla stipulazione in particolare a scopo di progettazione del prodotto

- ▷ processo di “aggiustamento” delle caratteristiche del prodotto in modo da realizzare un prefissato obiettivo

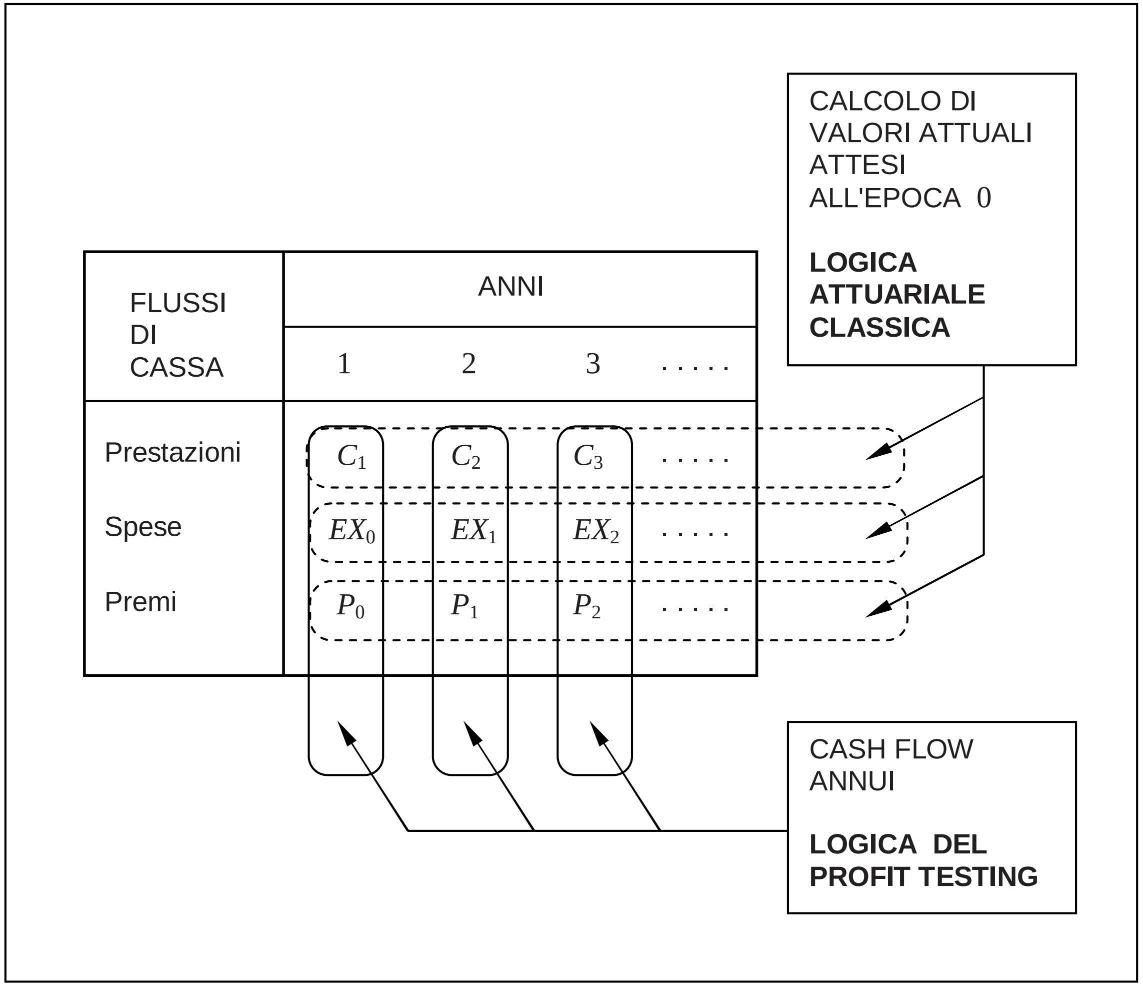
Logica procedurale: *what-if analysis* (approccio deterministico)

- ▷ analisi del valore assunto da vari risultati (utile totale atteso, utili annui attesi, cash-flow, . . .) in corrispondenza a diverse assegnazioni a *variabili decisionali* ed a *variabili di scenario*
- ▷ per le variabili di scenario:
  - ◦ *sensitivity testing* (una “variabile” alla volta)
  - ◦ *scenario testing* (più “variabili” congiuntamente)

Successivamente: estensione a valutazioni stocastiche



Input ed output di un modello di profit testing



Logica attuariale classica e logica del profit testing

Esempi di implementazione

Logica di implementazione:

1. effetto di varie ipotesi di mortalità sugli utili (vedi Esempio 1)
   $\Rightarrow$ sensitivity testing sullo *scenario* di mortalità
2. effetto di variazione della tavola di mortalità nella $\mathrm{TB1}$ (vedi Esempio 2) $\Rightarrow$ analisi dell'effetto di una *variabile decisionale*

Esempio 1

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie
Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $\delta = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015 \;\Rightarrow\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
- $N_0 = 10\,000$

- $\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$ = riserva pura
- ipotesi per spese ed abbandoni:
  $\delta'' = \delta$, $\beta'' = \beta$, $\gamma'' = \gamma$;
  $w_t = 0 \;\; (t = 1, 2, \ldots, 15)$
- $\mathrm{TB2} = (0.03$, mortalità $q)$
  ipotesi sulla mortalità q:
  - $0.70\, q^{[\mathrm{LT2}]}$
  - $0.85\, q^{[\mathrm{LT2}]}$
  - $q^{[\mathrm{LT2}]}$
  - $1.15\, q^{[\mathrm{LT2}]}$
  - $1.30\, q^{[\mathrm{LT2}]}$

Risultati: vedi Tabella seguente

t	$0.70\,q^{[\mathrm{LT2}]}$	$0.85\,q^{[\mathrm{LT2}]}$	$q^{[\mathrm{LT2}]}$	$1.15\,q^{[\mathrm{LT2}]}$	$1.30\,q^{[\mathrm{LT2}]}$
1	−329 714.63	−334 018.92	−338 323.21	−342 627.50	−346 931.79
2	53 699.81	49 209.94	44 724.16	40 242.47	35 764.87
3	59 820.83	55 158.19	50 504.47	45 859.67	41 223.77
4	65 928.14	61 111.56	56 309.51	51 521.95	46 748.86
5	71 995.12	67 050.75	62 127.25	57 224.57	52 342.67
6	77 990.34	72 953.16	67 943.87	62 962.40	58 008.64
7	83 876.86	78 792.45	73 743.49	68 729.83	63 751.31
8	89 611.32	84 538.01	79 507.93	74 520.85	69 576.53
9	95 143.03	90 154.36	85 216.49	80 329.07	75 491.75
10	100 412.83	95 600.52	90 845.64	86 147.71	81 506.25
11	105 351.82	100 829.23	96 368.73	91 969.71	87 631.56
12	109 879.86	105 786.14	101 755.69	97 787.80	93 881.75
13	113 903.92	110 408.86	106 972.68	103 594.62	100 273.92
14	117 316.07	114 625.92	111 981.73	109 382.85	106 828.65
15	119 991.16	118 355.55	116 740.40	115 145.46	113 570.52
$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}$	643 137.88	590 806.76	538 859.40	487 292.67	436 103.45

Utili attesi annui e totale in varie ipotesi di mortalità

Esempio 2

- $\mathrm{TB2} = (0.03,$ mortalità $q^{[\mathrm{LT2}]})$
- $\mathrm{TB1} = (0.02,$ mortalità $q)$
  mortalità q
  - $\triangleright$ $1.00\, q^{[\mathrm{LT1}]} \;\Rightarrow\; P = 59.54,\;\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
  - $\triangleright$ $1.10\, q^{[\mathrm{LT1}]} \;\Rightarrow\; P = 59.83,\;\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.93$
  - $\triangleright$ $1.20\, q^{[\mathrm{LT1}]} \;\Rightarrow\; P = 60.11,\;\; P^{[\mathrm{T}]} = 67.25$
  - $\triangleright$ $1.30\, q^{[\mathrm{LT1}]} \;\Rightarrow\; P = 60.40,\;\; P^{[\mathrm{T}]} = 67.58$
- altri dati: vedi esempio precedente

Risultati: vedi Tabella seguente

t	$q^{[\mathrm{LT1}]}$	$1.10\,q^{[\mathrm{LT1}]}$	$1.20\,q^{[\mathrm{LT1}]}$	$1.30\,q^{[\mathrm{LT1}]}$
1	$-338\,323.21$	$-336\,696.25$	$-335\,071.33$	$-333\,448.46$
2	44 724.16	48 308.35	51 894.66	55 483.08
3	50 504.47	54 185.91	57 869.98	61 556.66
4	56 309.51	60 065.57	63 824.96	67 587.64
5	62 127.25	65 929.10	69 735.17	73 545.44
6	67 943.87	71 755.33	75 572.13	79 394.24
7	73 743.49	77 519.75	81 302.68	85 092.24
8	79 507.93	83 194.07	86 888.38	90 590.80
9	85 216.49	88 745.76	92 284.75	95 833.43
10	90 845.64	94 137.46	97 440.48	100 754.68
11	96 368.73	99 326.45	102 296.50	105 278.86
12	101 755.69	104 263.94	106 784.89	109 318.53
13	106 972.68	108 894.38	110 827.75	112 772.82
14	111 981.73	113 154.61	114 335.84	115 525.45
15	116 740.40	116 973.00	117 207.03	117 442.47
$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}$	538 859.40	574 259.09	609 732.12	645 278.30

Utili attesi annui e totale con varie tavole di mortalità del primo ordine

4 IL MODELLO DI VALUTAZIONE CON CAPITALE PROPRIO

Caratteristica principale rispetto al modello di valutazione fin qui adottato: considerazione esplicita del capitale proprio, in particolare di "movimenti" di capitale proprio

Conduce alla valutazione di PVFP (Present Value of Future Profits), VIF (Value of In-Force portfolio), Embedded Value e Appraisal Value

Consente di interpretare altre configurazioni di valore

Oggetto di valutazione: gestione *ordinaria* del portafoglio (cioè escluse operazioni straordinarie quali per es. cessione del portafoglio ad altro assicuratore)

Analisi

- ▷ finanziaria (cash-flow)
- ▷ di redditività (utili)
- ▷ patrimoniale (variazioni di capitale proprio)

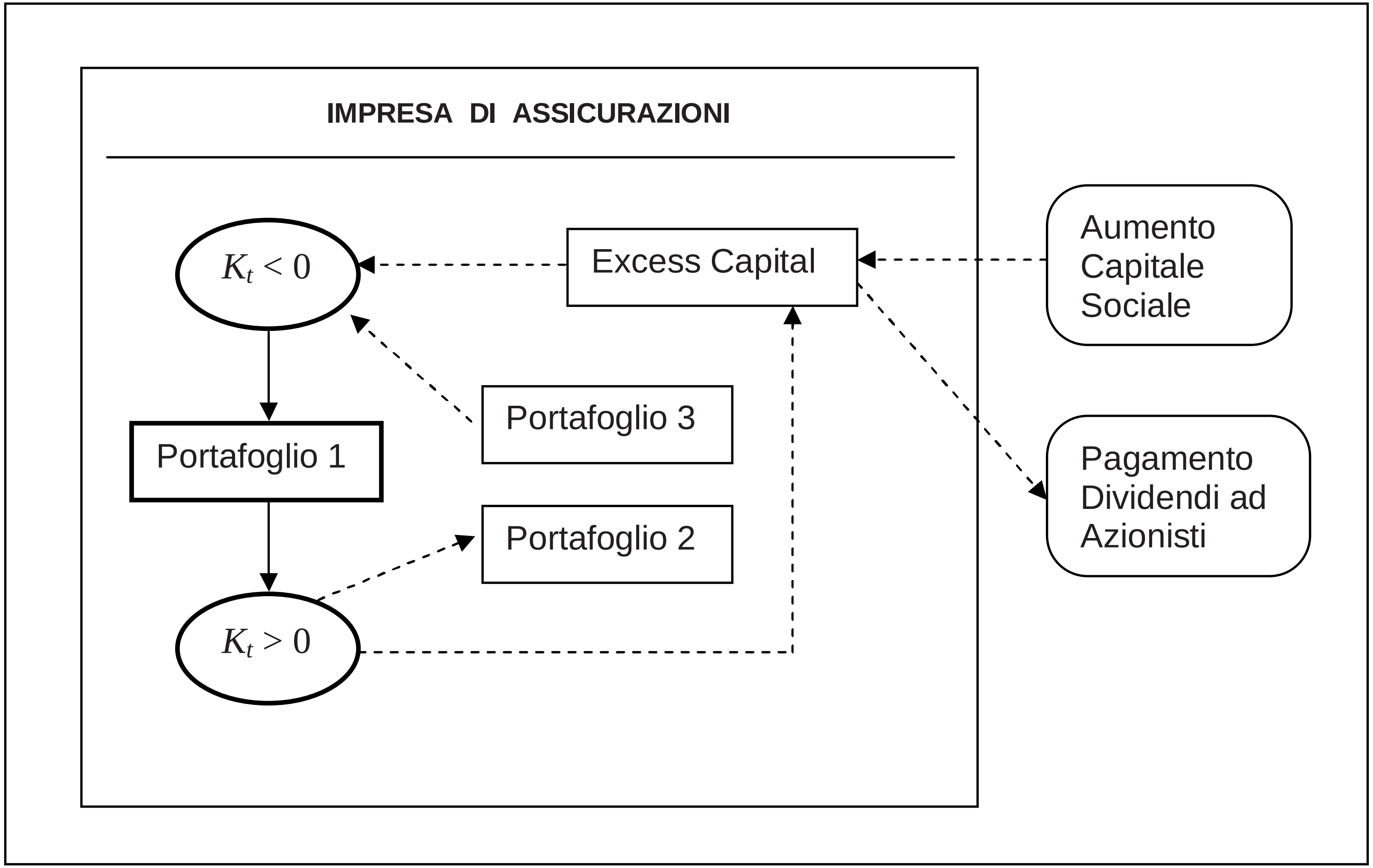
ANALISI FINANZIARIA

Fondo di portafoglio alimentato da:

- flussi industriali
- flussi di capitale proprio K_t
  - ▷ dal portafoglio al “resto” dell’impresa
    $\Rightarrow$ prelevamento di capitale proprio dal fondo $\Rightarrow K_t > 0$
  - ▷ dal “resto” dell’impresa al portafoglio
    $\Rightarrow$ versamento di capitale proprio nel fondo $\Rightarrow K_t < 0$

  Nota: il segno di K_t corrisponde alla visione del fondo dal resto dell’impresa
  (vedi Figura seguente)

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*



Flussi di capitale proprio

Ridefinizione del fondo atteso, tenendo conto dei movimenti di capitale proprio:

$$(\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)(1+i'') - C\,\bar{D}_t - R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1} - K_{t+1} = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]};$$
$$t = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$(\bar{F}_{m-1}^{[\mathrm{P}]} + P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_{m-1} - EX_{m-1}\,\bar{N}_{m-1})(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m - K_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$$

con $\bar{F}_0^{[\mathrm{P}]} = -K_0$ = allocazione iniziale di capitale

Cash-flow *industriali* di portafoglio:

$$\overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_t - EX_t\,\bar{N}_t)(1+i'') - C\,\bar{D}_t - R_{t+1}\,\bar{A}_{t+1}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-2$$
$$\overline{CF}_m^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} = (P^{[\mathrm{T}]}\,\bar{N}_{m-1} - EX_{m-1}\,\bar{N}_{m-1})(1+i'') - C\,\bar{D}_{m-1} - S\,\bar{N}_m$$

Quindi:

$$\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}\,(1+i'') + \overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} - K_{t+1} = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-1 \qquad (*)$$

con $\bar{F}_0^{[\mathrm{P}]} = -K_0$

In forma esplicita:

$$\bar{F}_0^{[\mathrm{P}]} = -K_0$$

$$\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} = \sum_{h=1}^{t} \overline{CF}_h^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}\,(1+i'')^{t-h} + \sum_{h=0}^{t}(-K_h)\,(1+i'')^{t-h}; \quad t = 1, 2, \ldots, m$$

Variazione annua del fondo (vedi $(*)$):

$$\overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} = \overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} + \bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}\,i'' - K_{t+1}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-1$$

Capitale proprio, o NAV, al tempo t:

$$M_t = \bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}; \quad t = 1, 2, \ldots, m$$

con $M_0 = -K_0$

Dalla $(^*)$, si ottiene per $t = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$(\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]})(1+i'') + \underbrace{\overline{CF}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} + \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}\,(1+i'') - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}}_{\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}} - K_{t+1} = \bar{F}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} - \hat{V}_{t+1}^{[\mathrm{P}]}$$

cioè:

$$M_t\,(1+i'') + \overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} - K_{t+1} = M_{t+1}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-1 \qquad (^\circ)$$

e quindi

$$M_t + \underbrace{M_t\, i'' + \overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{capitale proprio} \\ \text{generato dalla} \\ \text{gestione}}} \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{capitale proprio} \\ \text{apportato / prelevato} \\ \text{in } t+1}}{-K_{t+1}} = M_{t+1}; \quad t = 0, 1, \ldots, m-1$$

Dalla $(^\circ)$ in forma esplicita:

$$M_t = \sum_{h=1}^{t} \overline{PL}_h^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} \, (1+i'')^{t-h} + \sum_{h=0}^{t} (-K_h)\,(1+i'')^{t-h}$$

$$= M_0\,(1+i'')^t + \sum_{h=1}^{t} (\overline{PL}_h^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} - \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{utile} \\ \text{distribuibile}}}{K_h})\,(1+i'')^{t-h}$$

Dalla $(^\circ)$ si ricava:

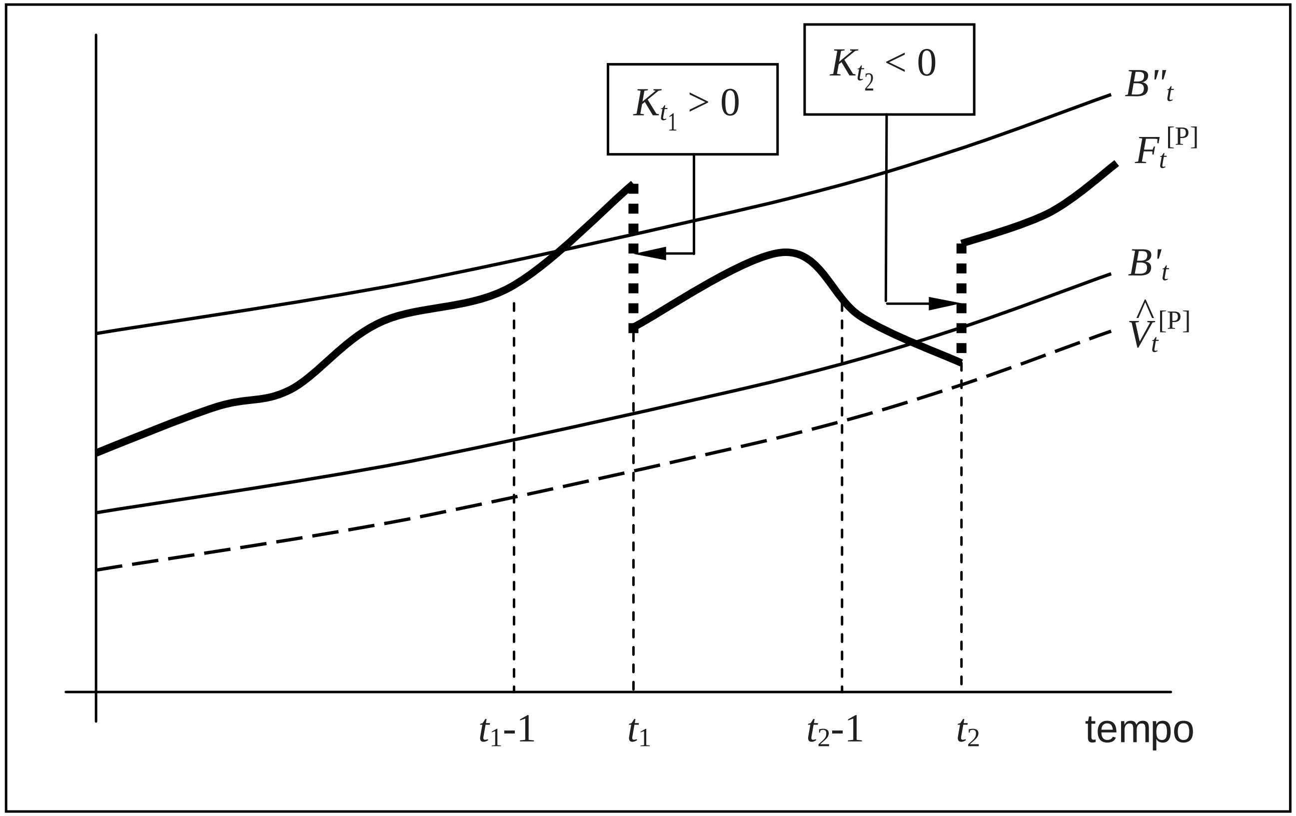
$$K_{t+1} = \overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} + \underbrace{M_t\,(1+i'') - M_{t+1}}_{\text{“adeguamento” del capitale proprio}} \qquad (^{\circ\circ})$$

I flussi K_t (e quindi gli “adeguamenti” del capitale proprio) vanno determinati in base a politiche aziendali di allocazione del capitale proprio

- requisito fondamentale: $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} \geq \hat{V}_t^{[\mathrm{P}]} \;\Leftrightarrow\; M_t \geq 0$
- esempi di ulteriori requisiti
  - ▷ modello “a barriere” (vedi Figura seguente)
  - ▷ flusso K_t tale che $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} = \underbrace{\hat{V}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{BE}]} + RM_t + SCR_t}_{\text{Adequacy requirement}}$

Ipotesi: $K_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]}$, cioè tale che $\bar{F}_{m^+}^{[\mathrm{P}]} = 0$

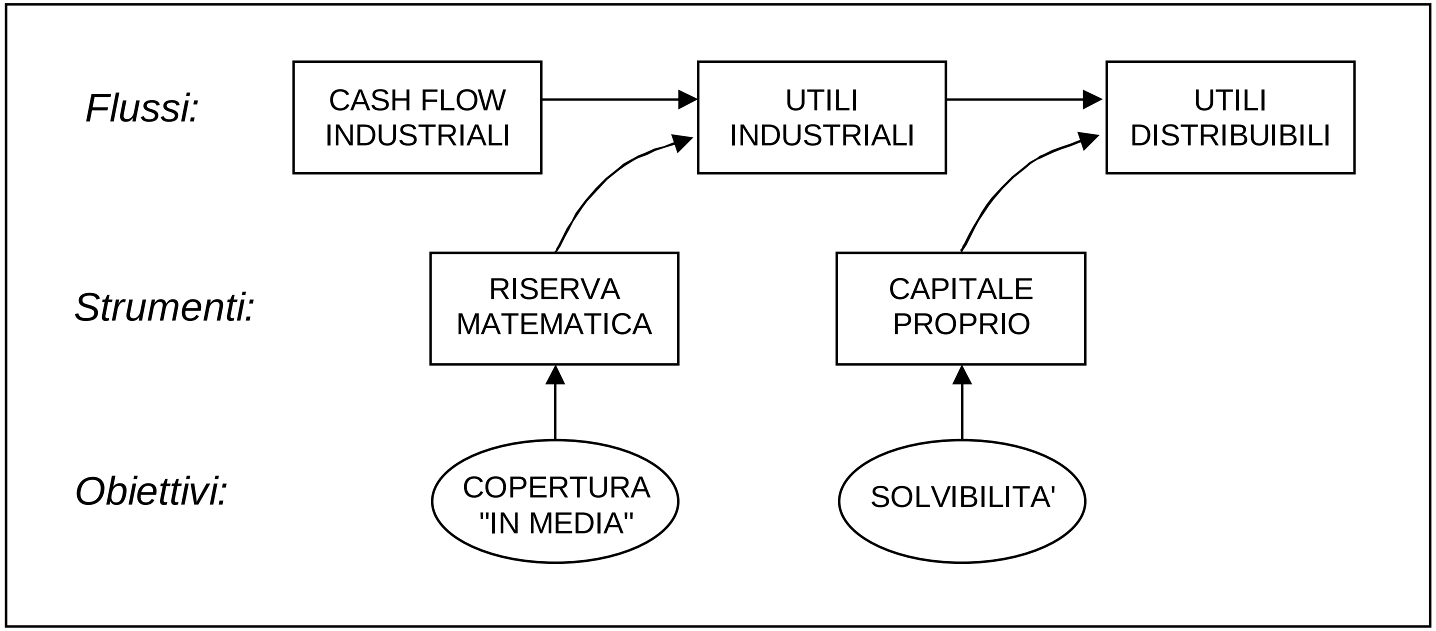
Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*



Modello "a barriere"

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

Diverse configurazioni di “flussi” a seconda degli obiettivi dell’analisi



Dai cash-flow industriali agli utili distribuibili

Valutazione globale (relativa ad una generazione): valore attuale dei flussi di capitale proprio, attualizzati al costo-opportunità ρ del capitale proprio:

$$NPV_{(0,m)}(\rho) = \sum_{t=0}^{m} K_t \ (1+\rho)^{-t} = -M_0 + \sum_{t=1}^{m} K_t \ (1+\rho)^{-t}$$

Valore dei soli flussi futuri:

$$NPV_{(0^+,m)}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} K_t \ (1+\rho)^{-t}$$

Valutazioni relative ad epoche successive ($t > 0$):

$$NPV_{(t,m)}(\rho) = -M_t + \sum_{h=t+1}^{m} K_t \ (1+\rho)^{-(h-t)}$$

$$NPV_{(t^+,m)}(\rho) = \sum_{h=t+1}^{m} K_t \ (1+\rho)^{-(h-t)}$$

Notare:

- aspetto “intuitivo” della definizione di valore in termini di NPV: valore rappresentato da quanto il portafoglio rilascia al resto dell’impresa ($K_t > 0$) al netto di quanto il portafoglio richiede ($K_t < 0$)
- tasso ρ più elevato $\Rightarrow$ minore peso ai movimenti di capitale lontani nel tempo $\Rightarrow$ in particolare, preferenza per un rilascio rapido di capitale
- per collegamento con gli utili industriali: vedi Analisi di redditività

ANALISI DI REDDITIVITÀ

Utile annuo atteso del portafoglio, definito dalla:

$$\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}]} = \overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} + M_t \, i''$$

con componenti

- *industriale*: $\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$
- *patrimoniale*: $\overline{PL}_{t+1}^{[\mathrm{P}][\mathrm{NAV}]} = M_t \, i''$

Valore (all'epoca 0) degli utili annui attesi sull'intera durata del portafoglio:

$$\overline{PL}_{(0,m)}^{[\mathrm{P}]}(\rho) = \sum_{h=1}^{m} \overline{PL}_{h}^{[\mathrm{P}]} \, (1+\rho)^{-h}$$

Valore (all'epoca 0) degli utili annui industriali attesi sull'intera durata del portafoglio:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}_{(0,m)}(\rho) = \sum_{h=1}^{m} \overline{PL}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}_{h} \, (1+\rho)^{-h}$$

= *Present Value of Future Profits* $(= PVFP_0)$

Valori (all'epoca t) degli utili annui attesi sulla durata residua del portafoglio:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}_{(t,m)}(\rho) = \sum_{h=t+1}^{m} \overline{PL}^{[\mathrm{P}]}_{h} \, (1+\rho)^{-(h-t)}$$

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}_{(t,m)}(\rho) = \sum_{h=t+1}^{m} \overline{PL}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}_{h} \, (1+\rho)^{-(h-t)} \qquad (= PVFP_t)$$

Esempio

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie. Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $\delta = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015 \;\Rightarrow\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
- $N_0 = 10\,000$
- assenza di riscatti
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$
- $\delta'' = \delta$, $\beta'' = \beta$, $\gamma'' = \gamma$
- $\rho = 0.08$

Effetto di diversi profili di riserva sul valore degli utili industriali: utili “accelerati” $\Rightarrow$ valore maggiore (v. Tabella)

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

	Riserva pura			Riserva di Zillmer
t	0.00	0.02	0.04	0.02
1	−1 739 397.35	−338 323.21	235 364.26	5 859.32
2	109 586.90	44 724.16	447 514.00	11 920.19
3	126 199.62	50 504.47	25 950.56	18 028.55
4	142 607.82	56 309.51	20 177.21	24 174.77
5	158 788.55	62 127.25	14 195.72	30 347.66
6	174 716.49	67 943.87	7 995.00	36 534.22
7	190 363.75	73 743.49	1 562.48	42 719.47
8	205 699.66	79 507.93	−5 116.19	48 886.15
9	220 690.55	85 216.49	−12 057.42	55 014.54
10	235 299.56	90 845.64	−19 280.06	61 082.10
11	249 486.42	96 368.73	−26 805.86	67 063.22
12	263 207.26	101 755.69	−34 659.95	72 928.88
13	276 414.44	106 972.68	−42 871.41	78 646.26
14	289 056.37	111 981.73	−51 473.97	84 178.46
15	301 077.45	116 740.40	−60 506.77	89 484.01
$\overline{PL}^{[P][I]}_{(0,15)}(0.08)$	−145 344.54	258 354.53	557 293.89	342 064.45

Utili annui industriali attesi e loro valore secondo profili alternativi di riserva

REINTERPRETAZIONE DI MODELLI PARTICOLARI

Modello attuariale tradizionale con logica *profits released*
$\Rightarrow$ strategia di flussi:

$$K_0 = 0,\ K_1 = \overline{PL}_1^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}, \ldots,\ K_m = \overline{PL}_m^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$$

Si trova quindi (per $t = 1, 2, \ldots, m$):

- $\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]} = \bar{V}_t^{[\mathrm{P}]} \ \Rightarrow\ M_t = 0$ (NAV nullo)
- $\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{NAV}]} = 0 \ \Rightarrow\ \overline{PL}_t^{[\mathrm{P}]} = \overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$
- valore degli utili: $\overline{PL}_{(0,m)}^{[\mathrm{P}]}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} \overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} (1+\rho)^{-t}$
- $NPV_{(0,m)}(\rho) = \sum_{t=0}^{m} K_t\ (1+\rho)^{-t} = \sum_{t=1}^{m} \overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} (1+\rho)^{-t}$

Modello attuariale tradizionale con logica *profits retained* (modello del "fondo di portafoglio", senza allocazione iniziale di capitale)
$\Rightarrow$ strategia di flussi:

$$K_0 = 0,\ K_1 = 0,\ K_2 = 0,\ \ldots,\ K_m = \bar{F}_m^{[\mathrm{P}]} \left(\Rightarrow\ \bar{F}_{m^+}^{[\mathrm{P}]} = 0 \right)$$

ANALISI PATRIMONIALE

Obiettivo: valutazione di assets, liabilities e capitale proprio

In termini di valori attesi $\Rightarrow$ valutazioni già ricavate dalle analisi finanziaria e di redditività

Possibili ulteriori obiettivi: calcolo del rendimento medio del portafoglio d'investimento (tenendo conto delle varie categorie di assets), della sua duration, . . .

In termini stocastici: analisi di solvibilità, ALM, . . .

ESEMPI NUMERICI

Analisi

- finanziaria
- di redditività

tramite risultati

- ▷ annuali
- ▷ di sintesi

In particolare: effetto di diverse politiche di allocazione di capitale

Requisito minimo di capitale al tempo t, $M_t^{[\mathrm{min}]}$ (in base a normativa Solvency 1):

$$M_t^{[\mathrm{min}]} = 4\% \times \text{(riserva + premio)} + 3\ {}^0/_{00} \times \text{capitale sotto rischio}$$

Esempio

Portafoglio di assicurazioni miste ordinarie. Dati:

- $C = 1\,000$, $x = 50$, $m = 15$
- premi annui costanti per tutta la durata contrattuale
- $\mathrm{TB1} = (0.02, \mathrm{LT1}) \;\Rightarrow\; P = 59.54$
- $\delta = 0.55$, $\beta = 0.04$, $\gamma = 0.0015 \;\Rightarrow\; P^{[\mathrm{T}]} = 66.60$
- $N_0 = 10\,000$
- $\mathrm{TB2} = (0.03, \mathrm{LT2})$
- assenza di riscatti
- $\delta'' = \delta$, $\beta'' = \beta$, $\gamma'' = \gamma$
- $\rho = 0.08$
- politiche di allocazione del capitale
  1. $K_0 = -M_0^{[\min]};\; K_t \;\Rightarrow\; M_t = M_t^{[\min]};\; t = 1, 2, \dots, m$
  2. $K_0 = -(1.10\, M_0^{[\min]} + E_0^{[\mathrm{A}]});$
     $K_t \;\Rightarrow\; M_t = 1.10\, M_t^{[\min]};\; t = 1, 2, \dots, m$

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

t	$\hat{V}_t^{[\mathrm{P}]}$	$M_t^{[\min]}$	$\bar{N}_t$
0	–	54 914.61	10 000.00
1	573 687.47	75 943.25	9 969.55
2	1 153 665.85	97 186.15	9 935.89
3	1 739 553.40	118 627.27	9 898.68
4	2 330 915.86	140 248.39	9 857.57
5	2 927 262.45	162 029.01	9 812.16
6	3 528 041.94	183 946.17	9 762.03
7	4 132 638.76	205 974.29	9 706.72
8	4 740 369.25	228 085.00	9 645.73
9	5 350 478.29	250 247.01	9 578.51
10	5 962 136.36	272 426.02	9 504.50
11	6 574 437.28	294 584.55	9 423.05
12	7 186 396.87	316 681.96	9 333.53
13	7 796 952.88	338 674.39	9 235.21
14	8 404 966.48	360 514.82	9 127.37
15	–	–	9 009.23

Riserva, minimo capitale, dimensione portafoglio

t	$\bar{F}_t^{[\mathrm{P}]}$	M_t	$\overline{CF}_t^{[\mathrm{P}]}$	$\overline{CF}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$	$M_{t-1}\, i''$	K_t
0	54 914.61	54 914.61	–	–	–	−54 914.61
1	649 630.72	75 943.25	594 716.11	235 364.26	1 647.44	−357 704.41
2	1 250 852.00	97 186.15	601 221.29	607 491.91	2 278.30	25 759.55
3	1 858 180.67	118 627.27	607 328.67	601 782.05	2 915.58	31 978.94
4	2 471 164.25	140 248.39	612 983.58	595 485.36	3 558.82	38 247.20
5	3 089 291.46	162 029.01	618 127.21	588 546.36	4 207.45	44 554.08
6	3 711 988.12	183 946.17	622 696.66	580 905.49	4 860.87	50 887.58
7	4 338 613.05	205 974.29	626 624.93	572 499.05	5 518.39	57 233.76
8	4 968 454.25	228 085.00	629 841.20	563 259.26	6 179.23	63 576.46
9	5 600 725.31	250 247.01	632 271.06	553 114.46	6 842.55	69 897.02
10	6 234 562.38	272 426.02	633 837.08	541 989.36	7 507.41	76 174.04
11	6 869 021.83	294 584.55	634 459.45	529 805.55	8 172.78	82 382.98
12	7 503 078.83	316 681.96	634 057.00	516 482.16	8 837.54	88 495.82
13	8 135 627.27	338 674.39	632 548.44	501 936.79	9 500.46	94 480.71
14	8 765 481.30	360 514.82	629 854.03	486 086.74	10 160.23	100 301.53
15	–	–	−8 765 481.30	−8 540 375.08	10 815.44	488 070.66

Politica 1 di allocazione di capitale. Analisi finanziaria

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

t	$\overline{PL}_t^{[P]}$	$\overline{PL}_t^{[P][I]}$	$\overline{PL}_t^{[P][NAV]}$
1	$-336\,675.77$	$-338\,323.21$	$1\,647.44$
2	$47\,002.46$	$44\,724.16$	$2\,278.30$
3	$53\,420.06$	$50\,504.47$	$2\,915.58$
4	$59\,868.32$	$56\,309.51$	$3\,558.82$
5	$66\,334.70$	$62\,127.25$	$4\,207.45$
6	$72\,804.74$	$67\,943.87$	$4\,860.87$
7	$79\,261.88$	$73\,743.49$	$5\,518.39$
8	$85\,687.16$	$79\,507.93$	$6\,179.23$
9	$92\,059.04$	$85\,216.49$	$6\,842.55$
10	$98\,353.05$	$90\,845.64$	$7\,507.41$
11	$104\,541.51$	$96\,368.73$	$8\,172.78$
12	$110\,593.23$	$101\,755.69$	$8\,837.54$
13	$116\,473.14$	$106\,972.68$	$9\,500.46$
14	$122\,141.96$	$111\,981.73$	$10\,160.23$
15	$127\,555.84$	$116\,740.40$	$10\,815.44$

Politica 1 di allocazione di capitale. Analisi di redditività

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

t	$\bar{F}_t^{[P]}$	M_t	$\overline{CF}_t^{[P]}$	$\overline{CF}_t^{[P][I]}$	$M_{t-1}\, i''$	K_t
0	426 718.82	426 718.82	–	–	–	−426 718.82
1	657 225.04	83 537.57	230 506.22	235 364.26	12 801.56	17 659.61
2	1 260 570.62	106 904.77	603 345.58	607 491.91	2 506.13	23 863.09
3	1 870 043.40	130 489.99	609 472.78	601 782.05	3 207.14	30 126.39
4	2 485 189.09	154 273.23	615 145.69	595 485.36	3 914.70	36 440.97
5	3 105 494.36	178 231.91	620 305.28	588 546.36	4 628.20	42 796.76
6	3 730 382.74	202 340.79	624 888.37	580 905.49	5 346.96	49 181.95
7	4 359 210.48	226 571.72	628 827.74	572 499.05	6 070.22	55 582.79
8	4 991 262.75	250 893.50	632 052.27	563 259.26	6 797.15	61 983.31
9	5 625 750.01	275 271.72	634 487.26	553 114.46	7 526.80	68 365.08
10	6 261 804.98	299 668.62	636 054.98	541 989.36	8 258.15	74 706.88
11	6 898 480.29	324 043.01	636 675.30	529 805.55	8 990.06	80 984.40
12	7 534 747.03	348 350.16	636 266.74	516 482.16	9 721.29	87 169.83
13	8 169 494.71	372 541.83	634 747.68	501 936.79	10 450.50	93 231.52
14	8 801 532.78	396 566.30	632 038.07	486 086.74	11 176.25	99 133.51
15	–	–	−8 801 532.78	−8 540 375.08	11 896.99	525 203.68

Politica 2 di allocazione di capitale. Analisi finanziaria

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

t	$\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}]}$	$\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}$	$\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{NAV}]}$
1	−325 521.64	−338 323.21	12 801.56
2	47 230.29	44 724.16	2 506.13
3	53 711.62	50 504.47	3 207.14
4	60 224.21	56 309.51	3 914.70
5	66 755.45	62 127.25	4 628.20
6	73 290.83	67 943.87	5 346.96
7	79 813.72	73 743.49	6 070.22
8	86 305.09	79 507.93	6 797.15
9	92 743.30	85 216.49	7 526.80
10	99 103.79	90 845.64	8 258.15
11	105 358.79	96 368.73	8 990.06
12	111 476.98	101 755.69	9 721.29
13	117 423.18	106 972.68	10 450.50
14	123 157.99	111 981.73	11 176.25
15	128 637.39	116 740.40	11 896.99

Politica 2 di allocazione di capitale. Analisi di redditività

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*

			Politica 1	Politica 2
Valore degli utili annui				
globali	$\overline{PL}_{(0,15)}^{[P]}(0.08)$	$=$	$303\,525.57$	$318\,218.02$
industriali	$\overline{PL}_{(0,15)}^{[P][I]}(0.08)$	$=$	$258\,354.53$	$258\,354.53$
patrimoniali	$\overline{PL}_{(0,15)}^{[P][NAV]}(0.08)$	$=$	$45\,171.04$	$59\,863.50$
Valore attuale dei flussi di capitale proprio	$NPV_{(0,15)}(0.08)$	$=$	$183\,069.46$	$158\,582.03$

Valutazioni sintetiche comparative

Politica 2 comporta maggiore allocazione di capitale

$\Rightarrow$ maggiore valore degli utili annui patrimoniali e globali

$\Rightarrow$ minore valore attuale dei flussi di capitale proprio (penalizzati dalla maggiore allocazione iniziale di capitale e dai minori prelevamenti di capitale)

CREAZIONE DI VALORE

Valore attuale dei flussi di capitale proprio definito dalla:

$$NPV_{(0,m)}(\rho) = \sum_{t=0}^{m} K_t \, (1+\rho)^{-t}$$

(vedi slide prec.)

Si può dimostrare che, in base alla $(^{\circ\circ})$, risulta:

$$NPV_{(0,m)}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} \underbrace{\left[\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} - \underbrace{M_{t-1}\,(\rho - i'')}_{\text{“perdita” di valore}}\right]}_{\text{valore annuo atteso “creato”}} (1+\rho)^{-t}$$

“Perdita” di valore = extra-costo del capitale, cioè costo non coperto dal rendimento i'' dell’investimento

Espressione alternativa:

$$NPV_{(0,m)}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} \underbrace{\left[\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}]} - \underbrace{M_{t-1}\,\rho}_{\text{costo del capitale proprio}}\right]}_{\text{valore annuo atteso “creato”}} (1+\rho)^{-t}$$

Espressioni analoghe per $NPV_{(t,m)}(\rho)$, con $t = 1, 2, \ldots, m-1$

VALUE-IN-FORCE (VIF)

Rappresenta il valore dei flussi di portafoglio

VIF complessivo dell'impresa = somma dei VIF dei vari portafogli

Variabili da scegliere per la definizione del VIF

- ▷ flussi
- ▷ tasso di attualizzazione
- ▷ dotazione di capitale proprio all'epoca di valutazione

Flussi:

- usualmente flussi di capitale proprio $K_t \Rightarrow$ VIF = NPV

Tasso di attualizzazione:

- costo-opportunità del capitale proprio

oppure

- risk discount rate (RDR)

Dotazione di capitale proprio:

- il capitale presente all'epoca di valutazione t può essere incluso o no nel valore VIF

Definizione di VIF

- ○ assumiamo VIF = NPV
- ○ supponiamo costo-opportunità del capitale = RDR

Non includendo nel VIF il capitale proprio presente all'epoca di valutazione:

$$VIF_t = -M_t + NPV_{(t,m)}(\rho) = -M_t + \sum_{h=t+1}^{m} K_h \, (1+\rho)^{-(h-t)} \qquad (^\circ)$$

Includendo nel VIF il capitale proprio:

$$VIF_t^* = NPV_{(t,m)}(\rho) = \sum_{h=t+1}^{m} K_h \, (1+\rho)^{-(h-t)}$$

Significato del VIF: essendo

$$NPV_{(t,m)}(\rho) = \sum_{h=t+1}^{m} \underbrace{\left[\overline{PL}_h^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} - M_{h-1}\,(\rho - i'')\right]}_{\text{valore annuo atteso “creato”}} (1+\rho)^{-(h-t)} \qquad (^{\circ\circ})$$

si trova

- VIF_t = valore creato dal portafoglio nella sua vita residua
- VIF_t^* = valore creato dal portafoglio nella sua vita residua + capitale presente all'epoca t di valutazione

Espressione alternativa per il VIF: dalle $(^\circ)$ e $(^{\circ\circ})$ si ricava

$$VIF_t = \underbrace{\sum_{h=t+1}^{m} \overline{PL}_h^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} (1+\rho)^{-(h-t)}}_{PVFP_t = \overline{PL}_{(t,m)}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}(\rho)} - \underbrace{\sum_{h=t+1}^{m} M_{h-1} (\rho - i'') (1+\rho)^{-(h-t)}}_{ECC_t}$$

con

- $PVFP_t = \overline{PL}_{(t,m)}^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}(\rho)$ = valore utili industriali
- ECC_t = extra-costo del capitale (parte del costo del capitale non remunerata dagli investimenti)

VALUTAZIONI A LIVELLO D'IMPRESA

Valutazioni ottenute (nell'approccio deterministico) per somma di valutazioni a livello di portafogli

- VIF complessivo = somma dei VIF dei singoli portafogli
- Embedded Value = VIF complessivo + capitale proprio
- Valutazione del capitale netto
  - ▷ dallo stato patrimoniale $\Rightarrow$ capitale netto o Net Asset Value (NAV)
  - ▷ opportune rettifiche $\Rightarrow$ valutazione del capitale netto coerente con il valore di mercato degli attivi, con le potenzialità dell'impresa (tangibili e intangibili) $\Rightarrow$ Netto "rettificato", o Adjusted Net Asset Value (ANAV)

VIF

Siano

- ▷ $VIF^{(h)}$ = VIF (ad una data epoca) del portafoglio h
- ▷ $VIF^{*(h)}$ = VIF^{*} (ad una data epoca) del portafoglio h
- ▷ $VIF^{[\mathcal{C}]} = \sum_h VIF^{(h)}$
- ▷ $VIF^{*[\mathcal{C}]} = \sum_h VIF^{*(h)}$

Capitale netto

ANAV include sia il capitale assegnato ai portafogli, M, sia quello non assegnato, XC:

$$ANAV \; = \; M + XC$$

- ▷ M è detto **allocated capital**
- ▷ XC è detto **excess capital** (o **free surplus**)

Embedded Value

Procedimento di calcolo usualmente applicato:

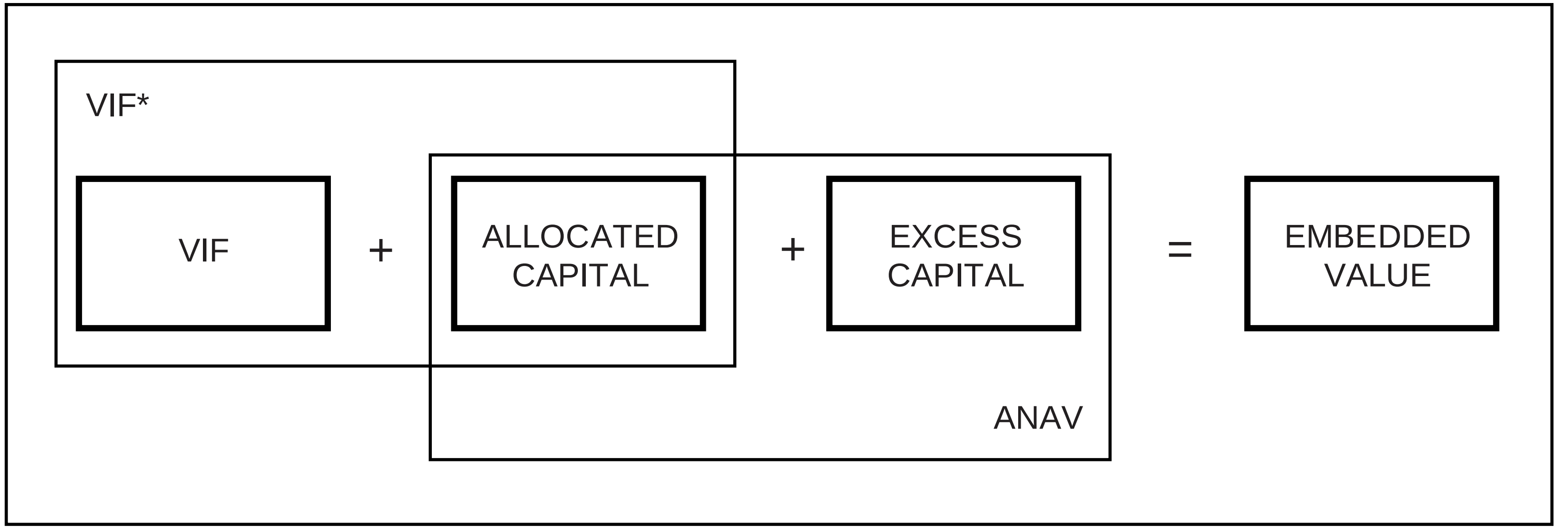
$$EV = VIF^{[\mathcal{C}]} + ANAV$$

Procedimento di calcolo alternativo:

$$EV = VIF^{*[\mathcal{C}]} + XC$$

- Problema: valutazione “separata” di M (incluso in $VIF^{*[\mathcal{C}]}$) e di XC (criteri di valutazione)

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*



Calcolo dell'Embedded Value

Goodwill

Goodwill = valore della produzione futura

Rispetto alla valutazione del portafoglio esistente:

- ulteriori elementi di aleatorietà: numeri di futuri contratti e relativi volumi di premi, dipendenti da
  - ▷ domanda totale di assicurazione sul mercato
  - ▷ quota di mercato dell'impresa assicuratrice
- l'orizzonte temporale non è implicitamente definito, ma deve essere assegnato

Procedimento di calcolo del Goodwill

- Value of New Business (VNB) = valore (secondo una configurazione di VIF) della produzione dell'anno appena trascorso
  - ▷ valore VNB corrente impiegato per stimare i VNB degli anni futuri VNB_1, VNB_2, . . . , entro un prefissato orizzonte T
- Calcolo del Goodwill GW

$$GW = \sum_{t=1}^{T} VNB_t \, (1 + \rho)^{-t}$$

Osservazioni sul procedimento di calcolo

- il tasso ρ può essere diverso da quello impiegato per valutare il VIF, in particolare più alto data la maggiore incertezza implicita nell'acquisizione dei VNB futuri
- le quantità VNB_t sono in genere ottenute in modo standardizzato
- esempio di procedimento standardizzato
  - ▷ indicatore della redditività della nuova produzione

$$\eta = \frac{VNB}{P^{[\mathrm{T}][\mathrm{NB}]}}$$

    con $P^{[\mathrm{T}][\mathrm{NB}]}$ totale premi della nuova produzione
  - ▷ tassi di sviluppo della produzione $j_1, j_2, \ldots, j_T$
  - ▷ stima introito premi futuri

$$P_t^{[\mathrm{T}][\mathrm{NB}]} = P^{[\mathrm{T}][\mathrm{NB}]} \prod_{h=1}^{t} (1 + j_h)$$

- in base ad η (eventualmente relativi anche ad anni precedenti) stima di $\eta_1, \eta_2, \ldots . \eta_T$
- calcolo di

$$VNB_t = P_t^{\mathrm{[T][NB]}}\ \eta_t$$

- calcolo del Goodwill

$$GW = \sum_{t=1}^{T} P_t^{\mathrm{[T][NB]}}\ \eta_t\ (1+\rho)^{-t} = \sum_{t=1}^{T} \left[P^{\mathrm{[T][NB]}} \prod_{h=1}^{t} (1+j_h) \right] \eta_t\ (1+\rho)^{-t}$$

$$= VNB\ \frac{\sum_{t=1}^{T} \left[\prod_{h=1}^{t} (1+j_h) \right] \eta_t\ (1+\rho)^{-t}}{\eta}$$

- in sintesi

$$GW = \gamma\, VNB$$

- però

$$\gamma = \gamma(T; j_1, j_2, \ldots .j_T; \eta_1, \eta_2, \ldots .\eta_T; \rho)$$

$\Rightarrow$ forte sensibilità del “moltiplicatore” γ alle variazioni dei parametri

Appraisal Value

Appraisal value AV (o “valore economico”) =
Embedded value + Goodwill

$$AV \;=\; EV + GW \qquad (*)$$

Osservazione

Il calcolo dell’Appraisal Value mediante la $(*)$ rappresenta il “percorso attuariale” per determinare il valore dell’impresa assicuratrice

Appraisal Value e Market Value

Market Value = valutazione dell'impresa espressa dal mercato

- ▷ capitalizzazione di borsa (= valore di una azione $\times$ numero di azioni)
- ▷ metodologie sintetiche di valutazione

Espressione del Market Value MV a partire dal capitale netto (rettificato):

$$MV = ANAV + MVA$$

con MVA = **Market Value Added**, valore aggiunto dal mercato al netto rettificato ($MVA \lesseqqgtr 0$)

Dalle espressioni dell'Appraisal Value e dell'Embedded Value si ricava

$$AV \;=\; EV + GW \;=\; ANAV + VIF + GW$$

Si assuma

$$AV \;=\; MV$$

Allora

$$MVA = VIF + GW$$

$\Rightarrow$ MVA = valutazione sintetica della redditività futura, prodotta da

- portafoglio in-force
- produzione futura

Ipotesi: il mercato conosce EV (tramite Embedded Value reporting)

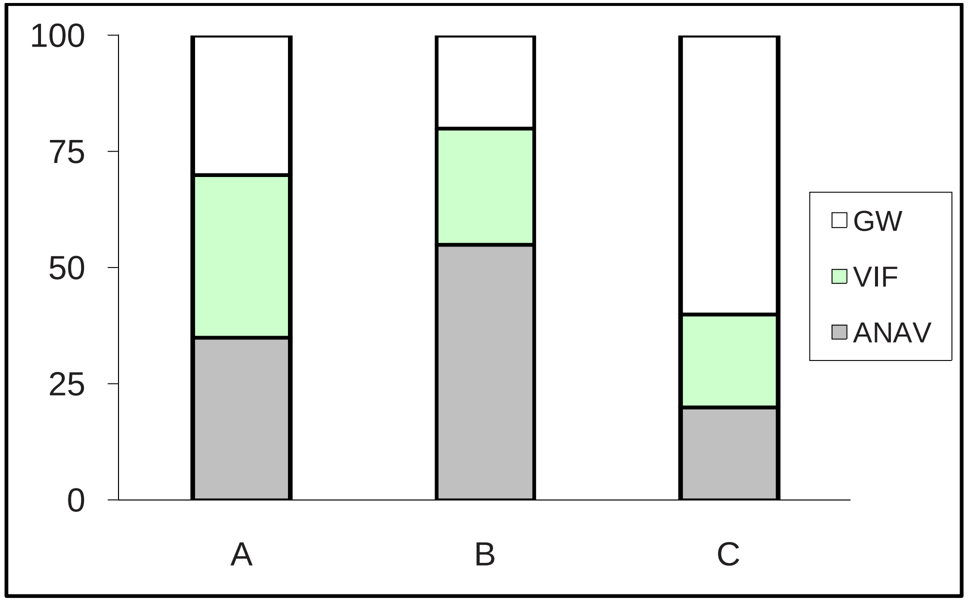
Il Market Value consente di determinare sinteticamente il Goodwill. Risulta

$$GW = AV - EV$$

e, nell'ipotesi $AV = MV$:

$$GW = MV - EV$$

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*



Componenti del Market Value per tre imprese assicuratrici

ASPETTI DINAMICI

Analisi dell'andamento nel tempo dell'Embedded Value e, in particolare, delle sue variazioni annue

Embedded Value Earnings (EVE)

EVE = variazione dell'EV in un anno, al netto di eventuali apporti o distribuzioni di capitale netto (dell'impresa)

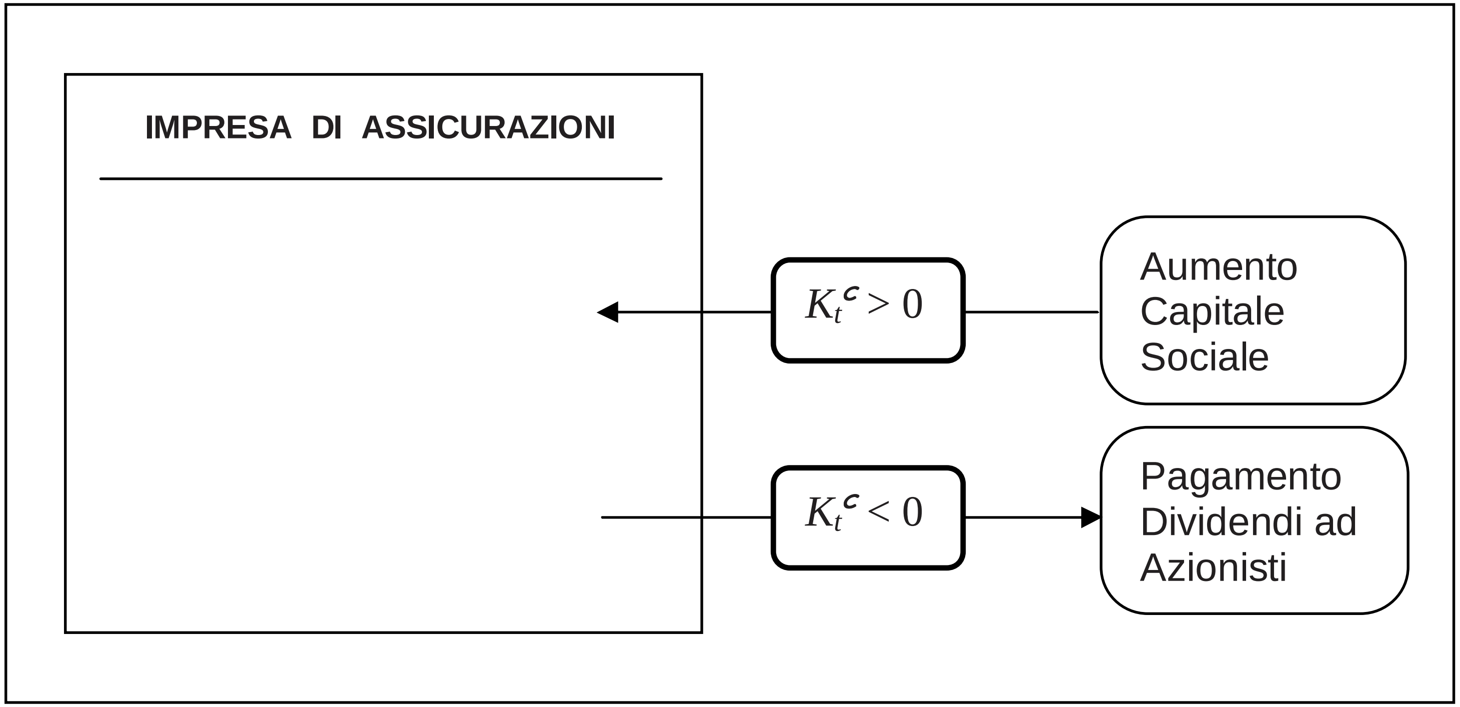
$$EVE_t = EV_t - EV_{t-1} - K_t^{\mathcal{C}}$$

con $K_t^{\mathcal{C}}$ variazione di capitale proprio dell'impresa (ANAV) per

- ▷ distribuzione dividendi $\Rightarrow K_t^{\mathcal{C}} < 0$
- ▷ aumenti di capitale $\Rightarrow K_t^{\mathcal{C}} > 0$

(v. Figura seguente)

Il modello di valutazione con capitale proprio *(cont.)*



Variazioni di capitale proprio

Cause di variazione dell'EV tra $t-1$ e t

- esperienza diversa dalle previsioni relative all'anno $(t-1, t)$
- VNB (incluso in VIF_t ma non in VIF_{t-1})
- diversa descrizione, all'epoca t rispetto a $t-1$, dello scenario futuro

Per individuare il loro contributo $\Rightarrow$ scomposizione dell'EVE, partendo da:

$$EVE_t = \underbrace{VIF_t - VIF_{t-1}}_{\text{variazione valore portafoglio (VIF)}} + \underbrace{ANAV_t - ANAV_{t-1} - K_t^{\mathcal{C}}}_{\text{variazione valore capitale netto}}$$

5 INDICI

Indici: grandezze sintetiche, solitamente adimensionali, atte a riassumere aspetti critici (per es. redditività) relativi ad un portafoglio di contratti assicurativi (KPI = Key Performance Indicators)

MODELLO ATTUARIALE TRADIZIONALE (SENZA CAPITALE PROPRIO)

Utile totale atteso per unità di premio di primo anno

Riferimento: una generazione di N_0 contratti:

$$\pi = \frac{\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}}{N_0\, P^{[\mathrm{T}]}}$$

Profit margin

Riferimento: una generazione di N_0 contratti, durata m anni)

$$\mu = \frac{\overline{PL}^{[\mathrm{P}]}}{\sum_{t=0}^{m-1} \bar{N}_t\, P^{[\mathrm{T}]}\, (1+i'')^{-t}}$$

Indice di "produttività" del premio

$$\pi' = \frac{\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} + N_0\, EX_0^{[\mathrm{A}]}}{N_0\, P^{[\mathrm{T}]}}$$

$$= \frac{\text{Utile totale atteso al lordo della spesa di acquisizione}}{N_0\, P^{[\mathrm{T}]}}$$

Significato

redditività non negativa $\Rightarrow \ \overline{PL}^{[\mathrm{P}]} \geq 0$ e quindi:

$$\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} + N_0\, EX_0^{[\mathrm{A}]} \geq N_0\, EX_0^{[\mathrm{A}]}$$

$$\frac{\overline{PL}^{[\mathrm{P}]} + N_0\, EX_0^{[\mathrm{A}]}}{N_0\, P^{[\mathrm{T}]}} \geq \frac{EX_0^{[\mathrm{A}]}}{P^{[\mathrm{T}]}} \quad \big(= \text{spesa di acquisizione per unità di premio}\big)$$

$$\frac{EX_0^{[\mathrm{A}]}}{P^{[\mathrm{T}]}} \leq \pi'$$

Quindi:

π' = massima spesa di acquisizione per unità di premio (per un dato premio di tariffa $P^{[\mathrm{T}]}$, comprendente il caricamento per spese di acquisizione) compatibile con redditività non negativa

Osservazione

Si supponga che, grazie a elevati margini di utile (di mortalità e/o finanziari), risulti per esempio $\pi' = 1.30$

Si decida quindi di assegnare una provvigione di acquisizione pari a $1.10\,P^{[\mathrm{T}]}$

Risultato:

- ▷ redditività positiva
- ▷ liquidità ? $\Rightarrow$ necessità di ricorso a capitale proprio (disponibile ?)

Il modello nel quale è definito l'indice di produttività del premio è un modello di redditività, non di liquidità

MODELLO ATTUARIALE CON CAPITALE PROPRIO

ROE

Return on Equity

$$ROE_t = \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}]}}{M_{t-1}}$$

Dalla scomposizione

$$\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}]} = \overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]} + M_{t-1}\, i''$$

si ha

$$ROE_t = \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} + i''$$

dove

$$\frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} = \text{rendimento del capitale proprio prodotto dalla gestione industriale}$$

Confronto tra ROE_t e ρ = costo del capitale:

- se $ROE_t > \rho \;\Rightarrow\; \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} + i'' > \rho$
  $\Rightarrow\; \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} > \rho - i'' \;\Rightarrow$ creazione di valore
- se $ROE_t < \rho \;\Rightarrow\; \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} + i'' < \rho$
  $\Rightarrow\; \frac{\overline{PL}_t^{[\mathrm{P}][\mathrm{I}]}}{M_{t-1}} < \rho - i'' \;\Rightarrow$ distruzione di valore

ROEV

Return on Embedded Value

$$ROEV_t = \frac{EVE_t}{EV_{t-1}}$$