# Esercizio 1

La simmetria di una teoria di campo sotto il gruppo di Poincaré (i.e. traslazioni e Lorentz) è conseguenza dell'invarianza dell'azione $S$ sotto trasformazioni

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu + O(\xi^2) \ , \tag{1}$$

in cui il parametro infinitesimo $\xi^\mu$ soddisfa:

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \ . \tag{2}$$

La soluzione più generale è infatti $\xi^\mu = a^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$ dove il vettore costante $a^\mu$ è il parametro di una traslazione, e la matrice antisimmetrica $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ è il parametro di una trasformazione di Lorentz.

**(i)** Sapendo che $\delta S = 0$ quando il parametro $\xi$ soddisfa (2), scrivi la variazione linearizzata di $S$ sotto una trasformazione (1) in cui il parametro infinitesimo $\xi^\mu$ è una funzione generica, che non soddisfa nessun vincolo. Deduci quindi l'esistenza di un tensore simmetrico $T^{\mu\nu}$ che soddisfa $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ quando sono soddisfatte le equazioni del moto. Questo tensore è detto *tensore energia-impulso* della teoria di campo, e da esso si possono costruire le cariche conservate associate al gruppo di Poincaré.

**(ii)** Scrivi l'identità di Ward soddisfatta dalla funzione di correlazione di $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ con degli operatori, sia in spazio delle coordinate che in spazio dei momenti. Per semplicità considera solo operatori scalari di Lorentz, che sotto la trasformazione (1) si trasformano come segue: $\delta_\xi O(x) = \xi^\mu \partial_\mu O(x)$.

**(iii)** Considera la teoria di uno scalare libero con azione

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \ . \tag{3}$$

Calcola la variazione linearizzata dell'azione sotto la trasformazione $\delta_\xi \phi = \xi^\mu \partial_\mu \phi$ del campo, e usando il punto (i) deduci l'espressione dell'operatore $T^{\mu\nu}$ in questa teoria. Quindi calcola la funzione di correlazione

$$\langle T^{\mu\nu}(p) \phi(q) \phi(-p-q) \rangle \ , \tag{4}$$

e verifica che soddisfa l'identità di Ward derivata al punto (ii).

## Esercizio 2

Considera la teoria di un campo scalare complesso $z$ e di un campo di Dirac $\psi$ con azione

$$S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z - m^2 \bar{z} z + i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{y}{2}\left[ z(\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^5\psi) + \bar{z}(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma^5\psi) \right] \right\} \ . \tag{5}$$

La matrice $\gamma^5$ è definita da

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \ , \tag{6}$$

e ha le seguenti proprietà:

- $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$,
- $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$,
- $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

Nella *rappresentazione di Weyl* delle matrici gamma in cui $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ la matrice è data da $\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$.

**(i)** Verifica che l'azione è reale quando la costante di accoppiamento $y$ è reale. Quindi scrivi le regole di Feynman.

**(ii)** Considera la trasformazione detta "$U(1)$ assiale" o "chirale" (perché agisce in maniera diversa sulle componenti di Weyl $\psi_L$ e $\psi_R$)

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\alpha\gamma^5}\psi \ , \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma^5} \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Mostra che la trasformazione di $\bar{\psi}$ è conseguenza di quella di $\psi$. Mostra quindi che

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi &\to i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \ , \\ \bar{\psi}\psi \pm \bar{\psi}\gamma^5\psi &\to e^{\pm 2i\alpha}(\bar{\psi}\psi \pm \bar{\psi}\gamma^5\psi) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

(A tal fine, una possibile strategia è utilizzare la proprietà $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ per ottenere che $e^{2i\alpha\gamma^5} = \cos(2\alpha) + i\gamma^5 \sin(2\alpha)$). Deduci che la teoria in esame ha una simmetria sotto la trasformazione $U(1)$ assiale accompagnata dalla seguente trasformazione del campo scalare complesso

$$\begin{aligned} z &\to e^{2i\alpha} z \ , \\ \bar{z} &\to e^{-2i\alpha}\bar{z} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Scrivi la trasformazione dell'azione quando $\alpha$ è una funzione di $x$ e ottieni la corrente conservata $j^\mu$ associata a questa simmetria. Infine calcola la funzione di correlazione $\langle j^\mu(p)\psi(q)\bar{\psi}(-p-q)\rangle$ all'ordine $y^0$ (teoria libera) e verifica l'identità di Ward associata alla simmetria.

**(iii)** Calcola la funzione di correlazione a due punti 1PI $\langle z(p)\bar{z}(-p)\rangle$ all'ordine più basso nell'espansione perturbativa nella costante di accoppiamento $y$. È sufficiente esprimere il risultato come un integrale sul momento del loop, senza calcolare l'integrale, ma è richiesto calcolare la traccia sugli indici spinoriali.