IAG SCRITTO 21/4/2023

SOLUZIONE

1. (a) $\nabla F = (z^2 - 2xy + y^2, -x^2 - z^2 + 2xy, 2xz - 2yz) =$

$$= (0,0,0) \iff \begin{cases} z^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - 2xy = 0 \\ z(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0, \quad y(-2x + y) = 0, \quad x(x - 2y) = 0 \\ x = y, \quad z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \begin{array}{l} \nearrow y = 0, \quad x = 0 \\ \searrow y = 2x, \quad x(-3x) = 0 \end{array} \Bigg\} \; x = y = z = 0 \\ x = y, \quad z = \pm y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sing}(\mathcal{C}) = \{[1:1:\pm 1]\}$$

Nell'aperto $x=1$: $F(1,y,z) = z^2 - y - yz^2 + y^2 =: f$

Per determinare $\mathrm{ord}_{(1,1)}(f)$ introduciamo le variabili $\eta = y-1$, $\zeta = z-1$

$$\Rightarrow f(\eta,\zeta) = (\zeta+1)^2 - \eta - 1 - (\eta+1)(\zeta+1)^2 + (\eta+1)^2$$

$$= \cancel{\zeta^2} + \cancel{2\zeta} + \cancel{1} - \cancel{\eta} - \cancel{1} - \eta\zeta^2 - 2\eta\zeta - \cancel{\eta}$$

$$- \cancel{\zeta^2} - \cancel{2\zeta} - \cancel{1} + \eta^2 + \cancel{2\eta} + \cancel{1} =$$

$$= \underbrace{-\eta\zeta^2}_{f_{(3)}} \underbrace{- 2\eta\zeta + \eta^2}_{f_{(2)}} \quad \Rightarrow \mathrm{ord}_{(1,1)}(f) = 2$$

Per calcolare l'ordine $\mathrm{ord}_{(1,-1)}(f)$ introduciamo le coordinate

$$\eta = y-1\,, \quad \xi = z+1$$

$$\Rightarrow f(\eta,\xi) = (\xi-1)^2 - \eta - 1 - (\eta+1)(\xi-1)^2 + (\eta+1)^2$$

$$= \cancel{\xi^2} - \cancel{2\xi} + \cancel{1} - \cancel{\eta} - \cancel{1} - \eta\xi^2 + 2\eta\xi - \cancel{\eta} - \cancel{\xi^2} + \cancel{2\xi} - \cancel{1} + \eta^2 + \cancel{2\eta} + \cancel{1}$$

$$= -\eta\xi^2 + 2\eta\xi + \eta^2 \quad \Rightarrow \mathrm{ord}_{(1,-1)}(f) = 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_{[1:1:\pm 1]}(\mathcal{C}) = 2$$

(b) Siccome $\deg(F) = 3$, se è riducibile deve contenere un fattore di grado 1, cioè $\exists$ una retta $L \subset \mathcal{C}$.

L deve passare per i punti singolari

$$\Rightarrow L = V(x-y)$$

D'altro canto

$$F = xz^2 - x^2y - yz^2 + xy^2 =$$

$$= z^2(x-y) + xy(y-x) = (x-y)(z^2 - xy).$$

$z^2 - xy$ è irriducibile $\Rightarrow$ le componenti irriducibili di $\mathcal{C}$ sono L e $V(z^2 - xy)$.

2. (a) $y^2 - 2yz + z^2 = (y-z)^2$

$\Rightarrow$ $y - z$ è un polinomio minimo di $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $\deg(\mathcal{D}) = 1$.

(b) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$: $\begin{cases} y = z \\ x(y^2 - xz) - y^3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x(y^2 - xy) - y^3 = 0 \end{cases}$

Se $y = z = 0 \Rightarrow [1:0:0] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$

Se $y = z \neq 0$, poniamo $y = z = 1$

$$\Rightarrow x - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \left\{ [1:0:0], \left[\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} : 1 : 1\right] \right\}$$

Dal teorema di Bézout segue che

$$\mathrm{mult}_p(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 1 \quad \forall p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

3. Se identifichiamo $\mathbb{C}^2$ con $\mathbb{R}^4$, allora

X = sfera di raggio 1 centrata nell'origine di $\mathbb{R}^4$ (S^3)

$\Rightarrow X$ è compatto $\Rightarrow X$ non può essere una curva algebrica affine (come visto a lezione).