Fisica Generale 1 – 018IN

Moto e dinamica dei corpi rigidi

→ lunedi prossimo 17 aprile: corso cancellato

→ martedì 18 aprile: corso invece delle esercitazioni

Prof. Pierre Thibault

pthibault@units.it

Corpi rigidi

Corpo rigido: un corpo di cui la forma e le dimensioni sono fissi

= posizioni relative tra parti del corpo sono fisse.

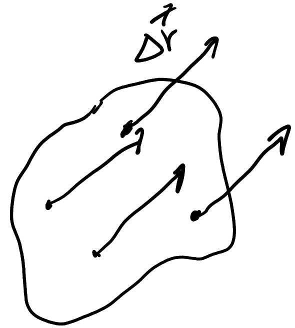
rigido

non-rigido

rigido ?

Corpi rigidi - cinematica

Traslazione



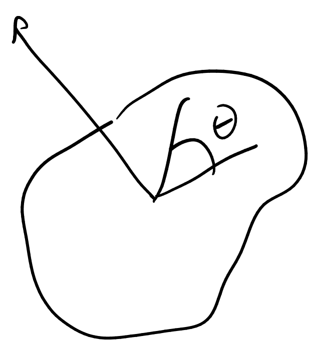
tutte le parti del corpo subiscono lo stesso spostamento

$\Downarrow$

hanno la stessa velocita

<u>3</u> parametri (x, y, z)

Rotazione

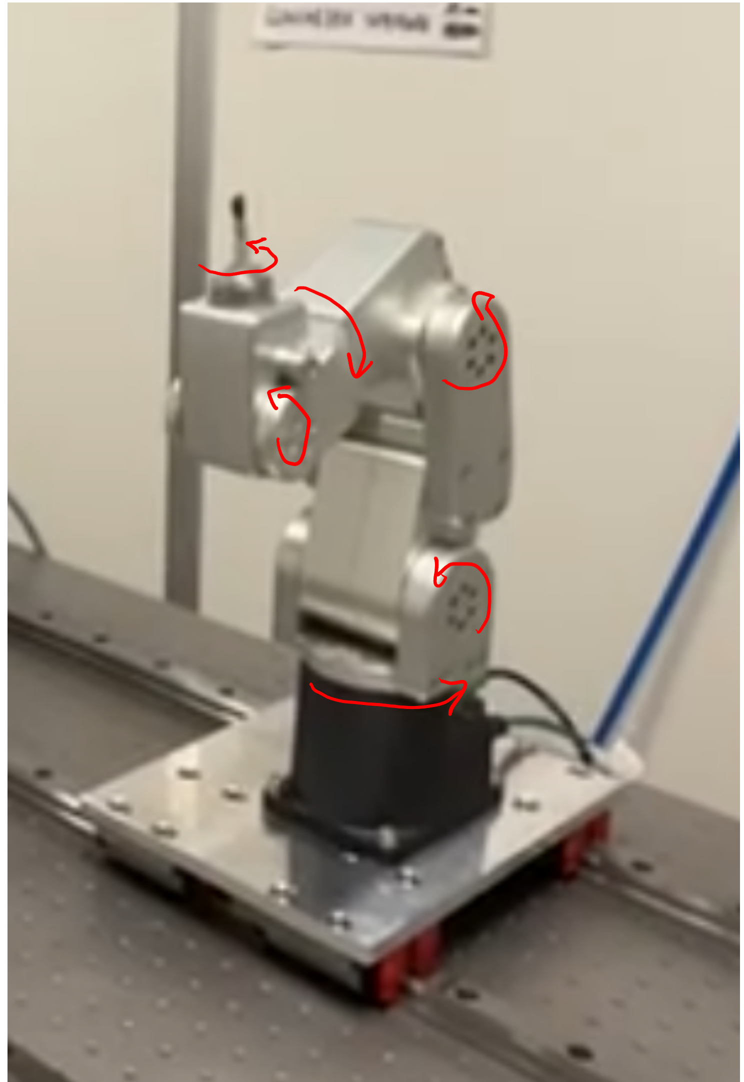


bisogna specificare 3 parametri

3 angoli / asse + angolo

"rototraslazione": 6 parametri

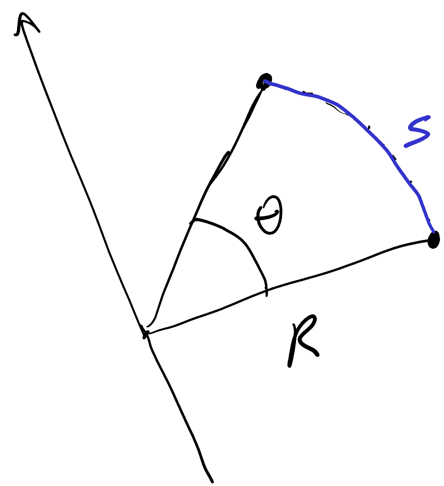
Corpi rigidi - cinematica



.

Cinematica del moto rotatorio

1) asse fisso, θ: rotazione attorno quest'asse.



s: lunghezza dell'arco per uno spostamento angolare a distanza R dell'asse

$\theta = s/R$ angolo in radiante

velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

accelerazione angolare $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$

Analogia

θ — x

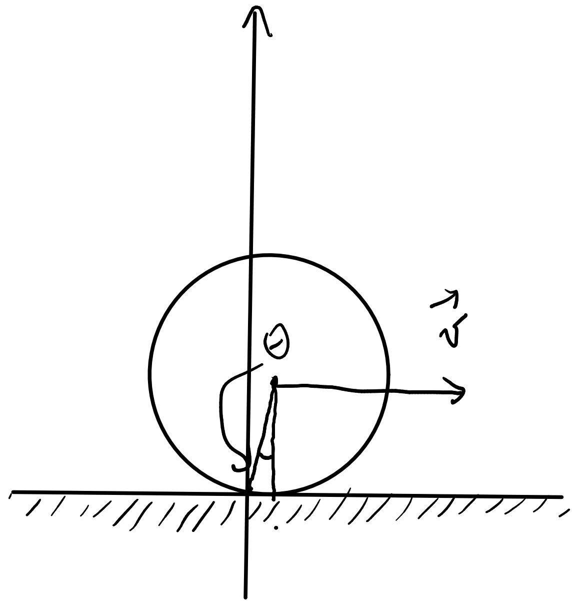
ω — v

α — a

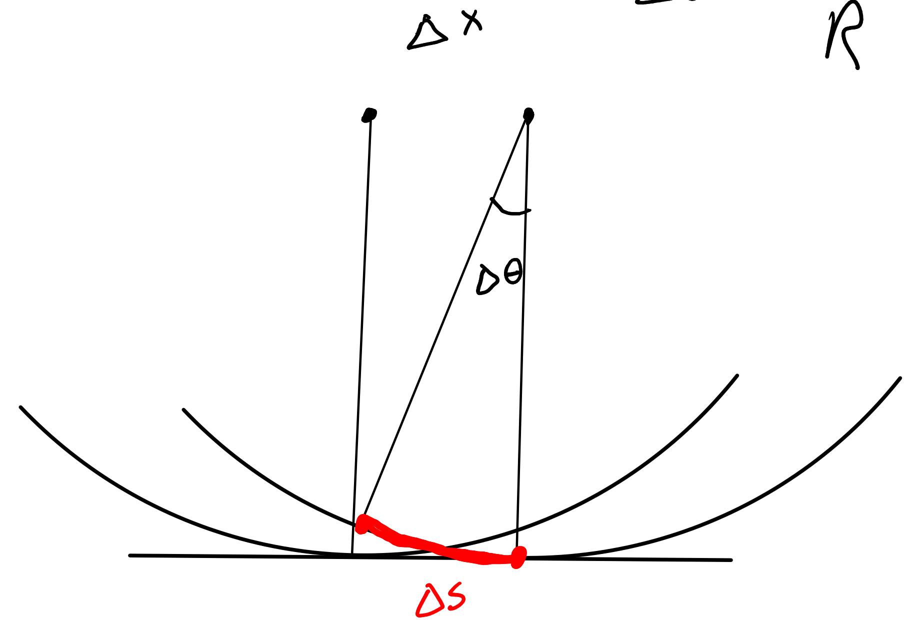
e.g. accelerazione angolare costante:

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Rotolamento



$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$



Rotolamento:

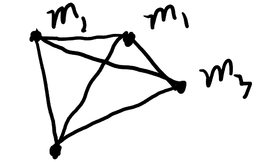
$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{x(t)}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$\Delta s \to \Delta x$ per piccoli spostamenti

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R}$$

Corpi rigidi - dinamica



* Moto dei sistemi
  ↳ assieme di punti materiali con distanze relative fisse

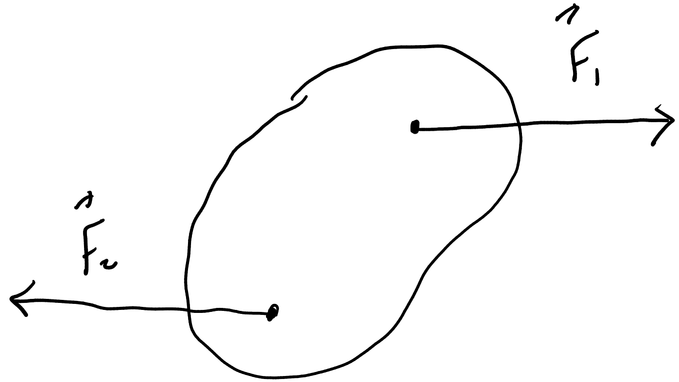
* Centro di massa: molto importante perché

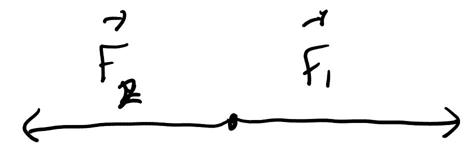
$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

La risultante delle forze esterne, anche se ciascuna a un punto di applicazione diverso, si comporta come un'unica forza che agisce sul centro di massa

Corpi rigidi - dinamica

Corollario: $\vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$





$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 = M\vec{a}_{CM}$$

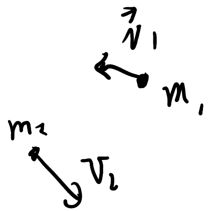
$\rightarrow$ il corpo si sposta a velocità costante

Non finisce qui: il corpo può anche girare

$\Rightarrow$ accelerazione angolare!

Energia cinetica

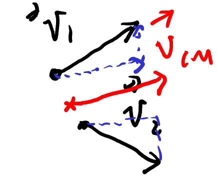
Sistema di punti materiali:

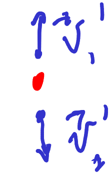


Energia cinetica totale: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Velocità del CM: $\vec v_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec v_i$

Velocità relative al CM: $\vec v_i = \vec v_{CM} + \vec v_i'$





$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec v_{CM} + \vec v_i'\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec v_{CM} + \vec v_i'\right) \cdot \left(\vec v_{CM} + \vec v_i'\right)$$

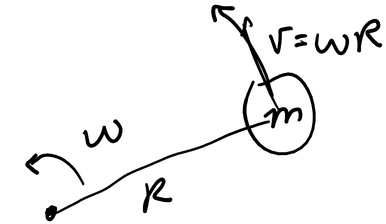
$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2 \vec v_{CM} \cdot \vec v_i'\right)$$

$\sum_i \vec p_i = \vec p_{tot} = 0$ nel CM

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \cancel{\vec v_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec v_i'} = K_{CM} + K_{rel}$$

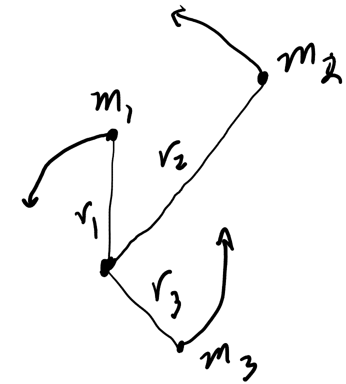
risultato generale!

Energia cinetica



Corpo rigido che ruota attorno il centro di massa:

$$K_{tot} = K_{cm} + K_{rot}$$



$$K_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 \qquad v_i' = \omega r_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega r_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\boxed{I := \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{momento di inerzia}}$$

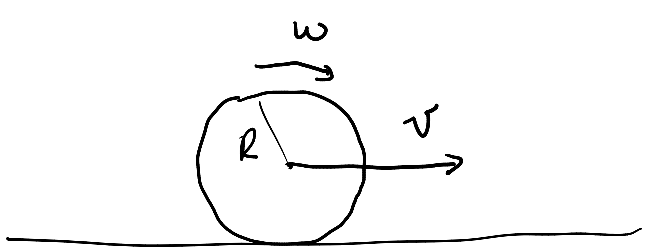
Energia cinetica di un corpo rigido

$$K_{tot} = K_{cm} + K_{rot}$$

$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

momento di inerzia attorno un asse che passa per il centro di massa

Rotolamento (ad esempio)



$$K_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2}$$

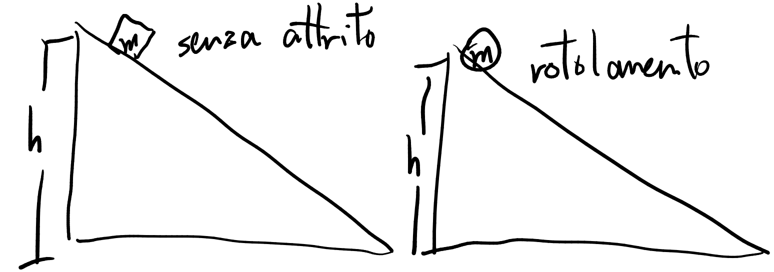
$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v^2$$

arriva giù per prima!

(perché la sua velocità è maggiore ad ogni punto lungo la discesa)

scivolamento senza attrito

rotolamento



Conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \qquad \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad v = \sqrt{2gh \frac{m}{m + I/R^2}}$$

Momento di inerzia

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2} \qquad \boxed{I = \int r^2 \, dm} \qquad \boxed{I = \int r^2 \rho(\vec{r}) \, dV}$$

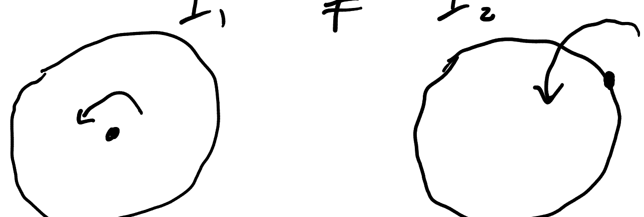
* rappresenta la resistenza di un corpo al cambiamento di velocità angolare

↳ analogo alla massa!

<u>ma</u>

* dipende dalla posizione e dall'orientazione dell'asse di rotazione

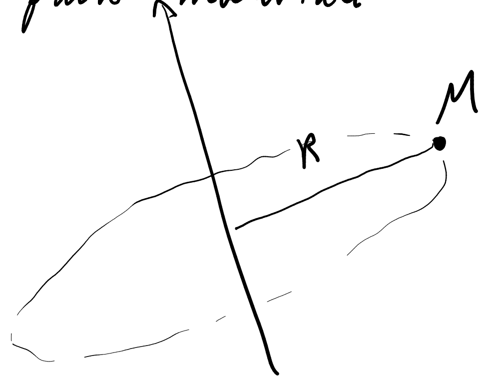
$I_1 \neq I_2$



qui: $I_1 < I_2$

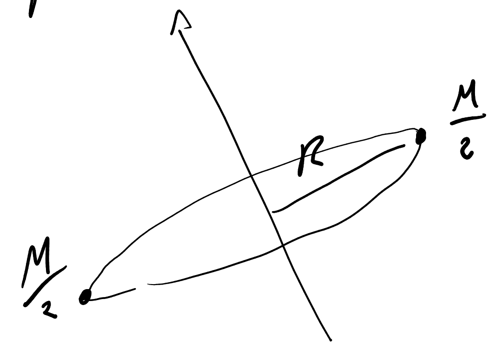
Momento di inerzia

Un punto materiale



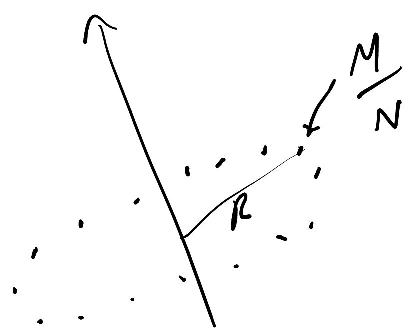
$$I_{punto} = MR^2$$

Due punti materiali



$$I_{due\ punti} = \frac{M}{2}R^2 + \frac{M}{2}R^2 = MR^2$$

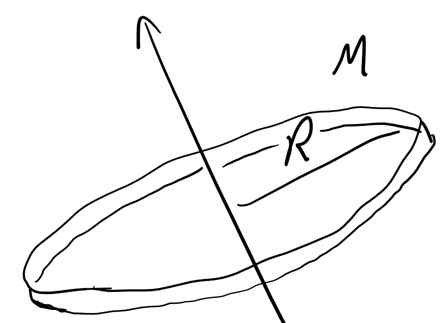
N punti materiali a distanza R



$$I = \Sigma_i \frac{M}{N} R^2$$

$$= MR^2$$

Anello (anche cilindro cavo)



$$I_{anello} = MR^2$$

Momento di inerzia

Si possono calcolare per altri corpi

Sfera piena : $I = \frac{2}{5} MR^2$

Sfera cava : $I = \frac{2}{3} MR^2$

Cilindro : $I = \frac{1}{2} MR^2$ (pieno)

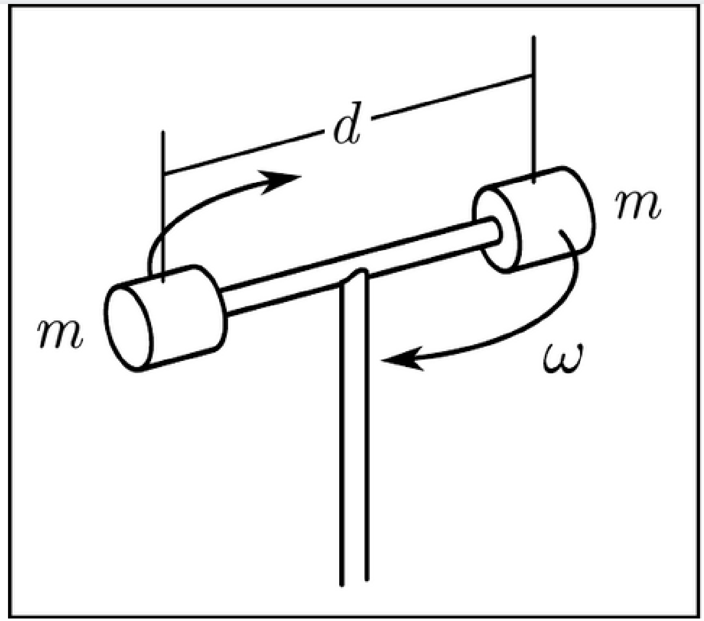
Cilindro cavo : $I = MR^2$

Momento di inerzia

Quanto tempo prende questo sistema per compiere un giro completo se ha un'energia cinetica uguale a $K = 1\,\mathrm{J}$, e $d = 1\,\mathrm{m}$ e $m = 1\,\mathrm{kg}$? L'asta è di massa trascurabile.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}}$$

$$= \sqrt{\frac{4K}{md^2}}$$

$$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{2} md^2$$

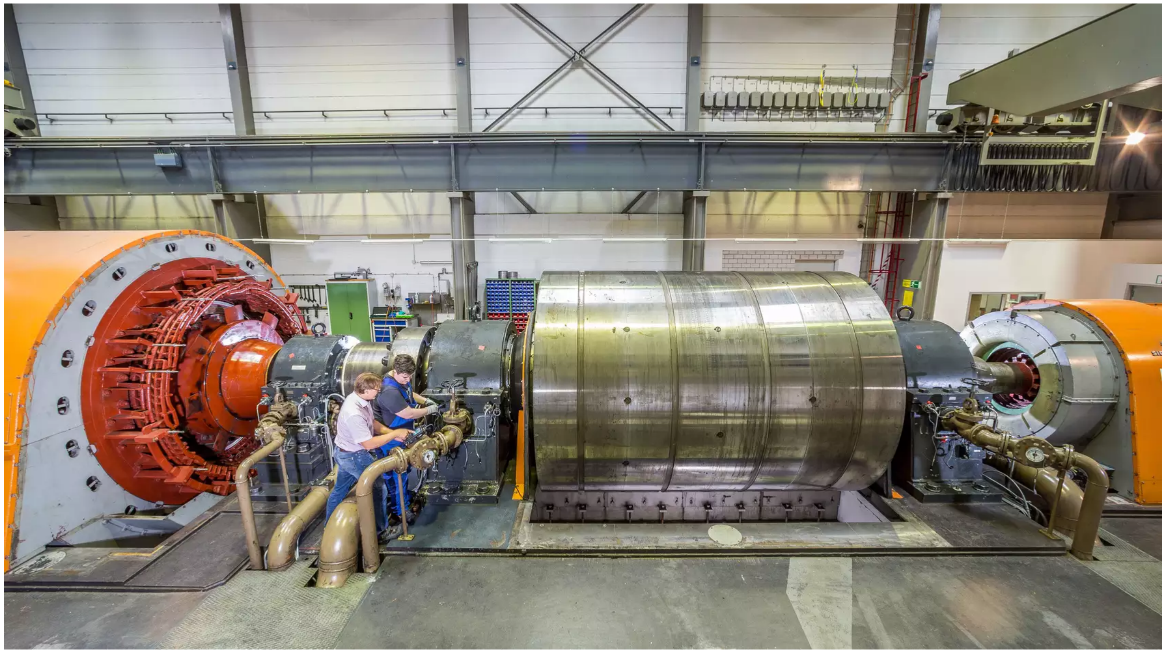
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{md^2}{4K}}$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{md^2}{K}}$$

$$= \pi \text{ s}$$

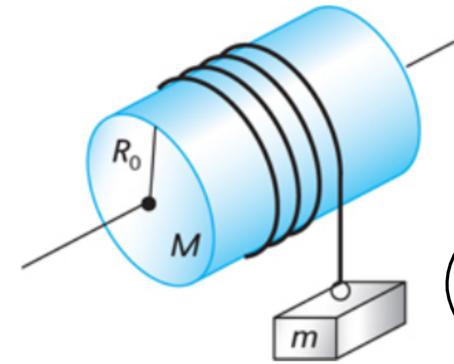
Momento di inerzia

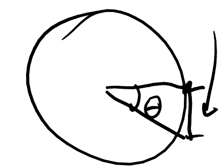


Batteria a volano

Momento di inerzia

12.6 Un blocco di massa m è attaccato a un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa M e raggio R_0 (Figura P12.1). Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale h a partire dalla quiete, trovare (a) la velocità lineare del centro del blocco e (b) la velocità angolare del cilindro rispetto al suo asse di rotazione.





Conservazione dell'energia

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{blocco}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} I \omega^2}_{\text{cilindro}}$$

$$v = \omega R_0$$

$$I = \tfrac{1}{2} M R_0^2$$

$$mgh = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{4} M R_0^2 \omega^2$$

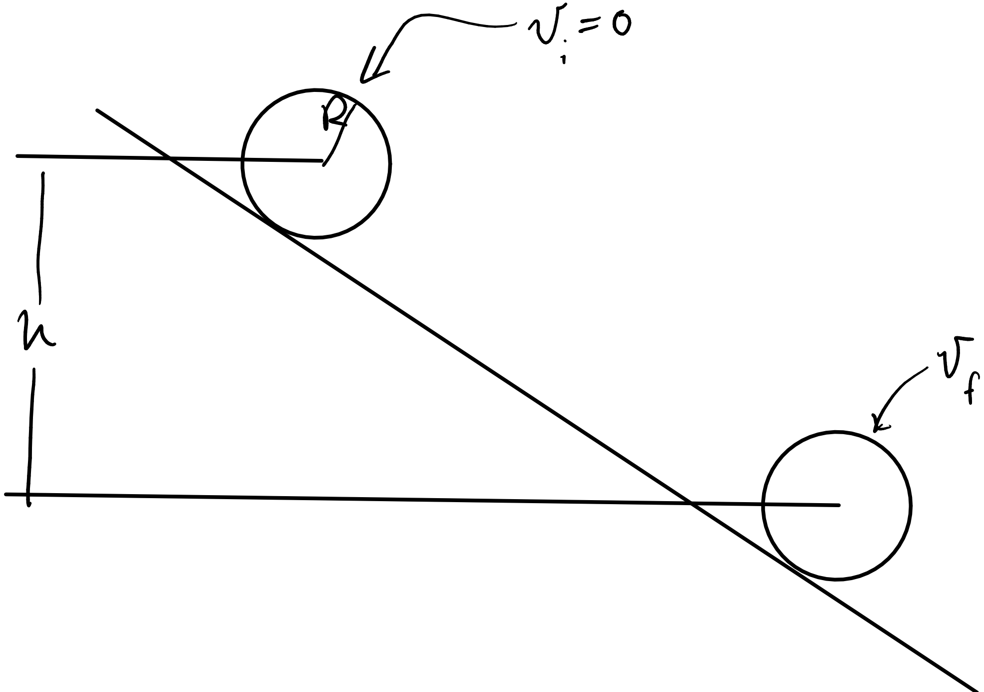
$$= \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{4} M \cancel{R_0^2} \frac{v^2}{\cancel{R_0^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} v^2 \left(m + \tfrac{1}{2} M\right)$$

(a) $v = \sqrt{2gh \,/\, \left(1 + \frac{M}{2m}\right)}$

(b) $\omega = \frac{v}{R_0}$

Rotolamento



Conservazione dell'energia

$$mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$\omega = v/R$ ← rotolamento

$$v = \sqrt{2gh} \Big/ \sqrt{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Sfera piena: $I = \frac{2}{5} m R^2$ $\qquad v = \sqrt{2gh}\,\sqrt{\frac{5}{7}}$ ← independente di R e m!

Cilindro pieno: $I = \frac{1}{2} m R^2$ $\qquad v = \sqrt{2gh}\,\sqrt{\frac{2}{3}}$

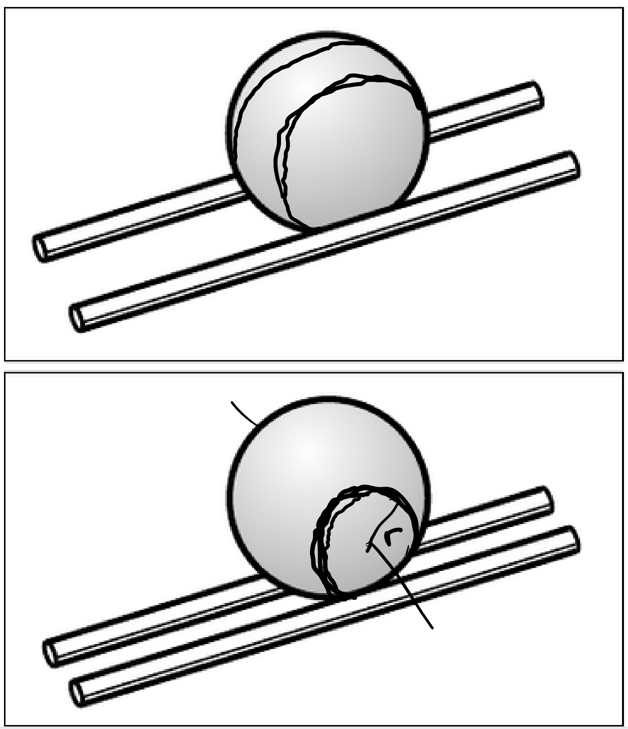
Cilindro cavo: $I = m R^2$ $\qquad v = \sqrt{2gh}\,\sqrt{\frac{1}{2}}$

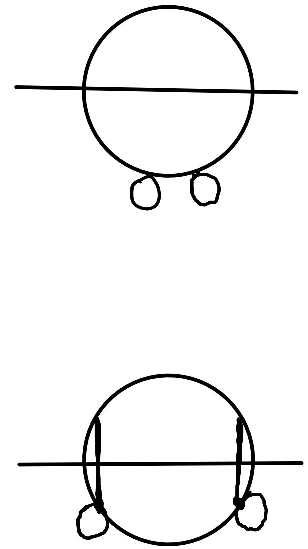
Rotolamento

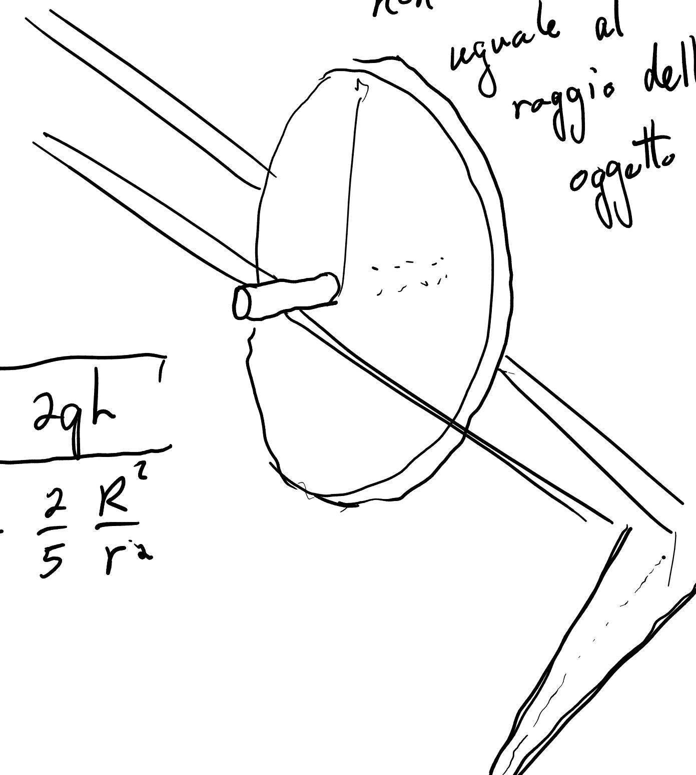
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

raggio di rotolamento

non è necessariamente uguale al raggio dell' oggetto

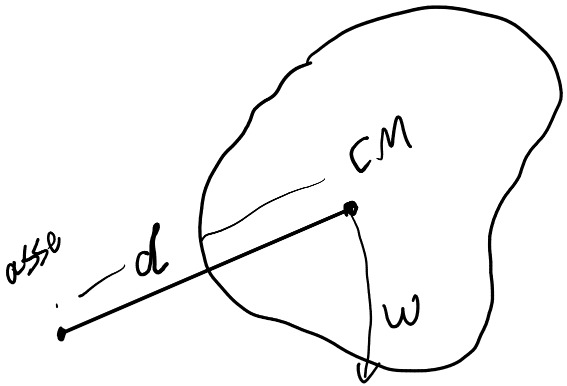






$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}}}$$

Teorema degli assi paralleli



$$K_{tot} = K_{cm} + K_{rot}$$

$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} M \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

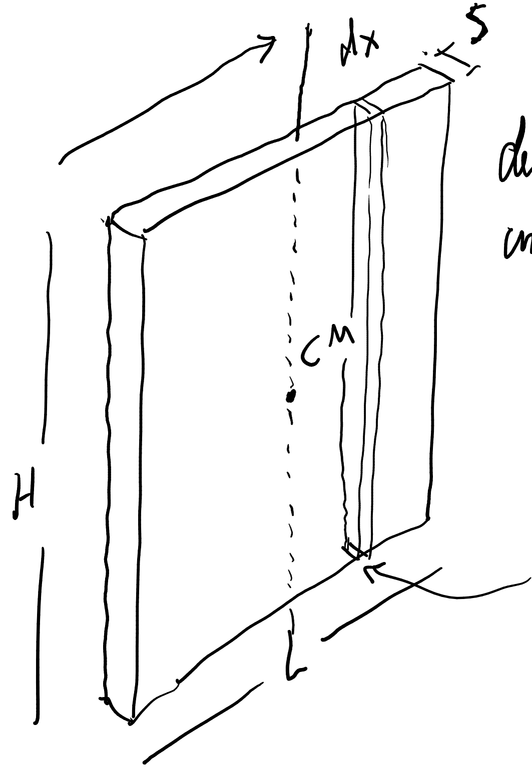
$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(M d^2 + I_{cm}\right)}_{I_{tot}} \omega^2$$

Teorema degli assi paralleli:

$$I_p = I_{cm} + M d^2$$

distanza da p a CM

Momento di inerzia per una porta



densità uniforme

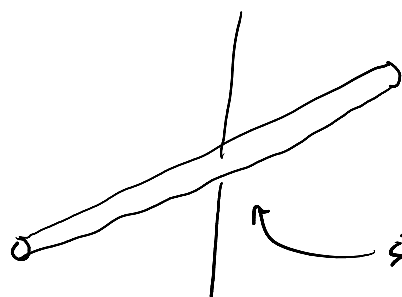
$dV = SH\,dx$

$$I_{CM} = \int r^2\,dm = \int r^2 \rho\,dV = \int r^2 \frac{M}{LSH}\,dV$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{\cancel{LSH}} \cancel{SH}\,dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} x^2\,dx$$

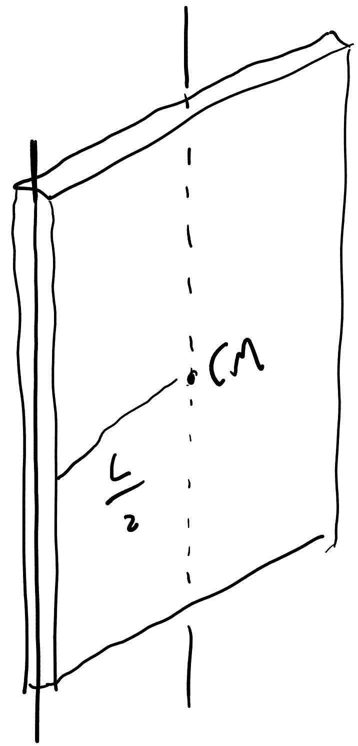
$$= \frac{M}{L} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right)$$

$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2}$$



stesso risultato per un'asta

Momento di inerzia per una porta



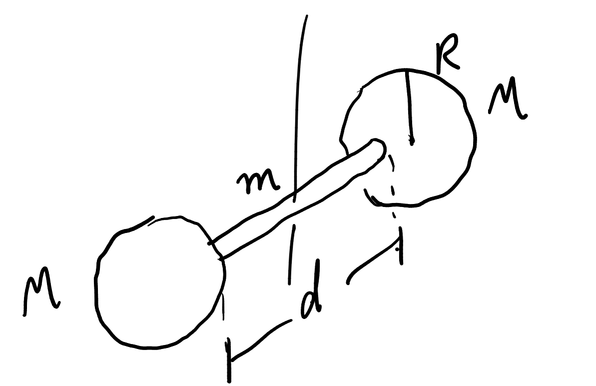
momento di inerzia attorno l'asse laterale

$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

(teorema degli assi paralleli)

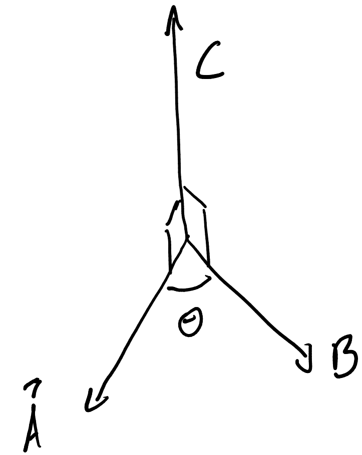
$$= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$



Prodotto vettoriale *returns*

Incontrotto giù



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

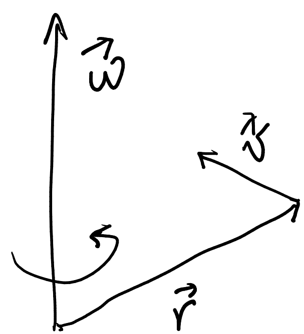
$$|\vec{C}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$$

$\vec{C} \perp \vec{A}$

$\vec{C} \perp \vec{B}$

legge della mano destra per il verso

(Forza di Coriolis $\vec{F}_c = -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}$)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vettore accelerazione angolare

$\vec{\omega}$ pratico, utile, comodo

$|\vec{\omega}|$ velocità angolare

$\dfrac{\vec{\omega}}{|\omega|}$ versore dell'asse di rotazione

$\vec{\alpha}$: stesso significato:

$|\vec{\alpha}|$ = accelerazione angolare

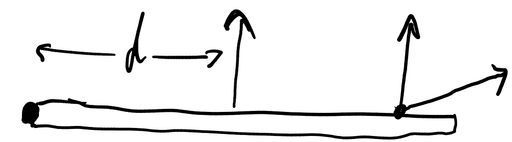
$\dfrac{\vec{\alpha}}{|\alpha|}$: asse

asse fisso: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$ se $\vec{\alpha}$ costante: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} t$

asse non fisso:

Aprire una porta

* Distanza del punto d'applicazione dai cardini



* Modulo della forza
* Direzione della forza
* Attrito, ...
* Massa della porta
* larghezza della porta

momento di inerzia della porta

Momento di forza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

posizione del punto d'applicazione

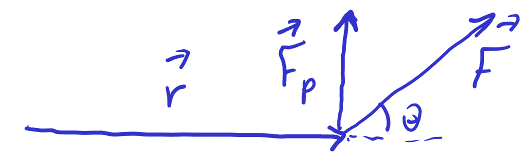
forza

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$$

$$= r\,(F \sin\theta)$$

$$= F\,(r \sin\theta)$$

$$|\vec{F}_p| = F \sin\theta$$

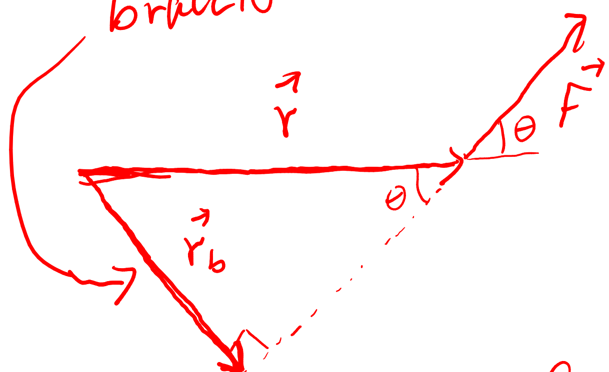


distanza all'asse

×

componente perpendicolare della forza

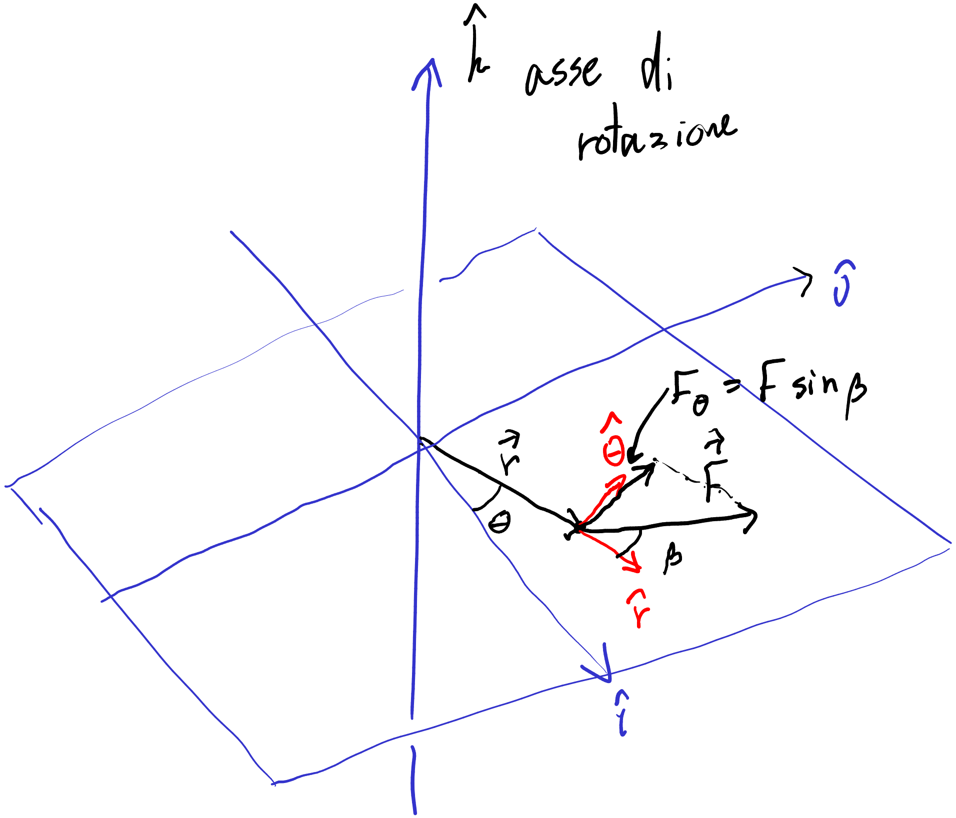
braccio



$$|\vec{r}_b| = r \sin\theta$$

forza × braccio

Momento di forza e dinamica



una forza $\vec{F}$ è applicata sul punto materiale di massa m

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin\beta \, \hat{k} = \tau_z \hat{k}$$

$$= r F_\theta \hat{k}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad F_\theta = m a_\theta = m r \alpha$$

$$\tau_z = r F_\theta = r(m r \alpha) = m r^2 \alpha$$

$\Longrightarrow \vec{\tau}$ produce un accelerazione angolare

Momento di forza e dinamica

Corpo rigido: somma su tutte le parte del corpo

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\tau_z = \sum_i r_i F_{i\theta}$$

corpo rigido: tutti i punti hanno la stessa accelerazione angolare

$$= \sum_i r_i m_i r_i \alpha$$

$$= \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$

$$= I\alpha$$

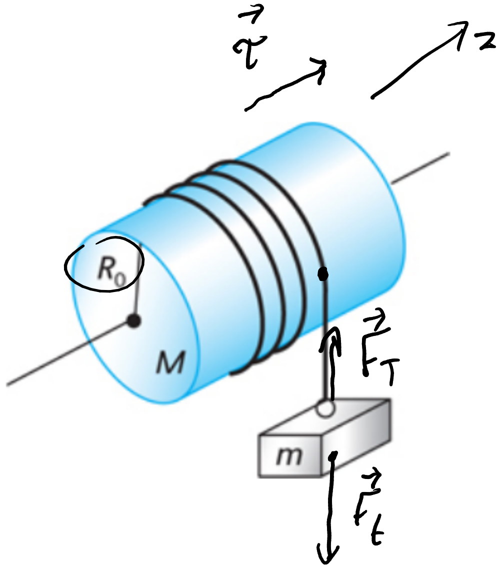
$$\boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

analogo a $\vec{F} = m\vec{a}$

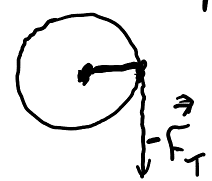
* importante: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ valido solo se $\begin{cases} \text{asse è fisso} \\ \underline{\text{o}} \\ \text{asse passa per il centro di massa} \end{cases}$

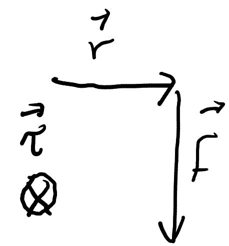
Esempio 1

Qual è l'accelerazione del blocco di massa m?



punto di applicazione della forza di tensione = punto di contatto





$$\alpha_z = \tau_z / I = \frac{R_0 F_T}{\frac{1}{2} M R_0^2} = \frac{2F_T}{MR_0}$$

$R_0 \alpha_z = -a_y$ ← vincolo geometrico

* $m\vec a = \sum_i \vec F = \vec F_T + \vec F_t$ } blocco

(1) $m a_y = -mg + F_T$

* $\vec\tau = I\vec\alpha$ cilindro

$\tau_z = R_0 F_T = I \alpha_z$ $\quad I = \frac{1}{2} M R_0^2$

$$\alpha_z = \frac{-a_y}{\cancel{R_0}} = \frac{2F_T}{M\cancel{R_0}} \to a_y = \frac{-2F_T}{M} \to F_T = \frac{-Ma_y}{2}$$

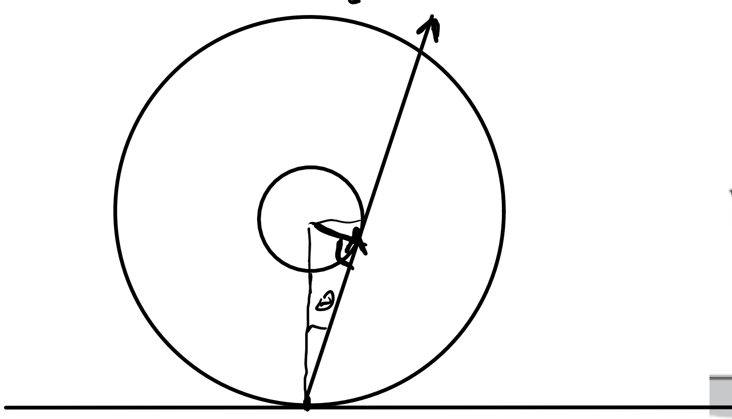
(1) : $a_y = -g + \frac{F_T}{m} = -g - \frac{M}{m}\frac{a_y}{2}$

$a_y\left(1+\frac{M}{2m}\right) = -g \qquad a_y = \frac{-g}{\left(1+\frac{M}{2m}\right)}$

Esempio 2

13.14 Uno yo-yo con metà dello spago avvolto sull'asse è appoggiato di costa sul pavimento, come mostra la Figura 13.22. Si immagini di tirare delicatamente lo spago in tre diverse direzioni, indicate nella figura da $\vec{\mathbf{F}}_a$, $\vec{\mathbf{F}}_b$ e $\vec{\mathbf{F}}_c$. La forza è in ciascun caso abbastanza lieve da non far scivolare lo yo-yo. In quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si avvolge sullo yo-yo e in quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si svolge?

$$\sin\theta = \frac{R_1}{R_2}$$



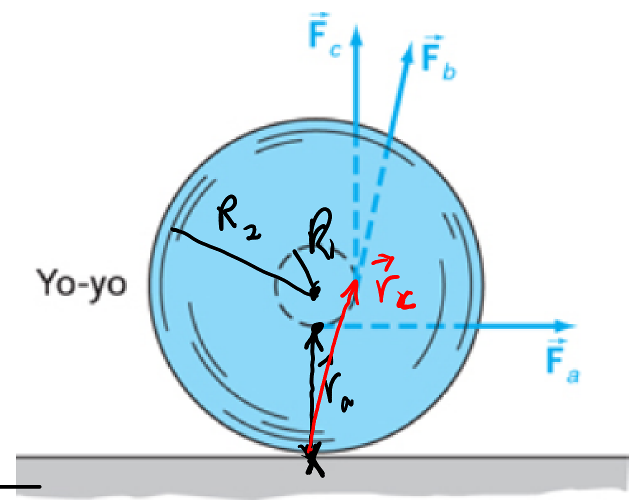


Figura 13.22 Quesito 13.14.

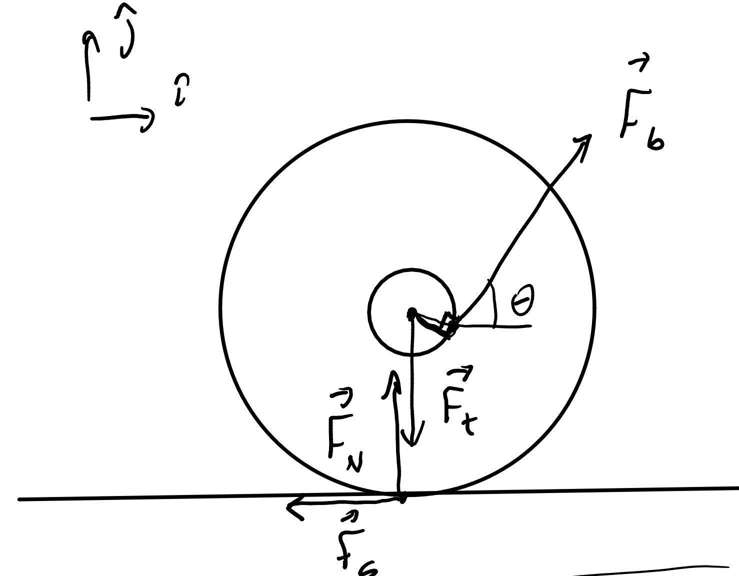
$$\vec{\tau}_a = \vec{r}_a \times \vec{F}_a \qquad \vec{\tau}_a \ \otimes$$

$$\vec{\tau}_c = \vec{r}_c \times \vec{F}_c \qquad \vec{\tau}_c \ \odot$$

Soluzione 1

asse di rotazione fisso (instantaneamente)

Esempio 2



Soluzione 2: asse = CM

moto CM: non importano punti di applicazione

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_b$$

$$= F_{sx}\hat{i} + F_N\hat{j} - mg\hat{j} + F_b\cos\theta\,\hat{i} + F_b\sin\theta\,\hat{j}$$

$$a_y = 0 \rightarrow F_N - mg + F_b\sin\theta = 0$$

$$m a_x = F_{sx} + F_b\cos\theta \quad (1)$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau} = \tau_z\hat{k}$$

$$\tau_z = F_{sx}R_2 + F_b R_1 = I\alpha_z \quad (2)$$

vincolo: $\alpha_z = -\dfrac{a_x}{R_2}$ (3)

(3) → (2)

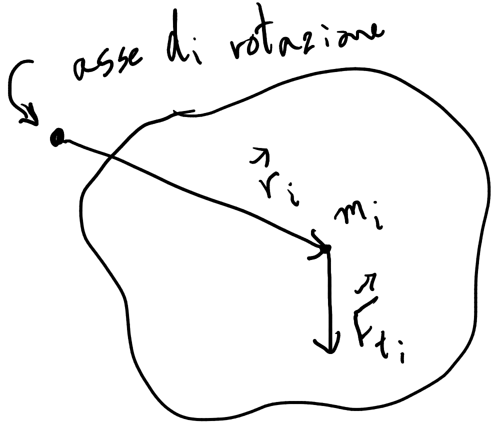
$$-\frac{a_x}{R_2} = \frac{1}{I}\left(F_{sx}R_2 + F_b R_1\right)$$

(1): $F_{sx} = ma_x - F_b\cos\theta$

$$a_x = -\frac{R_2}{I}\left[(ma_x - F_b\cos\theta)R_2 + F_b R_1\right]$$

$$a_x\left(1 + \frac{mR_2^2}{I}\right) = \frac{R_2 F_b}{I}\left(\cos\theta R_2 - R_1\right)$$

Momento di forza dovuto alla gravità



$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{t_i}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times (-m_i g \hat{j})$$

$$= -g \sum_i m_i \vec{r}_i \times \hat{j}$$

$$= -g\left(\sum_i m_i x_i\right)\hat{k} + g\left(\sum_i m_i z_i\right)\hat{i}$$

$$= -g M x_{cm} \hat{k} + g M z_{cm} \hat{i}$$

$$= \vec{r}_{cm} \times (-\hat{j} M g) = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_t$$

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$\vec{r}_i \times \hat{j} = x_i \hat{i} \times \hat{j} + y_i \hat{j} \times \hat{j} + z_i \hat{k} \times \hat{j}$$

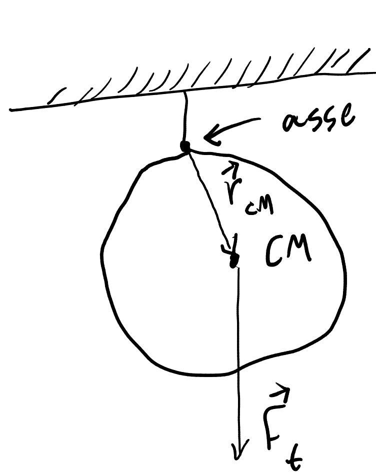
$$= x_i \hat{k} - z_i \hat{i}$$

Conclusione: il momento di forza dovuto alla gravità è uguale al momento di forza applicato solo sul C.M.

Baricentro

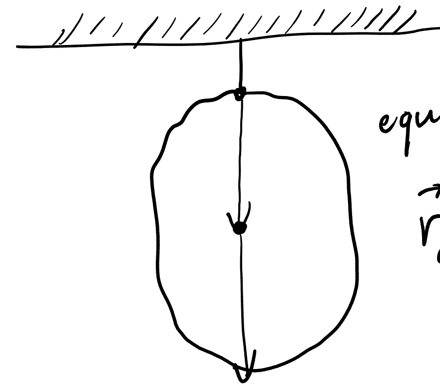
Baricentro = centro di gravità = centro di massa

oggetto sospeso



$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_t$$

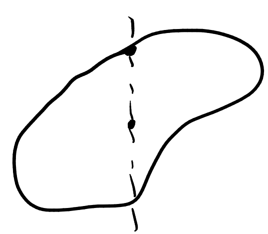
$$\neq 0$$



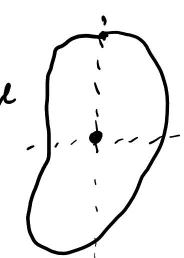
equilibrio:

$$\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_t = 0$$

all'equilibrio, il C.M. è sempre sulla rete verticale passando per il perno



bastano due misuri per trovare il C.M.



Esempio 3

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_t$$

$$\tau_z = \frac{L}{2} mg \sin\theta$$

$$\tau_z = I \alpha_z$$

$$= \frac{1}{3} m L^2 \alpha_z$$

$$\frac{\cancel{L}}{2} \cancel{m} g \sin\theta = \frac{1}{3} \cancel{m} L^{\cancel{2}} \alpha_z$$

$$\alpha_z = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin\theta$$

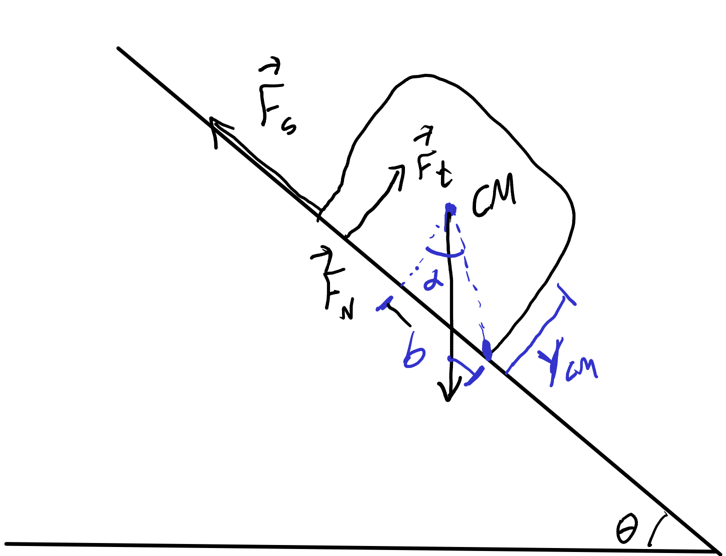
accelerazione angolare (non-costante!)

modulo dell'accelerazione del punto più alto: a_c

$$a_c = \alpha_z \cdot L = \frac{3}{2} g \sin\theta$$

se $\sin\theta > \frac{2}{3}$, $a_c > g$

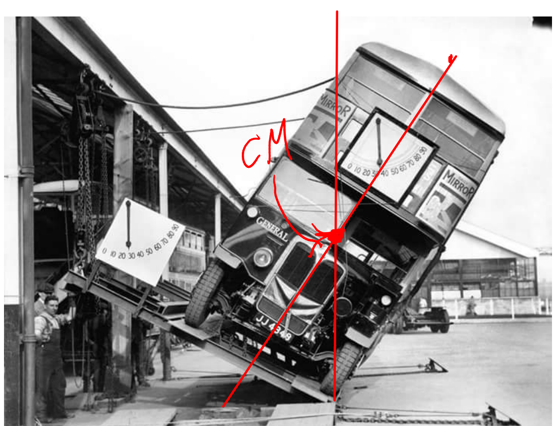
Ribaltamento

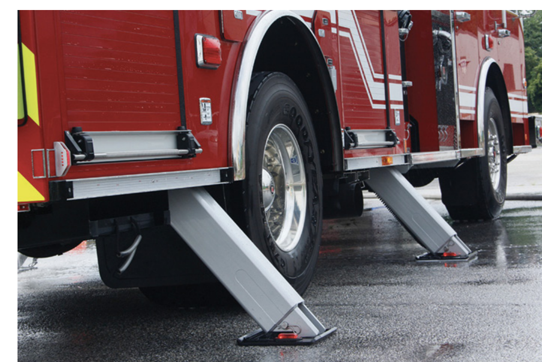


y_{CM} : altezza del C.M.

b : distanza orizzontale tra CM e il punto di contatto più lontano del C.M.

$$\tan\alpha = \frac{b}{y_{CM}}$$





condizione di stabilità:

$$\alpha > \theta \qquad \boxed{\tan\theta < \frac{b}{y_{CM}}}$$

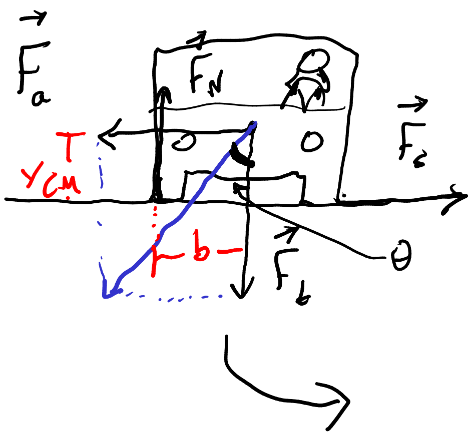
Ribaltamento

Dal lato passaggiero, una Jeep si ribalta se è inclinata più di $\overset{\alpha}{=}$ 41°. Quale velocità non deve superare per evitare di ribaltarsi in una curva di raggio $R = 100\,\mathrm{m}$?

Al punto di ribaltamento, il punto di applicazione della forza normale è al perno $\Rightarrow$ non ha un momento di forza

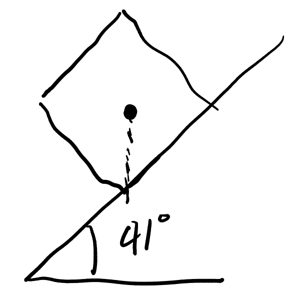
In sistema non-inerziale che segue la Jeep:

forza centrifuga



"peso apparente" $\vec{F}' = \vec{F}_a + \vec{F}_t$

$$\frac{b}{Y_{CM}} = \tan\alpha$$



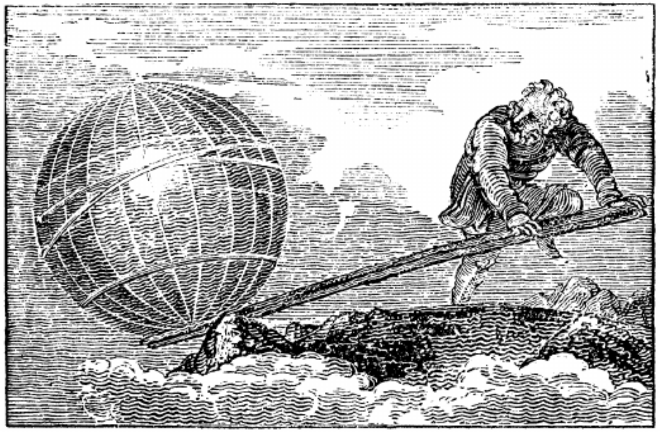
$$F_a = \frac{mv^2}{R}$$

$$\tan\theta = \frac{F_a}{F_t} = \frac{\cancel{m}v^2/R}{\cancel{m}g} < \tan\alpha$$

$$\frac{v^2}{Rg} < \tan\alpha$$

$$v < \sqrt{Rg\tan\alpha} = 29\,m/s = 105\,\frac{km}{h}$$

Leve ed ingrenaggi

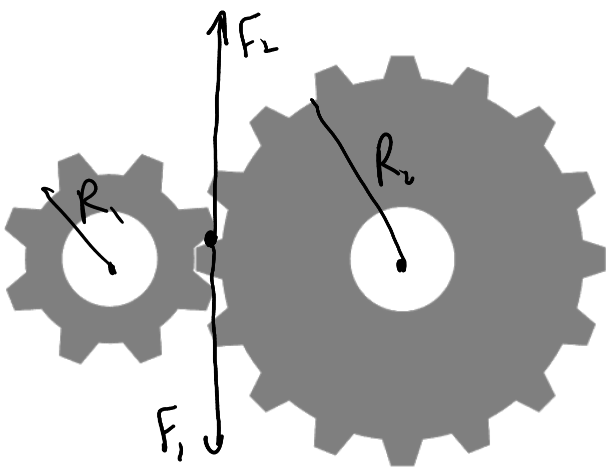


$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

equilibrio: $\sum_i \vec{\tau} = 0 = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = L_1 F_1 \hat{k} - L_2 F_2 \hat{k} = 0$

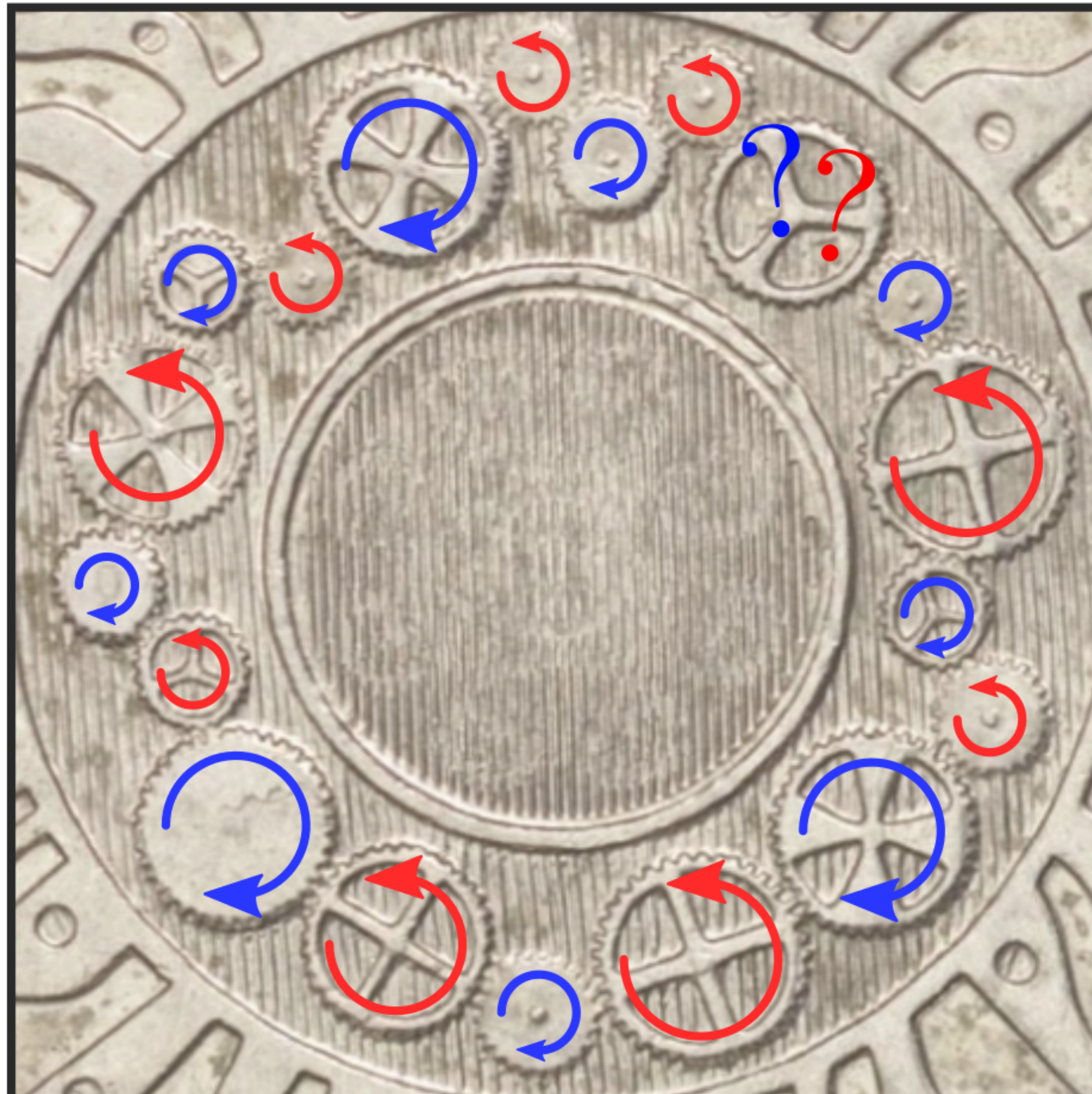
$$L_1 F_1 = L_2 F_2 \Rightarrow \boxed{F_1 = F_2 \frac{L_2}{L_1}}$$



$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ al punto di contatto tra i denti (3ª legge)

$$\tau_1 = R_1 F_1$$
$$\tau_2 = R_2 F_2 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \tau_1 = \tau_2 \frac{R_1}{R_2}$$

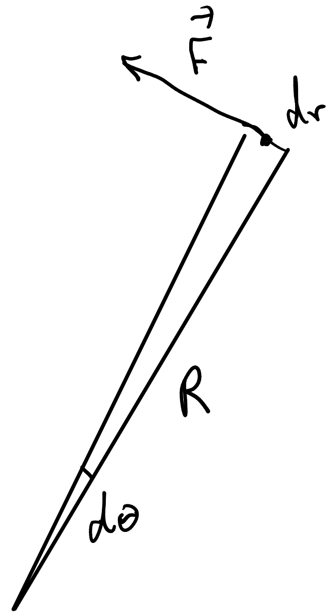
Leve ed ingrenaggi



Potenza

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \vec{v}\,dt \qquad dW = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$



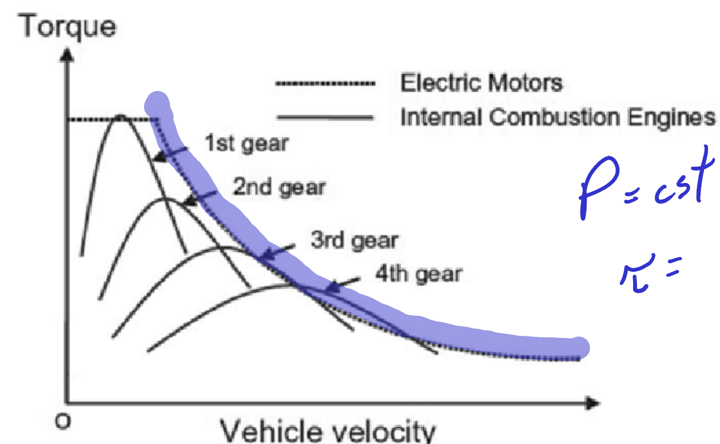
$$dr = R\,d\theta = R\omega\,dt$$

$$F\,dr = \underbrace{FR\omega}\,dt = dW$$

$$P = FR\omega$$

$$= \tau\omega$$

in generale: $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$



$P = cst$

$\tau = \frac{P}{\omega}$

velicità angolare

Momento angolare

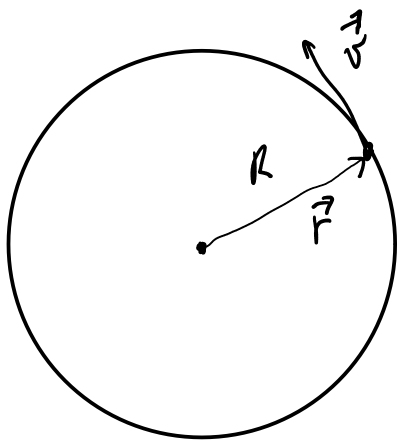
Momento angolare di un punto materiale: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

quantità di moto

posizione del punto

dipende dall'origine scelta

Caso particolare moto circolare:



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$$

$$\left(\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= R^2\vec{\omega} \end{aligned} \right)$$

$$\left(|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}|v = Rv = R(R\omega) = R^2\omega \right)$$

Per un corpo rigido: $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = I\vec{\omega}$

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Momento angolare

Esempi

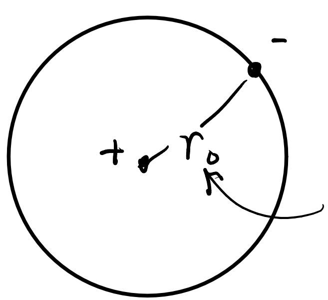
* Momento angolare della Terra intorno al Sole:

$$\ell = mR^2\omega = m_t\, d_{st}^2\, \frac{2\pi}{T} = 2.7 \times 10^{40}\ \mathrm{kg\, m^2/s}$$

T ← 1 anno

* Elettrone in orbita intorno un protone (idrogeno)

costante di Planck



raggio di Bohr

$$\ell = \hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg\, m^2/s}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar T}{2\pi m}}$$

$$T = 1.6 \times 10^{-16}\ \mathrm{s}$$

$$= 5.4 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

Momento angolare e dinamica

Punto materiale.

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}}$$

2ª legge di Newton per il moto rotatorio

Attenzione: $\vec{l}$ e $\vec{\tau}$ devono avere la stessa origine in un sistema inerziale

Equazioni cardinali della meccanica

Sistema di punti materiali

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

momento angolare totale
di un sistema di punti materiali

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

3ª legge di Newton ⇒ tutti i momenti
di forza interni si cancellano

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{ext}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext}}$$

Quadro generale

$$\begin{tikzcd}
\vec{r} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[drr, dash, bend right, "W"'] & \vec{v} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "\times m"] \arrow[dr, dash, bend left, "P"] & \vec{a} \arrow[d, "\times m"] \\
 & \vec{p} \arrow[r, "d/dt"] & \vec{F}
\end{tikzcd}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\begin{tikzcd}
\theta \arrow[r, "d/dt"] \arrow[drr, dash, bend right, "W"'] & \vec{\omega} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "\times I"] \arrow[dr, dash, bend left, "P"] & \vec{\alpha} \arrow[d, "\times I"] \\
 & \vec{\ell} \arrow[r, "d/dt"] & \vec{\tau}
\end{tikzcd}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Equilibrio statico di un corpo rigido

Sapiamo già: $\sum_i \vec{F}_{ext} = 0$ $\rightarrow$ C.M. ha una velocità costante (quantità di moto conservata)

Ora: $\sum_i \vec{\tau}_{ext} = 0$ $\Rightarrow$ velocità angolare del corpo rigido costante (momento angolare è conservato)

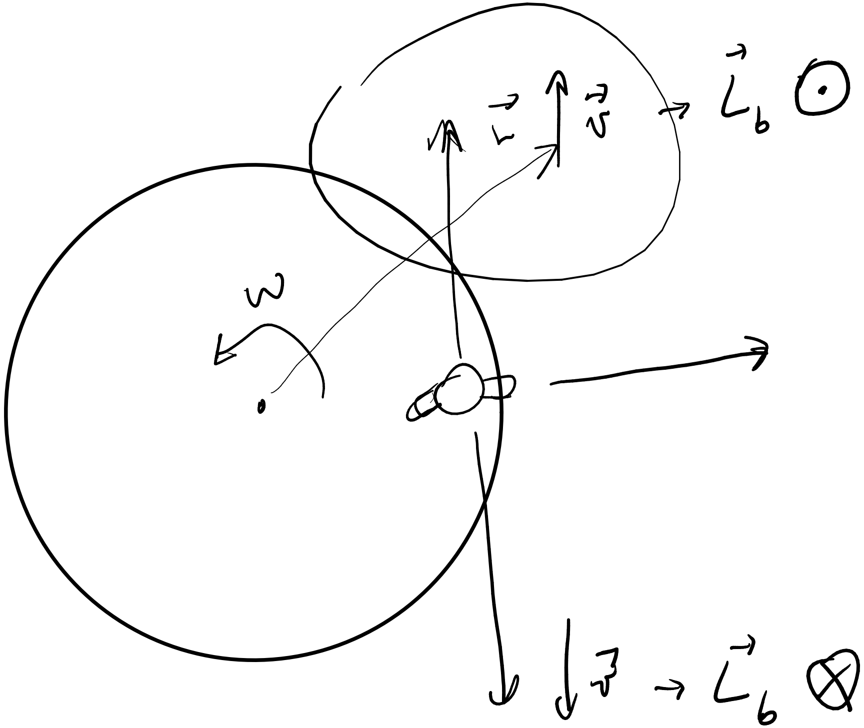
---

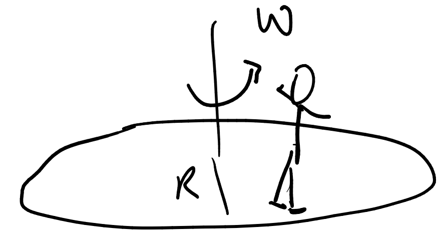
in particolare: un corpo a riposo rimane a riposo

Condizioni per l'equilibrio statico

$$\boxed{\sum_i \vec{F} = 0 \qquad \sum_i \vec{\tau} = 0}$$

importante: si può scegliere qualsiasi punto di riferimento!

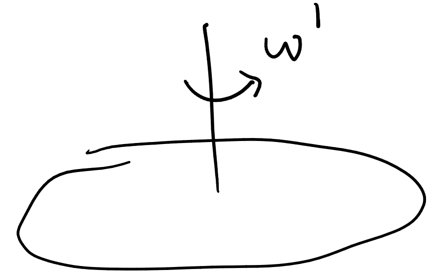


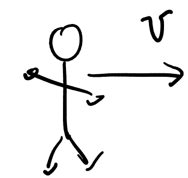


inisialmento

$$L_i = (I + mR^2)\omega$$

finale



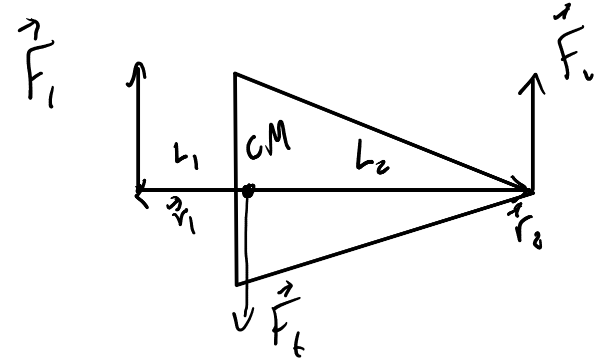


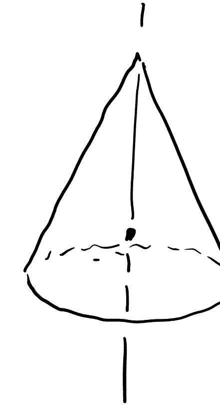
$$L_f = I\omega' + \underbrace{mvR}$$

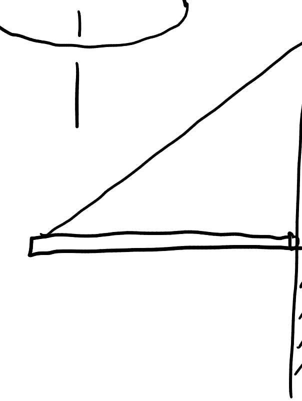
$$L_i = L_f = I\omega' + L_b$$

$$I\omega' = L_i - L_b$$

Equilibrio statico







$$\sum_i \vec F = 0$$

$$\vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_g = 0$$

$$F_1 + F_2 = mg \quad (*)$$

$$\sum_i \vec \tau = 0$$

$$\vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times \vec F_2 = 0$$

$$L_1 F_1 - L_2 F_2 = 0$$

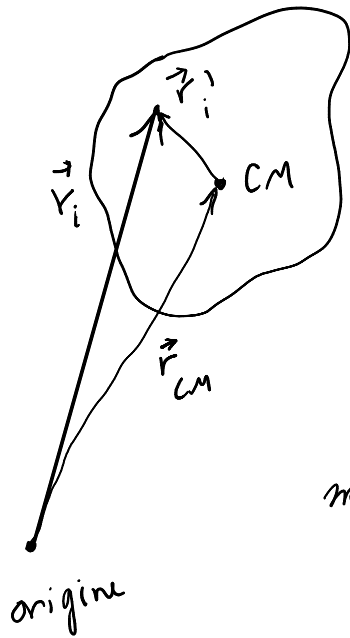
$$F_1 = \frac{L_2}{L_1} F_2 \quad (**)$$

$$F_2 \frac{L_2}{L_1} + F_2 = mg$$

$$F_2 = \frac{mg}{1 + L_2/L_1}$$

$$F_1 = \frac{mg}{1 + L_1/L_2}$$

Orbita e spin



$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$

$\vec{r}_i'$: posizione relativa al centro di massa

$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ ← momento angolare rispetto all'origine

$= \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$

momento angolare totale:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \vec{r}_{CM} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$$

$$= \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM}}_{\vec{L}_o \text{ "orbitale"}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i}_{\vec{L}_s \text{ "spin"}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{L}_s}$$

Corpo rigido

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

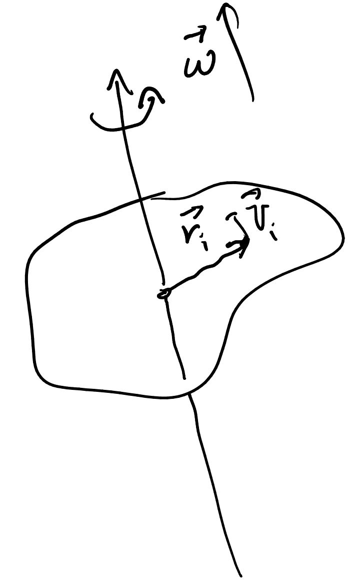
$$= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

$$= I \vec{\omega}$$

$$\begin{cases} |v| = |r\omega| \\ \text{verso di } \vec{r} \times \vec{v} = \text{verso di } \vec{\omega} \end{cases}$$



$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$$

e.g. momento angolare di spin della terra:

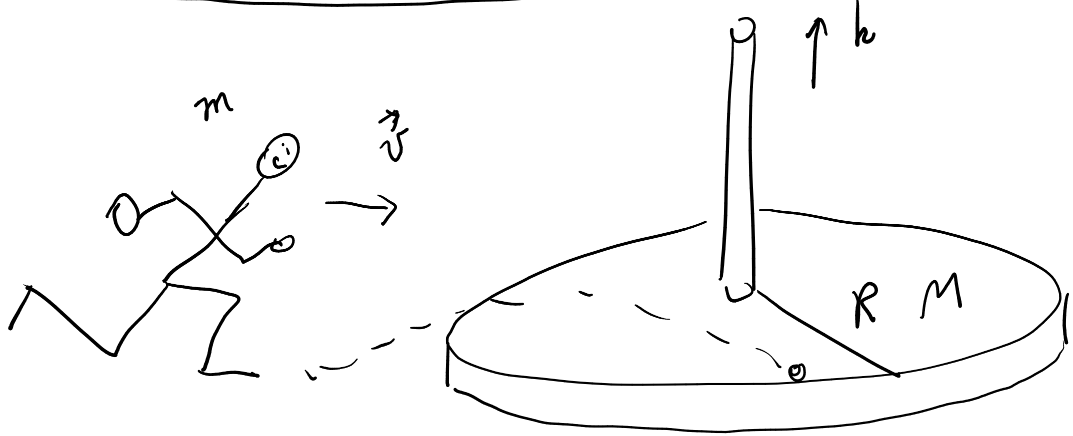
$$L = I\omega$$

$$= \frac{2}{5} M R^2 \omega \sim 7 \times 10^{33} \ \mathrm{kg\, m^2/s}$$

Conservazione del momento angolare

Già visto $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$ conservazione della quantità di moto

Ora $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$ conservazione del momento angolare



$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p} + \underbrace{I \cdot \vec{\omega}_i}_{0} = mvR\hat{k}$$

$$\vec{L}_f = (I_g + I_b)\,\vec{\omega}_f$$

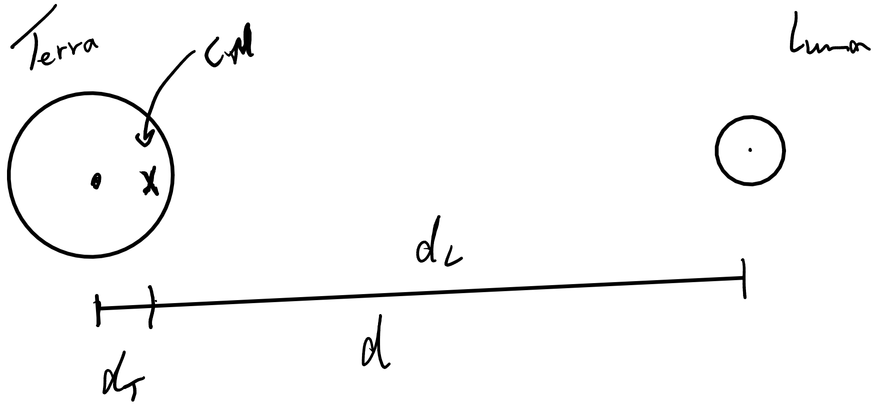
$I_g = \frac{1}{2} MR^2$ (la giostra è un disco)

$I_b = mR^2$

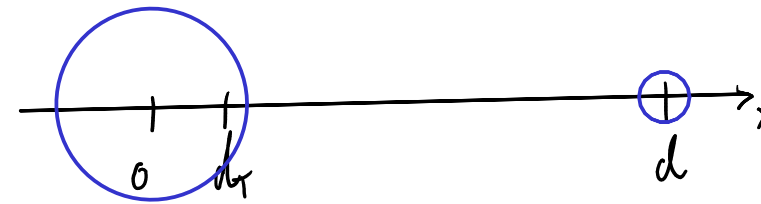
$\vec{L}_i = \vec{L}_f$

$$mvR = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\omega \rightarrow \omega = \frac{mv}{R(\frac{1}{2}M + m)}$$

Conservazione del momento angolare



sistema terra-luna: il CM non è al centro della terra



$$x_{CM} = \frac{x_T m_T + x_L m_L}{m_T + m_L} = d_T$$

$$d_T = d \frac{m_L}{m_T + m_L}$$

$$d_L = d \frac{m_T}{m_T + m_L}$$

$$L_0 = (m_T d_T^2 + m_L d_L^2)\,\omega$$

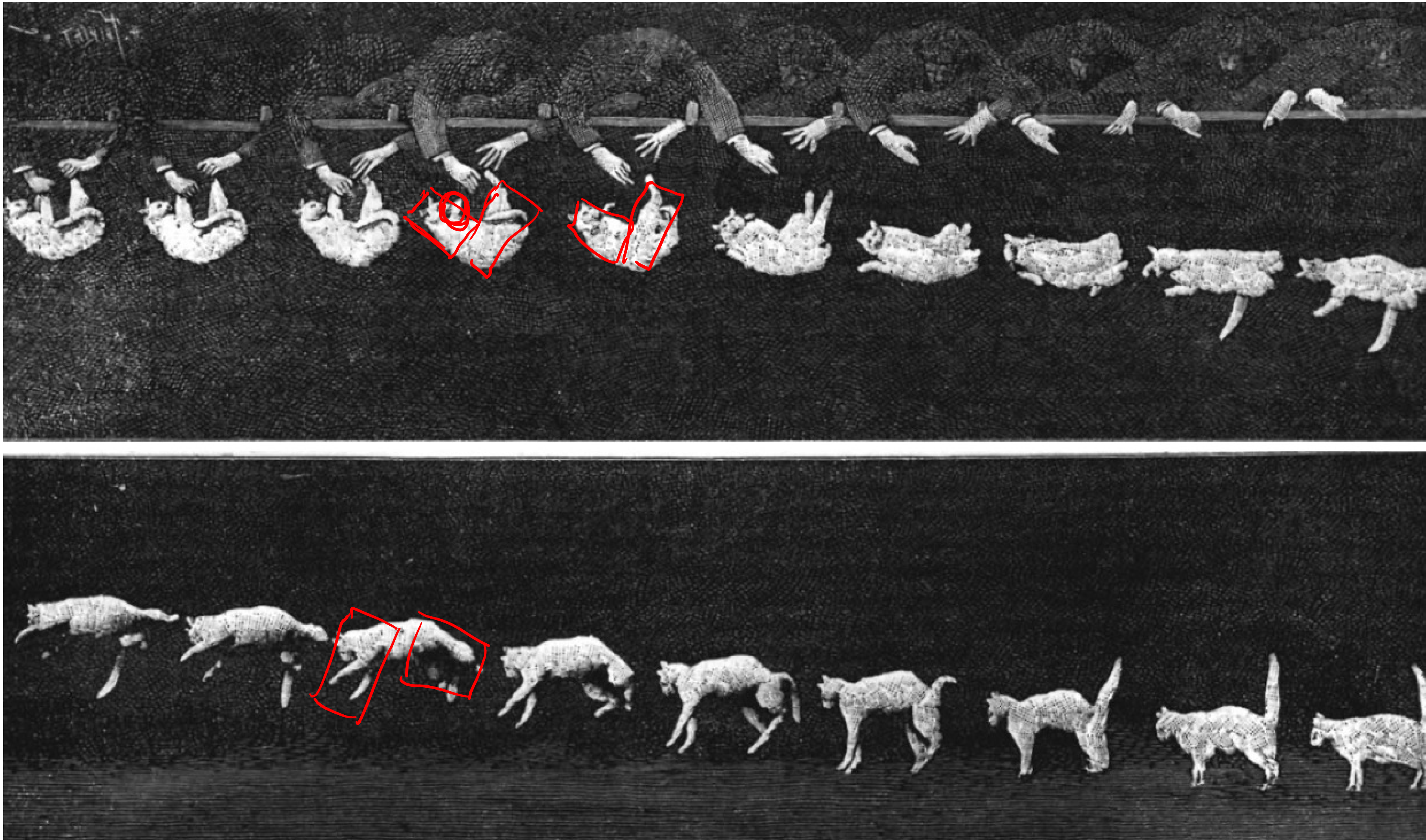
momento angolare orbitale

$$= \frac{m_T m_L^2}{(m_T+m_L)^2} d^2 + \frac{m_L m_T^2}{(m_T+m_L)^2} d^2 \omega$$

$$= \frac{m_T m_L}{(m_T+m_L)^{\cancel{2}}} \cancel{(m_L + m_T)}\, d^2 \omega = \underbrace{\frac{m_T m_L}{m_T + m_L}}_{\text{"massa ridotta"}} d^2 \omega$$

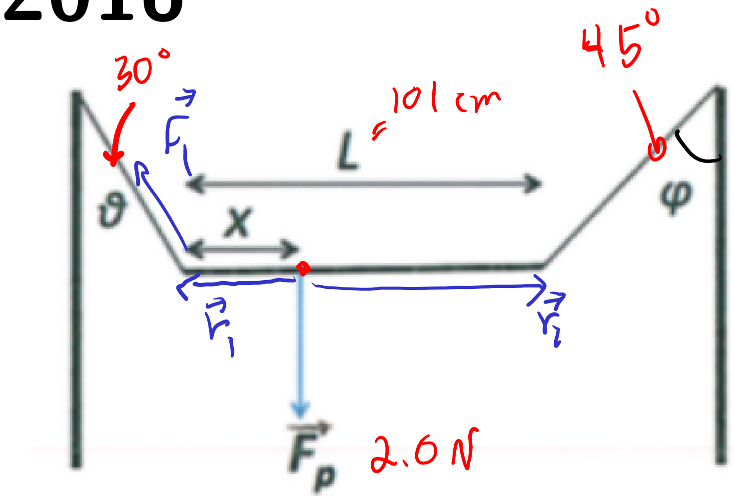
← come se la luna girasse intorno alla terra (e no il CM) con una massa ridotta $m_L \frac{m_T}{m_T + m_L}$

Conservazione del momento angolare



Prova scritta 13.09.2018

Problema 2. Un'asta NON OMOGENEA di lunghezza L=101 cm e forza peso F_p=2.0 N, in quiete e in posizione orizzontale, è sospesa a due fili di massa trascurabile, come illustrato in figura. I due fili formano con la verticale gli angoli ϑ=30° e $\boldsymbol{\varphi}$=45°.

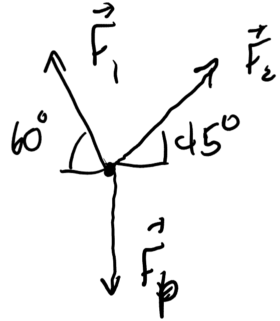


(a) Disegnare il diagramma a corpo libero delle forze applicate all'asta.

(b) Scrivere le condizioni di equilibrio statico per l'asta in questo caso specifico e determinare i moduli di tutte le forze applicate all'asta.

(c) Determinare la distanza x tra il centro di massa dell'asta e la sua estremità a sinistra.

a)



$\cos\theta = \sin(90-\theta)$

b) $\sum_i \vec{F} = 0$ $\qquad$ $\sum_i \vec{\tau} = 0$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_p = 0$ $\qquad$ $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$

$x: \; -F_1 \sin\theta + F_2 \sin\varphi = 0 \quad (*)$ $\qquad$ $-x F_1 \cos\theta + (L-x)\cos\varphi \, F_2 = 0 \quad (***)$

$y: \; F_1 \cos\theta + F_2 \cos\varphi - mg = 0 \quad (**)$

$* \quad F_1 = F_2 \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}$ $\qquad$ $F_1 = \dfrac{mg}{\left(\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\cos\varphi + \cos\theta\right)} = \dfrac{mg}{\cos\theta\left(\tan\theta/\tan\varphi + 1\right)}$

$** \quad F_2\left(\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\theta + \cos\varphi\right) \rightarrow F_2 = \dfrac{mg}{\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\theta + \cos\varphi\right)} = \dfrac{mg}{\cos\varphi\left(\tan\varphi/\tan\theta + 1\right)}$

c)

$$x F_1 \cos\theta = (L - x) F_2 \cos\varphi$$

$$x \left(F_1 \cos\theta + F_2 \cos\varphi \right) = L F_2 \cos\varphi$$

$$x = L \frac{F_2 \cos\varphi}{F_1 \cos\theta + F_2 \cos\varphi}$$

$$= L \frac{\sin\theta \cos\varphi}{\sin\varphi \cos\theta + \sin\theta \cos\varphi}$$

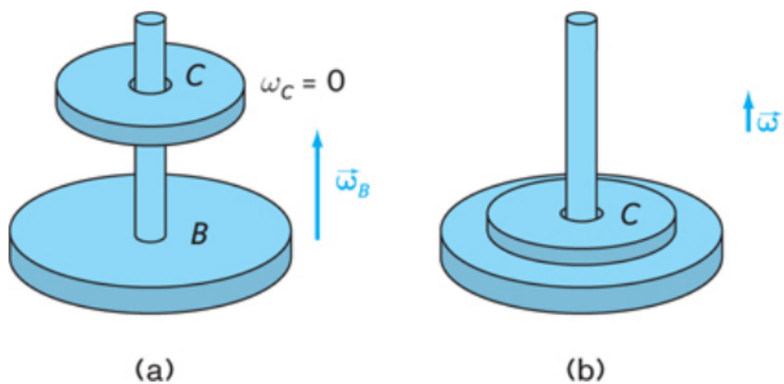
$$= L \frac{\tan\theta}{\tan\varphi + \tan\theta}$$

$$F_1 = \frac{mg \sin\varphi}{(\sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi)}$$

$$= \frac{mg \sin\varphi}{\sin(\varphi + \theta)}$$

$$F_2 = \frac{mg \sin\theta}{\sin(\varphi + \theta)}$$

13.28 Il disco B ruota liberamente con velocità angolare ω_B ed è solidale con un'asta cilindrica che ne sporge lungo l'asse di rotazione. Il disco C ha un foro al centro che consente di infilarlo sull'asta, come mostra la Figura E13.9; il disco C, inizialmente in quiete, viene lasciato cadere sul disco B. (a) Si determini la velocità angolare del sistema dopo che l'attrito tra B e C li ha portati a una velocità angolare comune. (b) Qual è la variazione dell'energia cinetica del sistema? Si esprimano le risposte in termini di ω_B, I_B e I_C. (c) Si calcolino i valori numerici delle espressioni trovate nelle parti (a) e (b) quando $I_B = 0.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_C = 0.10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ e $\omega_B = 6.2$ rad/s.



a) Il momento angolare del sistema si conserva: $L_i = L_f$

$$L_i = I_B \omega_B$$

$$L_f = I_B \omega_c + I_C \omega_c = (I_B + I_C)\omega_c$$

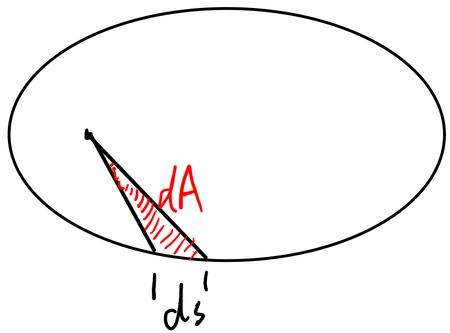
$$\omega_c = \frac{I_B}{I_B + I_C}\omega_B$$

b) $\Delta E = K_f - K_i$

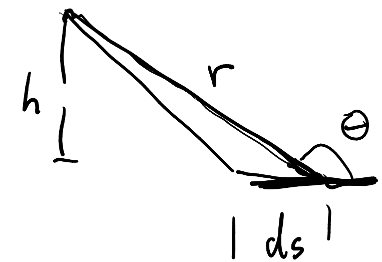
$$\Delta E = \frac{1}{2}(I_B + I_C)\omega_c^2 - \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{1}{2}\cancel{(I_B + I_C)}\frac{I_B^2}{(I_B + I_C)^{\cancel{2}}}\omega_B^2 - \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I_B}{(I_B + I_C)} I_B \omega_B^2 - \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 \left(\frac{I_B}{I_B + I_C} - 1\right) = \left(-\frac{I_C}{I_B + I_C}\right)\frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

2a legge di Kelplero



dA



$dA = \frac{1}{2}$ base x altezza

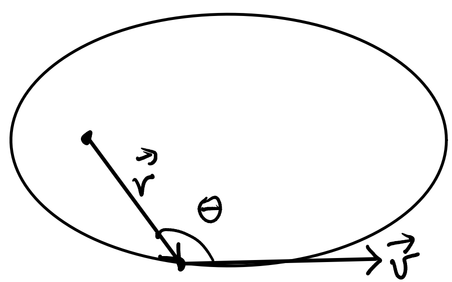
$$dA = \frac{1}{2}\, ds\, r \sin\theta$$

$$ds = v\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{r \sin\theta\, v}_{\ell/m}\, dt$$

$$dA = \boxed{\frac{\ell}{2m}}\, dt \qquad dA \propto dt$$

costante!



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\, \vec{r} \times \vec{v} = m r v \sin\theta\, \hat{k}$$