Esercizio 1

(i) Considera la teoria di un campo vettoriale senza massa libero, con azione

$$S_{\text{Maxwell}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] . \tag{1}$$

Per quantizzare la teoria, considera il gauge fixing con R_ξ gauge. Mostra che nelle funzioni di correlazione della field-strength $\langle F_{\mu_1\nu_1}(p_1) \dots F_{\mu_n\nu_n}(p_n) \rangle$ la dipendenza dal parametro ξ si cancella.

(ii) Aggiungi ora l'interazione con un campo di Dirac, considera quindi la QED con azione

$$S_{\text{QED}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{D} \psi - M\bar{\psi}\psi \right] . \tag{2}$$

Scrivi la funzione a quattro punti $\langle \psi(p_1)\bar{\psi}(p_2)\psi(p_3)\bar{\psi}(p_4) \rangle$ connessa nello spazio dei momenti, a livello albero $\mathcal{O}(e^2)$. Nota che in questo caso la dipendenza da ξ non si cancella. Come spieghi la differenza con il caso precedente?

(iii) Senza effettuare il calcolo, indica quale delle seguenti funzioni di correlazione è necessariamente indipendente da ξ: $\langle (\bar{\psi}\psi)(x)\psi(y)\bar{\psi}(z) \rangle$, $\langle (\bar{\psi}\psi)(x)(\bar{\psi}\psi)(y) \rangle$, $\langle (\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi)(x)(\bar{\psi}\psi)(y) \rangle$, $\langle (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\psi)(x)(\bar{\psi}\psi)(y) \rangle$.

Esercizio 2

Considera la teoria di un campo vettoriale massivo, con azione

$$S_{\text{Proca}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right] . \tag{3}$$

(i) Scrivi l'equazione soddisfatta dal propagatore $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle \equiv G_{\mu\nu}(x-y)$ nello spazio delle posizioni. Prendendo una derivata verifica che questa equazione implica

$$-im^2 \partial^\mu G_{\mu\nu}(x-y) = \partial_\nu \delta^4(x-y) . \tag{4}$$

(ii) Passa allo spazio dei momenti e usa l'equazione per fissare il propagatore. Verifica che il vincolo (4) è soddisfatto dalla soluzione trovata.