MECCANICA HAMILTONIANA

EQUAZIONI DI HAMILTON

Le equazioni di Lagrange sono n equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Uno può passare a $\underline{2n}$ equazioni differenziali del 1° ordine nel solito modo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}, t) \end{cases}$$

Tuttavia, questo non è sempre il metodo più conveniente per passare a equazioni differenziali del 1° ordine.

Equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}_{\text{l'idea è di definire nuove VARIABILI}} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = 0$$

$$(*) \qquad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad h = 1, \dots, n$$

MOMENTI CONIUGATI

↑

Ora p_h sono intese come vere e proprie coord.

In queste nuove coord. le equazioni di Lagrange diventano

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

Vogliamo invertire le relazioni (*) per trovare

$$\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t) \qquad (\circ)$$

Perché sia ammissibile questa inversione deve avvenire che:

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}} \neq 0 \quad \leftarrow \text{Cambiamento di coordinate invertibile}$$

Per sistemi MECCANICI $(L = T - V)$ con $V = V(q)$

e $T = T_2 + T_1 + T_0$

$$\rightsquigarrow \quad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{l=1}^{n} a_{hl} \dot{q}_l + b_h$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = a_{ij}$$

che è invertibile $(\det a \neq 0)$

$$\dot{\bar{q}} = a^{-1}(\bar{p} - \bar{b}(q, t))$$

← qta è la funzione che in (o) abbiamo chiamato $\bar{u}(p, q, t)$

Le equazioni di Lagrange prendono la forma:

$$\begin{cases} \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, a^{-1}(\bar{p} - \bar{b}), t) & \leftarrow \text{eq. di Lagr. vere e proprie} \\ \dot{q}_h = a^{-1}(\bar{p} - \bar{b}) & \leftarrow \text{ottenute dalla relaz. tra } \bar{p} \text{ e } \dot{\bar{q}}. \end{cases}$$

Quindi arriviamo a eq. diff. del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}} = \bar{f}_p(\bar{p}, \bar{q}, t) \\ \dot{\bar{q}} = \bar{f}_q(\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases} \leftarrow \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$$

con $\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_q \\ \bar{f}_p \end{pmatrix}$ che ha una forma particolare che ora vedremo.

Prop. Si consideri una Lagrangiana $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ con det. Hessiano non nullo, cioè $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$.

Allora il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_h = u_h(p,q,t) \leftarrow \text{ottenuto invertendo } p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(q,\dot{q},t) \\ \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t) \leftarrow \text{eq. di Lagrange} \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} \dot{p}_h = -\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q},t)}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(\bar{p},\bar{q},t) \end{cases} \quad \text{con} \quad H(\bar{p},\bar{q},t) \equiv \left[\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\right]\Big|_{\dot{\bar{q}}=\bar{u}(\bar{p},\bar{q},t)}}$$

Inoltre si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

H è detta HAMILTONIANA (o funz. di Hamilton)
le eq. (*) sono dette EQ. DI HAMILTON (o eq. canoniche)

Dim. Siccome per ipotesi $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$, allora

$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ si può invertire, ottenendo $\dot{q}_h = u_h(p,q,t)$

$\Rightarrow H(\bar{p},\bar{q},t)$ è ben definita:

$$H(p,q,t) = \sum_k p_k u_k(p,q,t) - L(q,u(p,q,t),t)$$

Ora facciamo le derivate parziali di H:

$$\frac{\partial H}{\partial q_h}(p,q,t) = \cancel{\sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial q_h}(p,q,t)} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t)$$

$$- \cancel{\sum_\ell \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q,u(p,q,t),t)}_{=p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}(p,q,t)}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t) \quad = -\dot p_h$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_h}(p,q,t) = \sum_k \delta_{hk} u_k(p,q,t) + \cancel{\sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial p_h}(p,q,t)}$$

$$- \cancel{\sum_\ell \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q,u(p,q,t),t)}_{=p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial p_h}(p,q,t)}$$

$$= u_h(p,q,t) \quad = \dot q_h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot p_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\[2ex] \dot q_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases}$$

Inoltre $\displaystyle \frac{\partial H}{\partial t} = \cancel{\sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial t}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \cancel{\sum_\ell \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial t}} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

Dimostrazione alternativa.

Dalla def. di differenziale:

$$dH = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} dq_m \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

= Ora facciamo il diff. della funz. $H = (\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - L)_{\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p},\bar{q},t)}$

(□)

$$dH = \sum_{m=1}^{n} \boxed{p_m}\, \underbrace{du_m}_{} + \sum_{m=1}^{n} u_m\, dp_m - \sum_{m=1}^{n} \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} du_m - \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

è il differenziale della funzione $\bar{u}(\bar{p},\bar{q},t)$

Notiamo che il differenziale della funz. $\bar{u}(\bar{p},\bar{q},t)$ appare in due punti; siccome $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ questi contributi si cancellano.

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\dot{q}_m\, dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

(□) vettori sono uguali quando sono uguali le componenti rispetto a una base (dp_m, dq_m, dt)

$$\Longrightarrow \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n$$

Eq. di Lagrange

//

Quindi le eq. del moto si possono esprimere come

$$\begin{cases} \dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}(p,q,t) \\ \dot{q}_n = \dfrac{\partial H}{\partial p_n}(p,q,t) \end{cases} \qquad \text{def. } \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad \to \quad \dot{\bar{x}} = \bar{f}(x,t)$$

Vediamo che forma assume $\bar{f}$:

$$\bar{f}(x,t) = \begin{pmatrix} -\bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nabla}_p H \\ \bar{\nabla}_q H \end{pmatrix} =$$

vett. 2n-dim.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Chiamiamo questa matrice } E} \bar{\nabla}_x H$$

$\Rightarrow$ Le eq. di Hamilton si possono riscrivere come

$$\dot{x} = E\,\bar{\nabla}_x H \qquad \text{con} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ MATRICE ANTISIMMETRICA

NOTAZIONE COMPATTA

In componenti: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \dfrac{\partial H}{\partial x_j}(x,t) \qquad i = 1, \dots, 2n$

Le componenti della matrice E sono $\rightarrow$

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & i,j = 1, \dots, n \\ -\delta_{hk} & i = h \quad j = k+n \quad h,k = 1,\dots,n \\ \delta_{hk} & i = h+n \quad j = k \quad h,k = 1,\dots,n \\ 0 & i,j = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

<u>Prop.</u> In un sistema meccanico, H prende la forma:

$$H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{omogenea di grado 2 in } \dot{q}}}{T_2} - T_0 + V$$

$\rightarrow$ Nel caso di vincoli indip. dal tempo, $H = T + V$ (en. tot. del sistema)

<u>Dim.</u> T_2, T_1, T_0 sono funz. omogenee di grado rispettivamente 2, 1, 0:

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = \sum_h \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h =$$

$$= 2T_2 + T_1 + 0$$

Quindi

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

$$= T_2 - T_0 + V. \quad //$$

Esempi

1) PTO MATERIALE in coord. cartesiane

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \qquad V = V(x,y,z)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad p_y = m\dot{y} \qquad p_z = m\dot{z}$$

↳ invertiamo

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H(p_x,p_y,p_z,x,y,z) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x,y,z) = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V$$

Energia cinetica

2) Oscillatore ARMONICO

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \longrightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2}$$

3) FORZE ELETTROMAGNETICHE

$$\bar{F} = e\left(\bar{E} + \dot{\bar{q}} \times \bar{B}\right) \qquad \bar{E} = -\left(\bar{\nabla}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$\bar{F}$ si ricava da $V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \underbrace{e\,\phi(\bar{q})}_{V_0} \underbrace{- e\,\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q})}_{V_1}$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\bar{q}}^2 + e\,\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A} - e\phi$$

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = m\dot{q}_h + e A_h \Rightarrow \dot{q}_h = \frac{p_h - e A_h}{m} \qquad (\neq)$$

$$H = \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L\Big|_{(\neq)} = \bar{p} \cdot \left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right)^2$$

$$- e\left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right) \cdot \bar{A} + e\phi$$

$\downarrow$

$$\boxed{H = \frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{2m} + e\phi} = T + V_0$$

FORMULAZIONE VARIAZIONALE

Siamo interessati alle traiettorie nello sp. delle fasi

$$\underbrace{p_i(t) \qquad q_i(t)}_{\text{sono funzioni}} \qquad i=1,\dots,n$$

sono funzioni $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$

Funzionale AZIONE HAMILTONIANA

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\, \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right]}_{L(\bar{q}(t),\, \dot{\bar{q}}(t),\, t)} dt$$

Se il sistema Hamiltoniano è equiv. a un sist. Lagrangiano, S coincide con l'azione Hamiltoniana vista in precedenza.

[Se ho $\mathcal{S}[\bar{p},\bar{q}] = \int dt\; F(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t)$

$$\delta \mathcal{S} = \frac{d}{d\alpha} \int dt \left[F(\bar{p} + \alpha\delta\bar{p},\, \bar{q} + \alpha\delta\bar{q},\, t) \right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int dt \sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial p_h}\delta p_h + \frac{\partial F}{\partial q_h}\delta q_h \right)$$

]

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\, \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right] dt$$

$$\delta S[\bar p,\bar q,\delta\bar p,\delta\bar q] = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{m}\Big[\underbrace{\delta p_s(t)\,\dot q_s(t)}_{\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\sum_h p_h\dot q_h\right)\delta p_s} + p_s(t)\,\delta\dot q_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s(t)\Big]dt$$

Integriamo per parti

$$\delta\dot q_s = \frac{d}{dt}\delta q_s$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{m}\Big[\Big(\dot q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\Big)\delta p_s - \Big(\dot p_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}\Big)\delta q_s\Big]dt + \sum_{s=1}^{m} p_s\,\delta q_s\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$\Downarrow$

Prop: Il moto $\bar p(t),\bar q(t)$ $(t_0\le t\le t_1)$ rende stazionario il funzionale azione $S[\bar p,\bar q]$ corrispondente a una data Hamiltoniana H, per variazioni arbitrarie e per $\delta\bar q$ nulle agli estremi, SE E SOLO SE esso soddisfa le eq. di Hamilton relative a H.