

Fondamenti di Automatica

a.a. 2022/23

20/04/23

Tabella di Routh

Dato $\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$

1	φ_0	φ_2	φ_4	$\dots$
2	φ_1	φ_3	φ_5	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$i - 2$	h_1	h_2	h_3	$\dots$
$i - 1$	k_1	k_2	k_3	$\dots$
i	l_1	l_2	l_3	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

al massimo $n + 1$ righe

r_i

$$l_1 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad l_2 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ k_1 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\dots \quad l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

- Criterio 6 (di Routh)

$$\operatorname{Re}(s_{i-1}) < 0, \forall i > 1 \iff \{r_i\} \neq 0 \text{ e concordi}$$

- Criterio 7 (di Routh-Hurwitz)

Se è possibile completare la tabella di Routh (n+1 righe), allora il numero di radici con parte reale positiva è pari al numero di cambiamenti di segno nella prima colonna della tabella di Routh ed il numero di radici con parte reale negativa è pari al numero di permanenze di segno nella prima colonna della tabella di Routh.



asintotica stabilita`



No cambiamenti di segno nella prima colonna della tabella completa

Verifica $n = 2$

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & \varphi_0 & \varphi_2 & 0 \\ 2 & \varphi_1 & 0 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 0 \end{array}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\varphi_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_2 \quad \text{OK!}$$

Esempio 1

$$\varphi(s) = s^3 + 5s^2 + 2s + 4$$

1	1	2	0
2	5	4	0
3	α	0	0
4	β	0	0

$$\alpha = -\frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{6}{5}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = 4$$

segni concordi nella colonna r_4



asintotica stabilita`

Esempio 2

$$\varphi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 9s + 6$$

1p	4	1	4	6
1v	3	2	9	0
1v	2	α	6	0
1v	1	β	0	0
1p	0	6	0	0

r_5

$$\alpha = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ \alpha & 6 \end{bmatrix} = 33$$

Due cambiamenti di segno
nella colonna r_5

↓ instabilità

Esempio 3

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$$

1	11	K
6	6	0
10	K	0
α	0	0
K	0	0

r_5

$$\alpha = -\frac{1}{10} \det \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 10 & K \end{bmatrix} = \frac{3}{5}(10 - K)$$

Se $K > 0$ e $K < 10$



no cambiamenti di segno
nella colonna r_5



asintotica stabilita`

$$P(s) = 2s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 7s^2 + 4s + 3$$

3 radici $\text{Re} < 0$

2 radici $\text{Re} > 0$

$P \downarrow$	5	+2	+12	+4
$P \downarrow$	4	+5	+7	+3
$P \downarrow$	3	$+\frac{46}{5}$	$+\frac{14}{5}$	
$P \downarrow$	2	$+\frac{176}{23}$	$+\frac{3}{5}$	
$q \downarrow$	1	$-\frac{47}{21}$		
$r \downarrow$	0	+3		

$$\alpha = -\frac{1}{5} \left| \begin{array}{cc} 2 & 12 \\ 5 & 7 \end{array} \right| = +\frac{46}{5}$$

$$-\frac{1}{5} \left(-\frac{46}{5} \right)$$

$$\beta = -\frac{1}{5} \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{array} \right| = \frac{14}{5}$$

3P 2V

$$\gamma = -\frac{5}{46} \left| \begin{array}{cc} 5 & 7 \\ \frac{46}{5} & \frac{14}{5} \end{array} \right| = +\frac{176}{23}$$

$$\delta = -\frac{5}{46} \left| \begin{array}{cc} 5 & 3 \\ \frac{46}{5} & 0 \end{array} \right| = +3$$

$$\eta = -\frac{23}{176} \left| \begin{array}{cc} \frac{46}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{176}{23} & 3 \end{array} \right| = -\frac{47}{21}$$

$$\theta = -\left(-\frac{21}{47} \right) \left| \begin{array}{cc} \frac{176}{23} & 3 \\ -\frac{47}{21} & 0 \end{array} \right| = +3$$

$$P(s) = s^3 + 3s - 2 = s^3 + 0 \cdot s^2 + 3s - 2$$

→	3	+ 1	+ 3
→	2	0	-2
→	1		
→	0		

Caso critico!
Come si continua
con l'algoritmo?

$$P(s) = s^4 + 7s^3 + 9s^2 + 3s + 6$$

$P \downarrow$	4	1	4	6
$r \downarrow$	3	2	9	
$r \downarrow$	2	$\alpha - 1$	$\beta + 12$	
$r \downarrow$	1	$\gamma + 33$		
$P \downarrow$	0	$\delta + 12$		

x2

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(9-8)}{2} = -\frac{1}{2}$$

↗ ↘
denn $\alpha > 0$

$$\beta = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{(0-12)}{2} = 12$$

$$\gamma = -\frac{1}{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = \frac{(-)(24+9)}{(-1)} = \frac{(+)(24+9)}{+1} = +33$$

↗ ↘
 > 0

$$\delta = -\frac{1}{33} \begin{vmatrix} -1 & +12 \\ +33 & 0 \end{vmatrix} = +12$$

Caso critico: "0" in 1^a colonna nelle
tabelle di Routh

$$P(s) = s^3 + 3s - 2 = s^3 + 0s^2 + 3s - 2$$

P	3	1	3
P	2	ε	-2
P	1	$\alpha(2+3\varepsilon)$	
v	0	$\alpha(-2)$	

2P 1v

$\varepsilon > 0$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$
piccolo e
piace

$$\alpha = -\frac{1}{\varepsilon} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 \\ \varepsilon & -2 \end{array} \right|$$

$$2+3\varepsilon \leftarrow = \frac{-(-2-3\varepsilon)}{\varepsilon} > 0$$

$$\alpha \left(-\frac{1}{2+3\varepsilon} \left| \begin{array}{cc|cc} \varepsilon & -2 \\ 2+3\varepsilon & 0 \end{array} \right| = -2 \right)$$

$$\alpha(0 + 2(2+3\varepsilon)) = -2(2+3\varepsilon)$$

$$P(s) = s^3 + 3s - 2$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & 1 & 3 \\
 \nu \downarrow & & & \\
 & 2 & -\varepsilon & -2 \\
 P \downarrow & & & \\
 & 1 & \textcircled{-2+3\varepsilon} & \\
 P \downarrow & 0 & -2 &
 \end{array}$$

$$\alpha = \frac{-2+3\varepsilon}{\varepsilon} = 3 \left(-\frac{2}{\varepsilon} \right) \rightarrow -\infty$$

$$-\varepsilon < 0$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{1}{(-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -\varepsilon & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{+(-2+3\varepsilon)}{\cancel{+\varepsilon}} \\
 &\quad -2+3\varepsilon < 0!!
 \end{aligned}$$

$$q(s) = s^2 + 4s$$

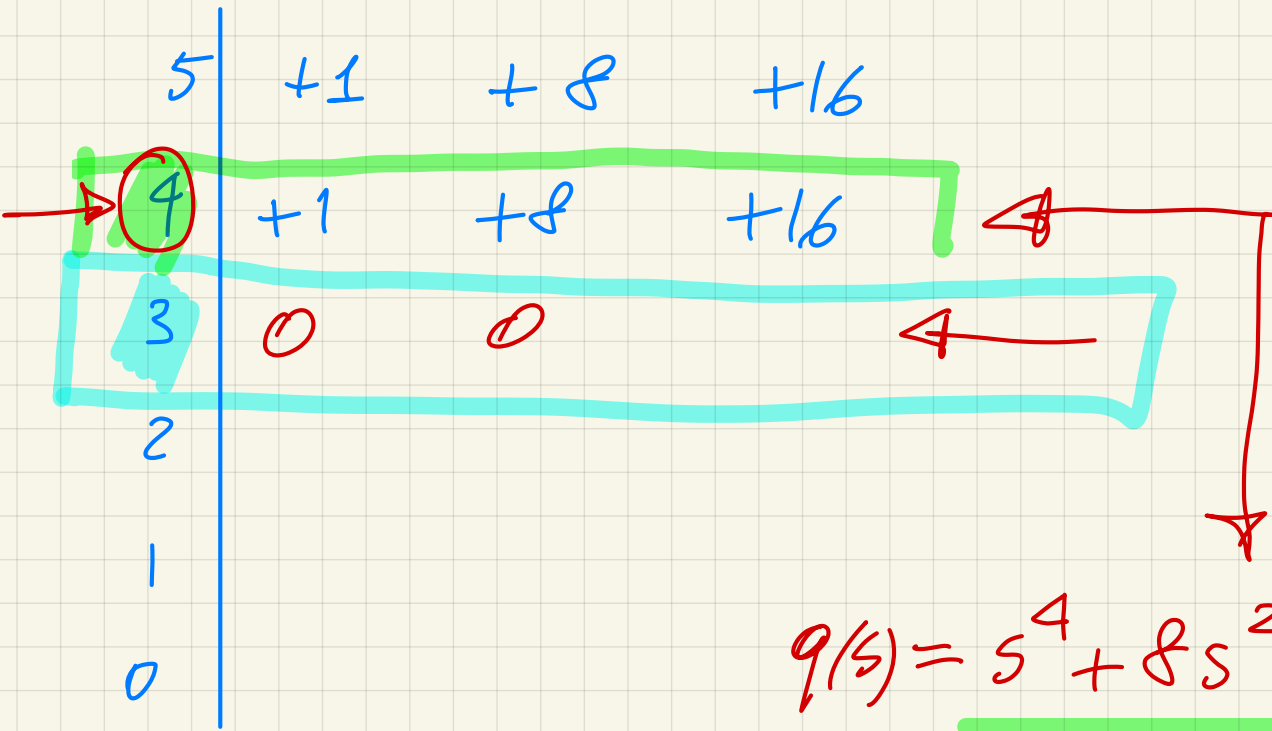
2		+1	0
1		+4	
		0	

terminus noto

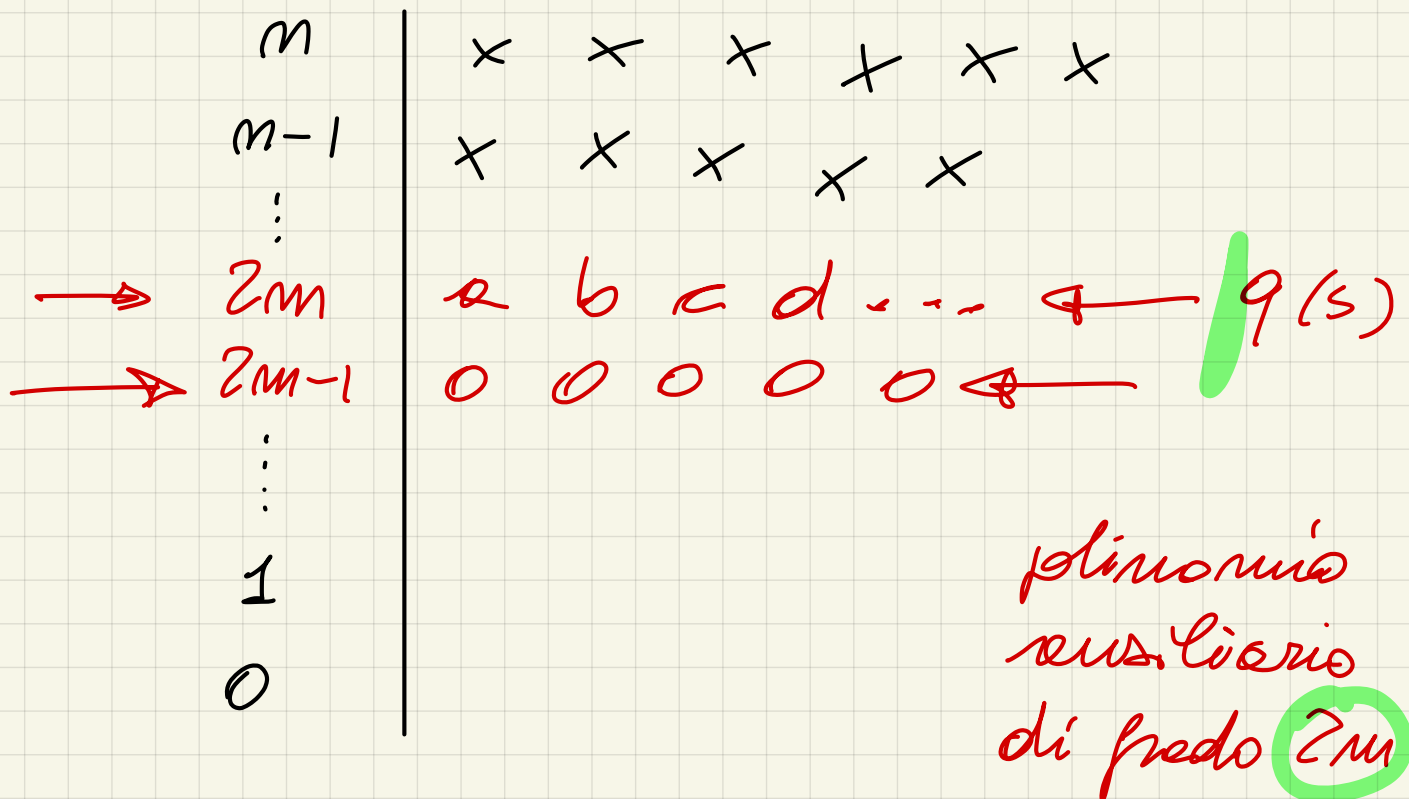
radice $s=0$

2° caso critico: niga TUTTA NULLA

$$p(s) = s^5 + s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 16s + 16$$



$t(s)$ grado m



$$P(s) = q(s) \underbrace{r(s)}_{\# m - 2m}$$

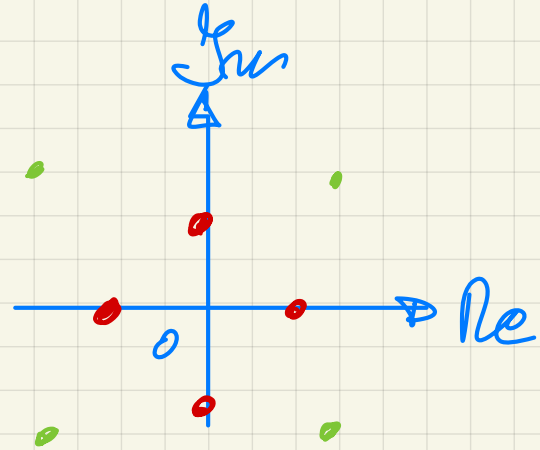
$\# m$ $\# 2m$

$$q(s) = r s^{2m} + b s^{2m-2} + c s^{2m-4} + \dots$$

$$P(s) = s^5 + s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 16s + 16$$

5	1	8	16
4	1	8	16
3	0	0	0
2			
1			
0			

$$q(s) = s^4 + 8s^2 + 16$$



radici di q simmetriche rispetto 0

$$s^4 + 8s^2 + 16 = (s^2 + 4)^2$$

$$s_{12,34} = \pm j2$$

$\begin{array}{r} s^5 + s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 16s + 16 \\ -s^5 \qquad -8s^3 \qquad -16s \\ \hline s^4 \qquad +8s^2 \qquad +16 \end{array}$	$\begin{array}{r} s^4 + 8s^2 + 16 \\ \hline (s+1) \end{array}$
--	--

$$P(s) = (s^4 + 8s^2 + 16) (s+1)$$

12 $Re < 0$

~~4~~ $Re = 0$

1P	5	1	8	16
	4	1	8	16
1P	3	+4	+16	
1P	2	+4	+16	
1P	1	0 8		
1P	0	+16		

1P $\rightarrow$ 1 real zero $\text{Re} < 0$

$$q(s) = s^4 + 8s^2 + 16$$

$$\frac{dq}{ds} \rightarrow 4s^3 + 16s$$

$$t(s) = 4s^2 + 16$$

$$\frac{dt}{ds} \rightarrow 8s$$

$$P(s) = s^3 + 2s^2 - s - 2 = (s^2 - 1)(s + 2)$$

$$= \underbrace{(s-1)(s+1)}_{q(s)} \underbrace{(s+2)}_{r(s)}$$

1 $\text{Re} > 0$
1 $\text{Re} < 0$

1 $\text{Re} < 0$

Tabelle di Routh

3	+1	-1
2	+2	-2
1	0	0
0		

polinomio ausiliario

$$q(s) = +2s^2 - 2$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = 0$$

riga con indice "diversi" e tutta nulla!
Infatti riga "1" ha 1 solo elemento

Determino il polinomio derivato a partire dal polinomio ausiliario $q(s)$

$$\frac{dq(s)}{ds} = 4s$$

sostituisco e proseguo

3	+1	-1
2	+2	-2
1	0 +4	0
0	-2	

4	3	+1	-1
1p	2	+2	-2
1p	1	0 +4	
10	0	-2	

← rifs del polinomio ausiliario $q(s)$

$$P(s) = q(s) \cdot r(s)$$

1p
10

1p

1 radice $Re < 0$

1 radice $Re < 0$

1 radice $Re > 0$

Il sistema
dinamico che
ha $P(s)$ come
polinomio
caratteristico

$$[P(s) = \det(sI - A)]$$

è sistema instabile