Laurea in Matematica

Università degli Studi di Trieste

Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria

Appello d'esame del 21 aprile 2023

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. *(12 punti)* Sia $F(x,y,z) = xz^2 - x^2y - yz^2 + xy^2 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ e sia $\mathcal{C} = V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la corrispondente curva algebrica proiettiva piana.

(a) *(6 punti)* Si determinino i punti singolari di $\mathcal{C}$ ed i rispettivi ordini.

(b) *(6 punti)* Si determinino le componenti irriducibili di $\mathcal{C}$.

2. *(12 punti)* Si considerino le seguenti curve algebriche proiettive piane:

$$\mathcal{C} = V(x(y^2 - xz) - y^3)\,,\ \mathcal{D} = V(y^2 - 2yz + z^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,.$$

(a) *(6 punti)* Si determini il grado di $\mathcal{D}$ ed un suo polinomio minimo.

(b) *(6 punti)* Si determinino i punti di intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ e le rispettive molteplicità di intersezione.

3. *(6 punti)* Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$, dove $|z|$ denota il modulo del numero complesso z. Si dica se X è una curva algebrica affine piana.