TROTTOLA DI LAGRANGE

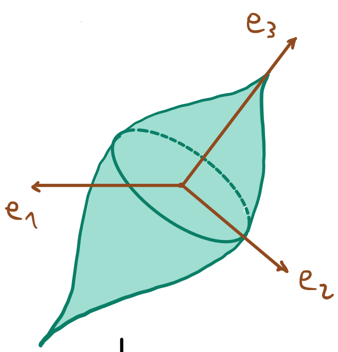
Abbiamo calcolato l'**ENERGIA CINETICA** rotazionale del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2}\,\bar{\omega}\cdot \mathcal{I}\,\bar{\omega}$$

Scegliendo gli assi principali d'inerzia, abbiamo

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\omega_i^2 \qquad \text{dove} \quad \bar{\omega} = \omega_1\bar{e}_1 + \omega_2\bar{e}_2 + \omega_3\bar{e}_3$$

La TROTTOLA è un corpo rigido con una simmetria di rotazione attorno a un asse.



Con questa scelta di terna solidale ho

$$I_1 = I_2 \quad \text{e} \quad I_3$$

Ricordiamo: $$\mathcal{I}_{\substack{ij \\ i\neq j}} = -\sum_{a=1}^{N} m_a\, x_{ai}\, x_{aj} = \rho\underbrace{\int x_i x_j\, dx_i\, dx_j\, dx_k}_{\text{almeno uno di quegli integrali è } \int_{-r}^{r} x\,dx = 0} \qquad k\neq i\neq j\neq k$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{I}_{ij} = 0 \quad \text{se } i\neq j$$

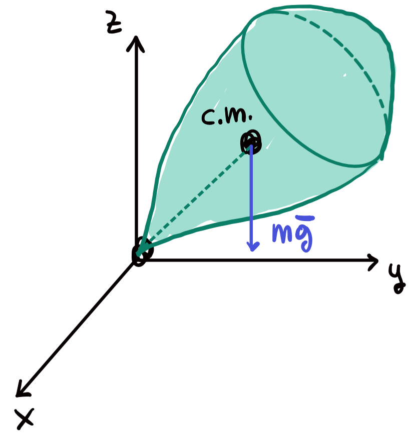
$$T = \frac{1}{2} I_1\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{1}{2} I_3\,\omega_3^2$$

Ricordiamo che

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\bar{e}_1 + (\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\psi)\bar{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\bar{e}_3$$

$$= \frac{1}{2} I_1\left(\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2$$

Mettiamo la trottola con pto fisso in un campo gravitazionale costante



$$V = -mg\,z_{c.m.} = mg\ell\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - mg\ell\cos\theta$$

- Ci sono due coordinate cicliche, φ e ψ → due cost. del moto

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = I_3\omega_3 \qquad \leftarrow M_3$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1\dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta + I_3\dot\varphi\cos^2\theta + I_3\dot\psi\cos\theta \qquad \leftarrow M_z$$

$$= I_1\dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta + p_\psi\cos\theta$$

Nel seguito prenderemo $p_\varphi, p_\psi > 0$

- C'è anche en. totale

$$E = T + V = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + mg\ell\cos\theta$$

⇝ 3 COSTANTI DEL MOTO in un sistema con $n=3$ gradi di libertà

- Da coord. cicliche → Lagrangiana ridotta:

ricaviamo $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ da sist. lineare

$$\begin{cases} p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi = I_1\dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta & \rightarrow \quad \dot\varphi = \dfrac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1 \operatorname{sen}^2\theta} \\ I_3\dot\psi = p_\psi - I_3\dot\varphi\cos\theta & \rightarrow \quad \dot\psi = \dfrac{p_\psi}{I_3} - \dfrac{\cos\theta\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)}{I_1 \operatorname{sen}^2\theta} \end{cases}$$

$$\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3}$$

$$L^* = L\big|_{\dot\psi,\dot\varphi = \ldots} - \dot\varphi p_\varphi - \dot\psi p_\psi =$$

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

$$= \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{I_1 \sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_3}$$

$$- \frac{p_\varphi}{I_1\sin^2\theta}(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi) - \frac{p_\psi^2}{I_3} + \frac{p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)$$

$$\to - \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{I_1\sin^2\theta}$$

$$\boxed{L^* = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - mgl\cos\theta - \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2\theta}} \quad \cancel{- \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_3}}$$

$$L^* = T_{eff} + V_{eff}$$

con $T_{eff} = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2$ e

$$\boxed{V_{eff}(\theta) = mgl\cos\theta + \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2\theta}}$$

Vogliamo ora disegnare il grafico di V_{eff} per capire come si comporta qualitativamente il sistema:

- $V_{eff}(\theta)$ è una funzione continua per $0 < \theta < \pi$
- Agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{\theta \to 0^+} V_{eff}(\theta) = +\infty \qquad \lim_{\theta \to \pi^-} V_{eff}(\theta) = +\infty$$

↳ Qto avviene se $p_\varphi \neq p_\psi$. Se invece $p_\varphi = p_\psi$, allora

$$V_{eff} = mgl\cos\theta + \frac{p_\varphi^2}{2 I_1}\frac{(1-\cos\theta)^{\cancel{2}}}{(1+\cos\theta)\cancel{(1-\cos\theta)}}$$

e $\lim_{\theta \to 0} V_{eff}(\theta) = mgl$ (si veda "Trottola addormentata" per lo studio di questo caso).

- Dai due pti sopra si conclude che $V_{eff}(\theta)$ ha un MINIMO ASSOL.
  Dobbiamo capire se ha altri pti stazionari.

- Definiamo $$g(x) = x + \frac{(P_\varphi - P_\psi x)^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)}$$

  Allora si ha $V_{eff}(\theta) = mgl\ g(\cos\theta)$
  - $x = \cos\theta$ è un buon cambiam. di coord perché $\cos\theta$ è monotono in $\theta \in [0, \pi[$;
  - inoltre $V_{eff}(\theta)$ ha gli stessi pti stazionari di $g(x)$;
    in particolare $V_{eff}(\theta)$ ha un solo minimo in $\theta \in]0, \pi[$ se e solo se $g(x)$ ha un solo minimo in $x \in]-1, 1[$.

- Dimostriamo allora che $g(x)$ ha un solo minimo:

1) $$g'(x) = 1 - \frac{(P_\psi - P_\varphi x)(P_\varphi - P_\psi x)}{I_1 mgl (1-x^2)^2}$$

$$g''(x) = \frac{(1+3x^2)P_\varphi^2 - 2x(3+x^2)P_\varphi P_\psi + (1+3x^2)P_\psi^2}{I_1 mgl\ (1-x^2)^3}$$

- il denominatore di $g''(x)$ è POSITIVO $\forall x \in]-1, 1[$

- il numeratore di $g''(x)$ è anche POSITIVO $\forall x \in]-1, 1[$;
  qto è meno ovvio, quindi vediamo il perché:
  il numeratore (a meno di un fattore positivo è)

$$\left(\frac{P_\varphi}{P_\psi}\right)^2 - 2\,\frac{x(3+x^2)}{1+3x^2}\left(\frac{P_\varphi}{P_\psi}\right) + 1 \qquad (\circ)$$

Qto è un polinomio quadratico nella variabile P_φ/P_ψ.
Siccome il coeff. di $(P_\varphi/P_\psi)^2$ è >0, qto polinomio è identicam. positivo se il suo discriminante è negativo.
Il discriminante di $a\xi^2 + b\xi + c$ è $\Delta = b^2 - 4ac$
Per (o) abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{x^2(3+x^2)^2}{(1+3x^2)^2} - 1 = -\frac{(1-x^2)^3}{(1+3x^2)^2} < 0$$

per $x \in]-1,1[$. //

- siccome $g''(x) > 0 \quad \forall x$, questo vuol dire che $g(x)$ ha un solo pto stazionario in $x \in]-1,1[$.

2) C'è un altro modo per dimostrare che $V_{eff}(\theta)$ ha un solo pto stazionario.

L'energia del sist. ridotto è

$$E = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{(P_\varphi - \cos\theta P_\psi)^2}{2I_1 \sin^2\theta} \quad (*)$$

$$= \frac{I_1}{2}\frac{\dot x^2}{1-x^2} + mgl\,x + \frac{(P_\varphi - x P_\psi)^2}{2I_1(1-x^2)}$$

Ricordiamo che in E abbiamo trascurato il termine cost $\frac{1}{2}\frac{P_\psi^2}{2I_3}$; la vera En. sarebbe $E + P_\psi^2/2I_3$

qui abbiamo usato $x = \cos\theta \Rightarrow \dot x = -\dot\theta\,\text{sen}\,\theta$.

La retta a En. costante interseca il grafico di $V_{eff}(\theta)$ e di $g(x)$ nei pti x per cui $\dot x = 0$, cioè nei pti x che risolvono l'equazione

$$(E - mgl\,x)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(P_\varphi - P_\psi x)^2 \quad (*)$$

che è un' EQ. CUBICA, quindi con al massimo 3 soluzioni.
Siccome la retta a En. cost. interseca il grafico di $g(x)$ un numero pari di volte $\left(\lim_{\theta \to 0, \pi} V_{eff} = +\infty \right)$, allora le soluzioni di $(*)$ in $x \in \left]-1, 1\right[$ saranno al max 2 e quindi c'è un solo pto di minimo.

Chiamiamo θ^* $(x^* = \cos\theta^*)$ il valore di θ in cui $V_{eff}(\theta)$ è MINIMO.

Domanda: MIN θ^* giace prima o dopo di $\pi/2$?

$$g(x) = x + \frac{(P_\varphi - x P_\psi)^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)} \rightsquigarrow g'(x) = 1 + \frac{P_\varphi - x P_\psi}{I_1 mgl (1-x^2)} \left[-P_\psi + \frac{x (P_\varphi - x P_\psi)}{1-x^2} \right]$$

- $\theta^* = \pi/2$ è pto di equilibrio quando $g'(0) = 0$, cioè

  per $1 - \dfrac{P_\varphi P_\psi}{I_1 mgl} = 0 \longrightarrow P_\varphi P_\psi = I_1 mgl$

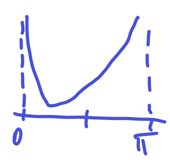
- $\theta^* = \pi/2 - \epsilon \rightsquigarrow x = \epsilon \ll 1$ è pto di equilibrio per

$$0 \simeq 1 + \frac{P_\varphi - \epsilon P_\psi}{I_1 mgl} \left[-P_\psi + \epsilon P_\varphi \right] \simeq 1 + \frac{1}{I_1 mgl} \left(-P_\varphi P_\psi + \epsilon \left(P_\psi^2 + P_\varphi^2 \right) \right)$$

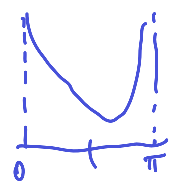
$$\Rightarrow I_1 mgl = P_\varphi P_\psi - \epsilon \left(P_\varphi^2 + P_\psi^2 \right) \rightsquigarrow \epsilon = \frac{P_\varphi P_\psi - I_1 mgl}{P_\varphi^2 + P_\psi^2}$$

Quindi:

$x^* > 0$ $(\theta^* < \pi/2)$ se $P_\varphi P_\psi > I_1 mgl$

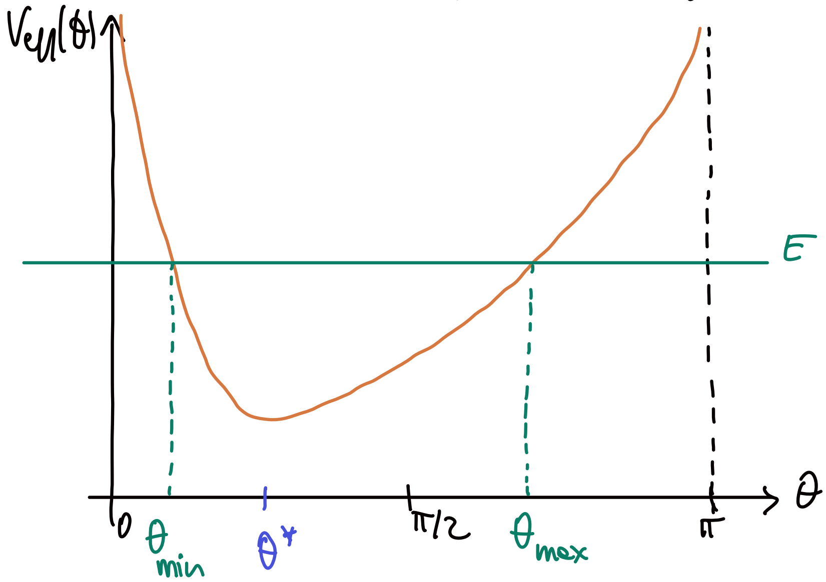


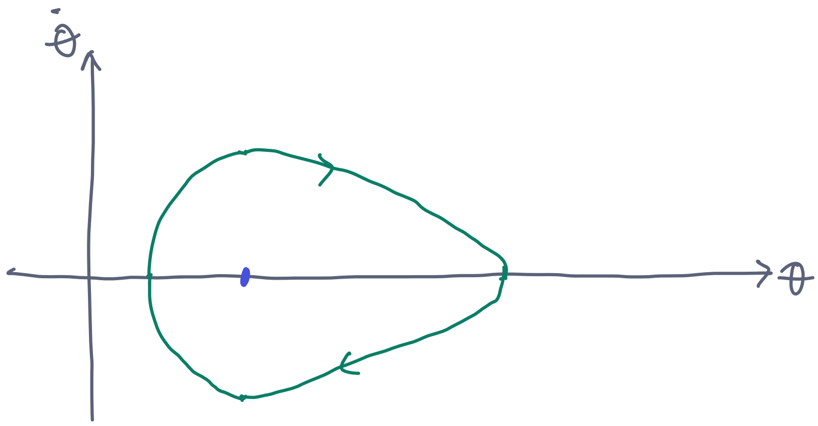
$x^* < 0$ $(\theta^* > \pi/2)$ se $P_\varphi P_\psi < I_1 mgl$



- Osservazione: $g(x) = x + \dfrac{(P_\varphi - x P_\psi)^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)} \longrightarrow$ se $x^* \geq 0$ $(\theta^* < \pi/2)$, allora $g(x)$ è def. positiva; infatti $g(x) \geq g(x^*) > 0$

Consideriamo il caso $P_\varphi P_\psi > I_1 mgl$: il grafico del potenziale efficace è





- C'è un solo pto di equil. per il problema ridotto corrispondente all'energia minima $\Rightarrow$ moto con inclinaz. asse cost.

- A en. superiore il moto avviene tra due valori θ_{min}, θ_{max}
$\Rightarrow$ l'inclinazione dell'asse fa moto periodico tra θ_{min} e θ_{max}. $\rightsquigarrow$ MOTO DI NUTAZIONE

Vediamo ora il moto di PRECESSIONE (φ). Abbiamo che (prendiamo p_φ e $p_\psi > 0$)

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} = \frac{p_\varphi - p_\psi x}{I_1(1-x^2)}$$

Se $\theta = \theta^* \rightarrow \dot{\varphi} = \underset{\text{cost.}}{\omega_\varphi} \Rightarrow \varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$

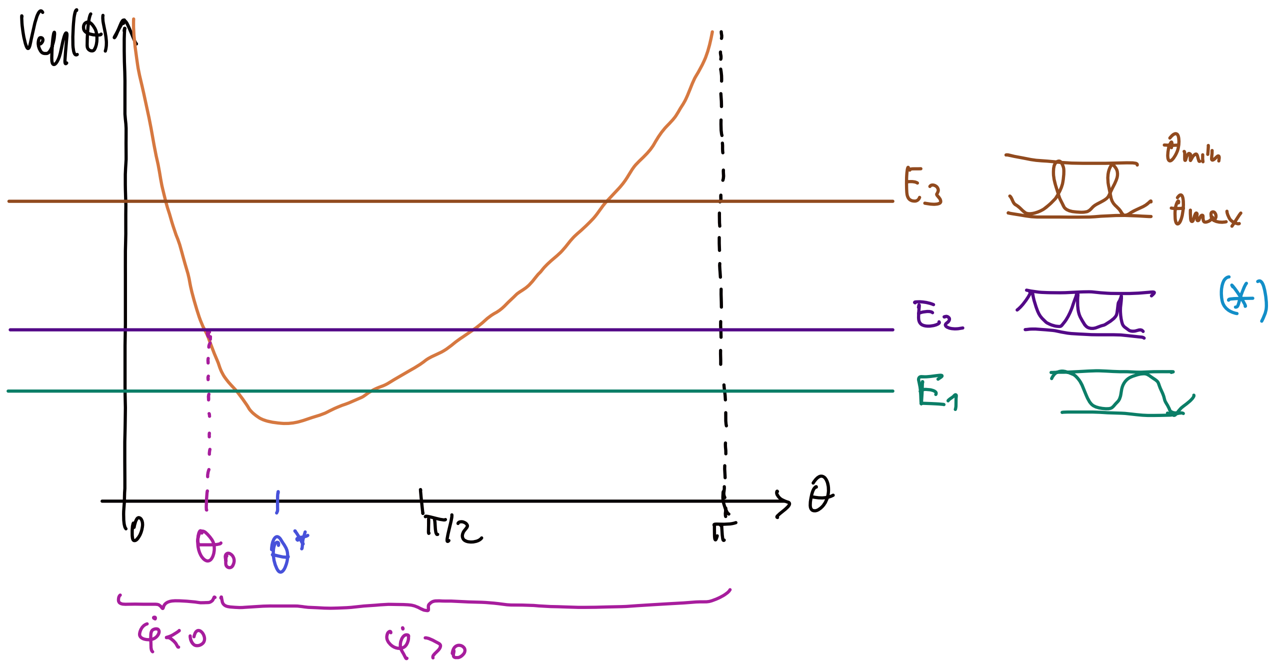
- $\dot{\varphi}$ si annulla per $x_0 = p_\varphi / p_\psi$ con $x_0 = \cos\theta_0$.

inoltre: $\begin{cases} \text{per } x > x_0 \ (\theta < \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) < 0 \\ \text{per } x < x_0 \ (\theta > \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) > 0 \end{cases}$

- Cerchiamo di capire dove si trova θ_0 rispetto al min θ_*:
  - Se $\theta_0 < \theta_*$, allora $V'_{eff}(\theta_0) < 0$ $(g'(x_0) > 0)$
  - se $\theta_0 > \theta_*$, allora $V'_{eff}(\theta_0) > 0$ $(g'(x_0) < 0)$

Valutiamo allora $g'(x) = 1 + \frac{(p_\varphi - x p_\psi)}{I_1 mgl(1-x^2)}\left[-p_\psi + x\frac{(p_\varphi - x p_\psi)}{(1-x^2)}\right]$ in $x_0 = p_\varphi/p_\psi$:

$$g'(x_0) = 1 + 0 > 0 \Longrightarrow \theta_0 < \theta_*$$



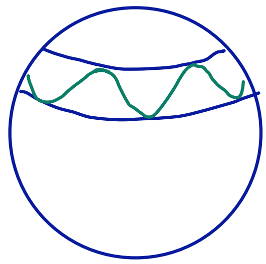
(*) In questo caso θ_0 è pto in cui sia $\dot{\theta}$ che $\dot{\varphi}$ si annullano.

Possiamo rappresentare i tre casi E_1, E_2, E_3 come moti sulla sfera:

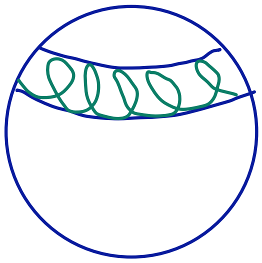
E_1) Per θ permessi, $\dot{\varphi}$ ha segno definito $(\forall t)$. Infatti si può dimostrare che

$P_\varphi > P_\psi \max_\theta |\cos\theta|$

$\rightarrow$ $\varphi(t)$ avanza sempre



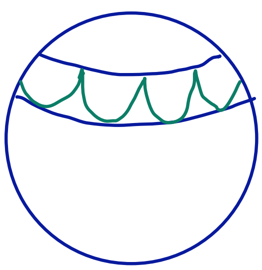
E_3) $\dot{\varphi}$ si annulla quando $\cos\theta_0 = P_\varphi / P_\psi$



$\hookrightarrow$ $\dot{\varphi}$ ha segno opposto per θ_{min} e θ_{max}

Dal grafico di V_{eff}, si vede che per la maggior parte dei valori di θ permessi, $\dot{\varphi}$ è positivo $\rightarrow$ indicazione che la media temporale di $\dot{\varphi}(t)$ è positiva e quindi la trottola avanza.

E_2) In questo caso $\theta_0 = \theta_{min}$ (punto più alto toccato dalla trottola), cioè avviene $P_\varphi = P_\psi \cos\theta_0$.



Questo caso è il più comune in pratica, quando si cerca di avere alto valore di $\dot{\psi}_0$ e invece $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0 \ll 1$.

Come sono legate le cost. del moto coi dati iniziali?

1) $P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = I_3\omega_3$

2) $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1\dot\varphi\,\text{sen}^2\theta + I_3\dot\varphi\cos^2\theta + I_3\dot\psi\cos\theta$

$= I_1\dot\varphi^2\text{sen}^2\theta + P_\psi\cos\theta$

3) $E = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{(P_\varphi - \cos\theta P_\psi)^2}{2I_1\text{sen}^2\theta}$

Dati iniziali: $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \dot\theta_0, \dot\varphi_0, \dot\psi_0$

→ quando posizioniamo la trottola per poi lasciarla cadere, abbiamo dati iniziali con $\dot\varphi_0 = 0$ e $\dot\theta_0 = 0$ ← ricadiamo nel caso E_2

$\Rightarrow \quad \dot\psi_0 = \frac{P_\psi}{I_3} \quad$ (da 1)

$\cos\theta_0 = \frac{P_\varphi}{P_\psi} \quad$ (da 2) ← lo chiamo con nome θ_0 perché è proprio pto in cui $\dot\varphi_0 = 0$

$= \frac{E}{mgl}$ ← qta relazione non vale sempre (solo nel caso E_2) ⇝ E, P_ψ, P_φ in generale sono cost. del moto indipendenti

$\Updownarrow$

$P_\psi = I_3\dot\psi_0$

$P_\varphi = I_3\dot\psi_0\cos\theta_0 = P_\psi\cos\theta_0$

$\rightarrow \quad P_\varphi P_\psi = I_3^2\dot\psi_0^2\cos\theta_0$

$> I_1 mgl$ per $\dot\psi_0$ suff. grande

Nota: φ_0 e ψ_0 sono irrilevanti (conseguenza delle simmetrie del sistema).

TROTTOLA DORMIENTE E RISVEGLIO

Osservazione: la trottola, dopo essere stata lanciata, si stabilizza con l'asse di rotazione verticale e ruota mostrando piccolissime oscillazioni: la rotazione è praticamente stazionaria ("trottola dormiente"). Ad un certo punto la trottola si risveglia, cominciando un moto di nutazione e precessione sempre più accentuato, finché la trottola cade.

Vediamo come potevamo predirlo.

- Con un lancio ben fatto, $\dot{\psi}_0 \gg \dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0 \Rightarrow p_\varphi \simeq p_\psi$
- Quando $p_\varphi = p_\psi$, V_{eff} non esplode più a $\theta = 0$:

$$V_{eff} = mgl\cos\theta + \frac{p_\varphi^2 (1-\cos\theta)^{\cancel{2}}}{2I_1(1+\cos\theta)\cancel{(1-\cos\theta)}}$$

$$= mgl\cos\theta + \frac{p_\varphi^2}{2I_1}\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

- Troviamo il minimo:

$$V'_{eff}(\theta) = -mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{p_\varphi^2}{2I_1}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} + \frac{(1-\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right) =$$

$$= \mathrm{sen}\,\theta\left[-mgl + \frac{p_\varphi^2}{I_1}\,\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right]$$

$\Rightarrow \theta = 0$ è pto di equilibrio, assieme a θ^* con

$$\cos\theta^* = \frac{p_\varphi}{\sqrt{mglI_1}} - 1$$

$\downarrow$

$V_{eff}(0) = mgl$

Controlliamo quale delle configurazioni è stabile

$$V''_{eff}(\theta) = \cos\theta\left[-mgl + \frac{p_\varphi^2}{I_1}\,\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right] + \mathrm{sen}\,\theta\,(\cdots)$$

$$\rightarrow V''_{eff}(0) = -mgl + \frac{p_\varphi^2}{4I_1}$$

$p_\varphi = I_3\dot{\psi}_0\cos\theta_0$

Ricordiamo $p_\varphi = I_3\dot{\psi}_0\cos\theta_0 \rightsquigarrow$ se $\dot{\psi}_0$ è suff. grande, $V''_{eff}(0) > 0 \rightarrow$ PTO STAB.

Quindi:

- Se partiamo da θ vicino a $\theta=0$, θ oscilla attorno allo zero con frequenza $V''_{eff}(0) \rightsquigarrow$ trottola ha moto pratican. stazionario: le piccole oscillazioni vengono smorzate dall'attrito.

- Man mano che passa il tempo, l'attrito riduce $\dot{\psi}$ e quindi $P_\psi = P_\varphi$, finché $\theta=0$ non è più stabile: ogni perturbazione allontana trottola dalla rotaz. stazionaria (ora instabile)

  $\to$ compare un moto di nutazione che diventa sempre più ampio mentre P_ψ diminuisce (la trottola si è risvegliata)

TROTTOLA CON SPIN (P_ψ) MOLTO GRANDE

Ora lanciamo la trottola con condizioni iniziali ($t=0$):

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \dot{\theta}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0 \qquad e \qquad \dot{\psi}_0 \text{ molto grande}$$

θ_0 qui sta per $\theta(t)$ al tempo $t=0$; può coincidere anche con angolo per cui $\dot{\varphi}=0$

Ricordiamo

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mgl\,x)(1-x^2) + \frac{1}{2I_1}(P_\varphi - x P_\psi)^2 \qquad (*)$$

e valutiamola a $t=0$:

$$0 = (E - mgl\,x_0)(1-x_0^2) + \frac{1}{2I_1}(P_\varphi - x_0 P_\psi)^2$$

$\to$ x_0 è una soluzione di qta equazione cubica.

Possiamo riscrivere $(*)$ come

$$E = \underbrace{\frac{I_1}{2}\frac{\dot{x}^2}{1-x^2}}_{A} + mgl\,x + \underbrace{\frac{(P_\varphi - x P_\psi)^2}{2I_1(1-x^2)}}_{B}$$

- A $t=0$ $A=0$ e $B=0$ $\rightsquigarrow$ $E = mgl\cos\theta_0$
- A e B sono DEFINITI POSITIVI

Siccome l'energia si conserva, all'aumentare del tempo si accendono i termini A e B e $mgl\cos\theta$ deve diminuire $\Rightarrow$ θ aumenta (trottola scende), cioè θ_0 corrisponde alla circonferenza superiore

Inoltre, ricordando $\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$, si ha

- $\cos\theta_0 = p_\varphi / p_\psi$ (da $\dot\varphi_0 = 0$)

$E_n = mgl\cos\theta_0 + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$

- $\cos\theta_0 = \frac{E}{mgl}$ (da $E = mgl\cos\theta_0$)

Usando quanto detto finora, riscriviamo (*) con $\dot x = 0$:

$$0 = mgl(x_0 - x)(1-x^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_1}(x_0-x)^2 =$$

$$= (x_0 - x)\underbrace{\left(mgl(1-x^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_1}(x_0-x)\right)}_{\text{altre radici sono soluzioni di qta eq. di 2° grado}}$$

Qta equazione ci dà i PUNTI DI INVERSIONE ($\dot x = 0$)

$$mgl(x-x_0)\left(x^2 - Kx - 1 + Kx_0\right) = 0 \qquad K \equiv \frac{p_\psi^2}{2I_1 mgl} \gg 1$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[K \pm \sqrt{K^2 + 4 - 4Kx_0}\right] =$$

$$= \frac{K}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{K^2} - \frac{4x_0}{K}}\right] \simeq$$

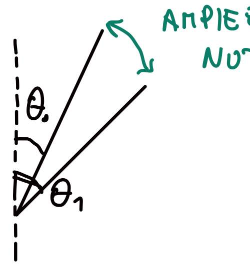
espandiamo fino al secondo ordine $\sqrt{1+\epsilon} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots$

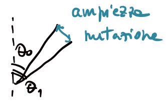
$$\simeq \frac{K}{2}\left[1 \pm \left(1 + \frac{2}{K^2} - \frac{2x_0}{K} - \frac{16x_0^2}{K^2} + O(1/K^3)\right)\right]$$

$$\simeq \frac{K}{2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2x_0}{K} + \frac{2}{K^2}(1-x_0^2)\right)\right] \qquad K - x_0 + \dots \gg 1 \text{ (esclusa)}$$

$$= \begin{cases} K - x_0 + \dots \gg 1 & \text{(ESCLUSA perché } |x| \le 1) \\ x_0 - \frac{(1-x_0^2)}{K} + \dots \simeq \cos\theta_0 - \frac{\sin^2\theta_0}{K} \equiv x_1 \end{cases}$$

L'eq. diventa $\quad mgl(x-x_0)(x-x_1)(x-K+x_0) \quad (\circ)$.





Le due soluzioni accettabili sono

$$x_0 = \cos\theta_0 \qquad e \qquad x_1 = \cos\theta_0 - \frac{\sin^2\theta_0}{K}$$

↳ L' AMPIEZZA DELLA NUTAZIONE è

$$x_0 - x_1 = \frac{\sin^2\theta_0}{K} \Rightarrow$$

Tanto più la trottola gira veloce (K grande), tanto minore (e quindi meno visibile) è l'ampiezza della nutazione

Nota: il pto di equilibrio del potenziale efficace sarà fra θ_0 e θ_1.

Ora ricaviamo la FREQUENZA DELLA NUTAZIONE:

- partiamo da $\frac{I_1\dot{x}^2}{2} = (E - mglx)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(p_\psi - x p_\varphi)^2$, il cui membro di destra può essere riscritto come $(\circ)$;
- siccome $x_0 \simeq x_1$, possiamo approssimarla
$$\frac{I_1\dot{x}^2}{2} = -\underbrace{Kmgl}_{p_\psi^2/2I_1}(x-x_0)^2$$
- deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$I_1\dot{x}\ddot{x} = -\frac{p_\psi^2}{I_1}(x-x_0)\dot{x} \rightsquigarrow \ddot{x} = -\underbrace{\left(\frac{p_\psi}{I_1}\right)^2}_{=\omega^2 \gg 1}(x-x_0) \simeq -\left(\frac{p_\psi}{I_1}\right)^2\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)$$

centro di intervallo di oscillazione

↳ $x(t) = \frac{x_0+x_1}{2} + \frac{x_0-x_1}{2}\cos\omega t$

Infine consideriamo la PRECESSIONE

$$\frac{p_\varphi}{p_\psi} = \cos\theta_0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1\sin^2\theta} = \frac{p_\psi}{I_1}\frac{(x_0-x)}{1-x^2} \simeq \frac{p_\psi}{I_1}\frac{x_0-x}{\sin^2\theta_0} \overset{*}{\simeq} \underbrace{\frac{p_\psi}{I_1\sin^2\theta_0}\cdot\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}_{\sim 1/p_\psi \ll 1}(1-\cos\omega t)$$

$x_0 = \frac{p_\varphi}{p_\psi}$

$\Rightarrow \dot{\varphi}_{media}$ è PICCOLA

$*$: $x - \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{x_0-x_1}{2}\cos(\omega t) \Rightarrow x_0 - x = \frac{x_0-x_1}{2}(1-\cos\omega t)$

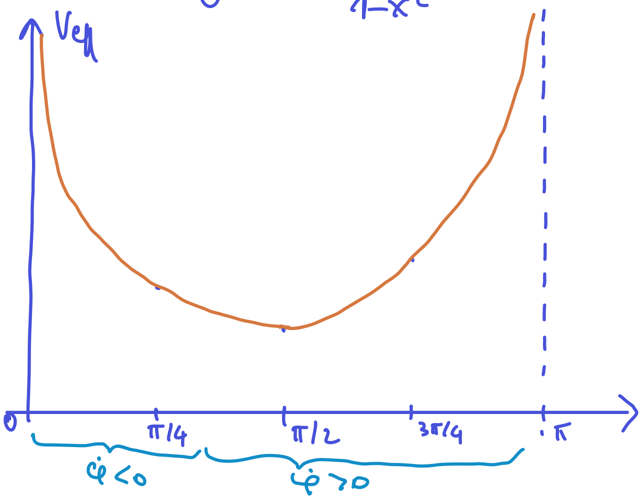
Extra: vediamo il caso particolare in cui $p_\varphi p_\psi = I_1 mgl$

Qndo questo avviene, il minimo di V_{eff} è a $\theta = \pi/2$ $(x=0)$

$$g(x) = x + \frac{(p_\varphi - x p_\psi)^2}{2 p_\varphi p_\psi (1-x^2)} = \frac{p_\varphi^2 - \cancel{2x p_\varphi p_\psi} + x^2 p_\psi^2 + \cancel{2x p_\varphi p_\psi} - 2x^3 p_\varphi p_\psi}{2 p_\varphi p_\psi (1-x^2)}$$

$$= \tilde{g}(x) - \frac{x^3}{1-x^2}$$

con $\tilde{g}(x) = \dfrac{p_\varphi^2 + x^2 p_\psi^2}{2 p_\varphi p_\psi (1-x^2)}$ funz. pari in $x \to -x$



$$g(0) = \frac{p_\varphi}{2 p_\psi}$$

$$g(1/2) = \tilde{g}(1/2) - 1/6 \qquad (\theta = \pi/4)$$

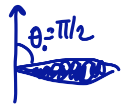
$$\updownarrow =$$

$$g(-1/2) = \tilde{g}(-1/2) + 1/6 \qquad (\theta = 3\pi/4)$$

In questo caso $\theta_0 < \theta^*$. Il potenziale non è simmetrico e la regione di θ in cui $\dot\varphi > 0$ è più estesa di qlla in cui $\dot\varphi < 0$. In media la trottola si muove con $\dot\varphi_{media} > 0$.

Extra: Caso $p_\varphi = 0$ $\quad (p_\varphi p_\psi < I_1 mgl)$

Qto può essere ottenuto mettendo la trottola inizialmente in posizione orizzontale



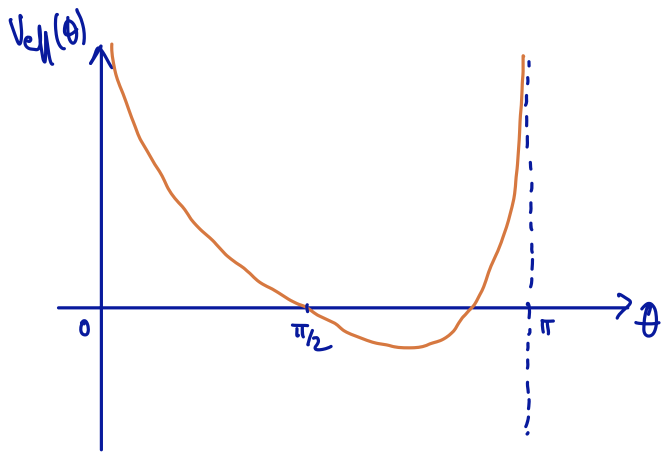
$\dot\psi > 0 \to p_\psi > 0$

Il potenziale diventa

$$V(x) = mgl\left(x + \frac{x^2 p_\psi^2}{2I_1 mgl(1-x^2)}\right) = mgl\, x\left(1 + \frac{p_\psi^2}{2I_1 mgl}\frac{x}{1-x^2}\right)$$

Esso ha due zeri:

$x = 0 \ \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ e $x = \tilde{x} < 0 \ (\theta > \pi/2)$



- Affinché il minimo coincida con $\pi/2$, bisogna prendere il limite $p_\psi^2 \gg 2I_1 mgl$, per cui avremmo uno zero doppio, cioè un minimo.

- Ma qto limite vuol dire sostanzialmente spegnere la gravità.

Extra (da riguardare a fine corso):

HAMILTONIANA della trottola.

Hamiltoniana della trottola : $H = p_\theta \dot\theta + p_\varphi \dot\varphi + p_\psi \dot\psi - L$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2I_1 \operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta$$

Si vede immediatamente che il sistema è integrabile:

H, p_ψ, p_φ sono 3 cost. del moto in involuzione.

$\{M_3, M_z\} = 0$ $\quad$ M_z è comb. lin. di $M_{1,2,3}$ (quindi sembrerebbe impossibile che commutano, ma) con coeff. che dipendono dalle coordinate libere

Extra: equazioni utili durante la trattazione della trottola:

$$p_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) \quad \leftrightarrow \quad \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = p_\psi / I_3$$

$$p_\varphi = I_1 \dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta + p_\psi \cos\theta \quad \leftrightarrow \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$E = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{mgl\cos\theta + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1 \operatorname{sen}^2\theta}}_{V_{eff}(\theta)} \quad \leftrightarrow \quad \frac{I_1}{2}\dot x^2 = (E - mglx)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(p_\varphi - x p_\psi)^2$$