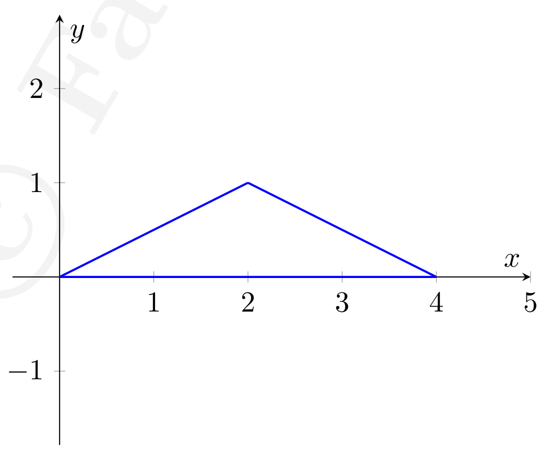
Capitolo 4

Curve e integrali curvilinei di prima specie

Ultimo aggiornamento: 7 maggio 2020

Esercizio 4.1 - Si dia una parametrizzazione della curva il cui sostengo è rappresentato in figura che la percorra in senso orario e una che la percorra in senso antiorario, entrambe definite in un intervallo del tipo $[0, a]$ per qualche $a > 0$, entrambe che associno a 0 il punto $(0, 0)$.



Esercizio 4.2 - Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ si scriva una sua parametrizzazione

1. che la percorra in senso opposto e che sia definita in $[a, b]$;
2. che sia definita nell'intervallo $[0, 1]$ anziché in $[a, b]$;
3. che sia definita in un generico intervallo $[c, d]$ anziché in $[a, b]$;
4. che la percorra a velocità doppia e a velocità dimezzata sempre partendo dal valore del parametro a, cioè che sia definita in un intervallo $[a, \tilde{b}]$ per un qualche $\tilde{b} > a$.

Esercizio 4.3 - Calcolare la lunghezza della curva

$$y = \log x, \quad x \in [3/4, 4/3].$$

Esercizio 4.4 - Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3z = 2xy \end{cases}$$

dal punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 16/3)$.

Esercizio 4.5 - Calcolare la lunghezza della curva

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$. Calcolare poi i versori tangente e normale (dove possibile).

Esercizio 4.6 - Calcolare la lunghezza delle curve

$$\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^t, t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\beta(t) = \left(\frac{8}{3}t^{3/2} - \frac{5}{3}, 2t^2, 2t - 2\right), \quad t \in [0, 1]$$

e calcolare l'angolo formato dalle due rette tangenti alle due curve nel punto $(1, 2, 0)$. Calcolare inoltre l'ascissa curvilinea. Se possibile, esprimere γ e/o β rispetto al parametro d'arco.

Esercizio 4.7 - Calcolare per la curva

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, \sqrt{2}e^t)$$

l'ascissa curvilinea $s(t)$ a partire dal punto $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva assumendo come parametro s.

Esercizio 4.8 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = xy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 4.9 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la curva $\varrho = e^{2\vartheta}$ con $\vartheta \in (-\infty, 0]$.

Esercizio 4.10 - Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Esercizio 4.11 - Data la curva definita in forma polare da

$$\rho = \vartheta \quad \text{per } \vartheta \in [0, \pi] \qquad \text{e} \qquad \rho = 2\pi - \vartheta \quad \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi]$$

se ne disegni il sostegno, se ne trovi una parametrizzazione e, data la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma f\, ds.$$

Esercizio 4.12 - Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2 + t^{2/3}, t^2 + t^{1/3}) & \text{se } t \in [0, 1]\,, \\ (\log(e + 1 - t)^2, \log(e + 1 - t)^2) & \text{se } t \in (1, e]\,, \end{cases}$$

si verifichi che la curva è semplice e chiusa.

Esercizio 4.13 - Data la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t) & \text{se } t \in [0, \pi/2]\,, \\ (\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} t) & \text{se } t \in (\pi/2, \pi]\,, \end{cases}$$

si verifichi che la curva è semplice e chiusa.

Esercizio 4.14 - Detta f la funzione $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}}$ e γ la curva espressa in forma polare da

$$\rho=\vartheta\,, \qquad \vartheta\in[0,2\pi]\,,$$

si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$.

Esercizio 4.15 - Data la curva Γ in forma implicita

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0,$$

si dimostri che Γ è compatta e si calcolino i punti di massima e minima distanza dall'origine.

Esercizio 4.16 - Data la curva Γ intersezione delle due superfici

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2=1\} \quad \text{e} \quad S_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,z=x^2-y^2+2\}$$

si parametrizzi Γ.

Esercizio 4.17 - Data la curva in forma polare $\rho=\cos\vartheta$ con $\vartheta\in[0,\pi]$
- la si parametrizzi con il parametro d'arco;
- si calcoli la sua lunghezza;
- si calcolino la minima e la massima distanza dei punti del sostegno di tale curva dal punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$;
- si disegni il sostegno della curva indicando, se possibile, di che curva si tratta.

Esercizio 4.18 - Si denoti con $\tilde\Gamma$ la curva (illimitata) definita da

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,z=\frac{e^x+e^{-y}}{\sqrt{2}}\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,x-y=0\right\}\,.$$

Una volta definita la curva (limitata)

$$\Gamma:=\tilde\Gamma\cap\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2\leqslant 2\}$$

se ne calcoli la lunghezza. Si verifichi poi che il punto $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right)\in\Gamma$ e si calcoli la retta tangente a Γ in tale punto.

Esercizio 4.19 - Si denoti con $\tilde{\Gamma}$ la curva (illimitata) definita da

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, 9z^2-16xy=0\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2-y=0\right\}.$$

Una volta definita la curva (limitata)

$$\Gamma := \tilde{\Gamma}\cap\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, x\geqslant 0, x\leqslant 1, y\geqslant 0, y\leqslant 1\}$$

se ne calcoli la lunghezza. Si verifichi poi che il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\in\Gamma$ e si calcoli la retta tangente a Γ in tale punto.

Esercizio 4.20 - Si parametrizzino, al variare di $a\in\mathbf{R}$, $\alpha,\beta>0$, le due seguenti curve date in forma implicita:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=(x-a)^2+y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x^2+\beta y^2=1 \\ z=(x-a)^2+y^2 \end{cases}$$

$*$ Esercizio 4.21 **(Problema Isodiametrico)** Dimostrare che tra tutte le curve chiuse di diametro 2, la circonferenza è quella che racchiude una regione di area massima (si tenga presente che per un insieme $A\subset\mathbf{R}^n$, si definisce il diametro tramite

$$\operatorname{diam} A=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|).$$

Suggerimento: si osservi prima di tutto che all'insieme conviene essere convesso per racchiudere area maggiore, e quindi si ponga il sistema di coordinate in un punto della curva con un asse tangente alla curva e uno perpendicolare, e calcolare quindi l'area usando le coordinate polari.

Soluzioni

Soluzione 4.1 - Una possibile parametrizzazione in senso antiorario è la seguente. Cominciamo dal primo segmento, quello orizzontale: la cosa più semplice è considerare

$$\gamma(t) = (t, 0) \qquad \text{per } t \in [0, 4].$$

La retta che passa per i punti $(0, 4)$ e $(2, 1)$ è il grafico della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4).$$

Il secondo segmento, quello che unisce i punti $(0, 4)$ e $(2, 1)$, deve essere parametrizzato facendo variare il parametro in un intervallo del tipo $[4, a]$ per qualche $a > 4$. Possiamo quindi considerare $t \in [4, 6]$. Per continuare in senso antiorario la prima componente deve "tornare indietro" sull'asse delle x. Per fare ciò possiamo prima cambiare segno a t riflettendolo sulla parte di asse che rappresenta i numeri negativi, dopodiché traslarlo a destra. Precisamente considerare

$$8 - t \qquad \text{con } t \in [4, 6].$$

Di conseguenza, utilizzando l'espressione di f, avremo

$$\gamma(t) = \left(8 - t, -\frac{1}{2}((8 - t) - 4)\right) = \left(8 - t, \frac{1}{2}(t - 4)\right) \qquad \text{per } t \in [4, 6].$$

In maniera analoga si procede per il terzo segmento. Di conseguenza γ sarà così definita

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & t \in [0, 4] \\ \left(8 - t, \frac{1}{2}(t - 4)\right) & t \in [4, 6] \\ \left(8 - t, \frac{1}{2}(8 - t)\right) & t \in [6, 8] \end{cases}$$

Altri esempi e parametrizzazioni in senso orario sono lasciate per esercizio. Si provi, ad esempio, a riparametrizzare come sopra, ma in modo tale che la velocità di percorrenza sia raddoppiata e sia dimezzata.
In generale, se si ha una curva

$$\eta : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

per percorrere il sostegno di η in senso opposto la maniera più semplice è quella di considerare la curva

$$\hat{\eta} : [a, b] \to \mathbf{R}^2, \qquad \hat{\eta}(t) := \eta(a + b - t).$$

Usando quindi questa espressione possiamo usare γ per trovare una parametrizzazione in senso orario

$$\gamma^{\circlearrowright}(t) = \gamma(8 - t) \qquad t \in [0, 8].$$

Per cui

$$\gamma^{\circlearrowright}(t) = \begin{cases} \big(8 - (8 - t), \frac{1}{2}(8 - (8 - t))\big) & t \in [0, 2] \\ \big(8 - (8 - t), \frac{1}{2}((8 - t) - 4)\big) & t \in [2, 4] \\ (8 - t, 0) & t \in [4, 8] \end{cases}$$

che riscritta è

$$\gamma^{\circlearrowright}(t) = \begin{cases} \big(t, \frac{1}{2}t\big) & t \in [0, 2] \\ \big(t, \frac{1}{2}(4 - t)\big) & t \in [2, 4] \\ (8 - t, 0) & t \in [4, 8]. \end{cases}$$

Soluzione 4.2 - Una parametrizzazione che ...

1. ... percorra il sostegno di γ in senso opposto è data (come visto nell'Esercizio 4.1) da

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b].$$

2. ... sia definita in $[0, 1]$ è

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma((1 - t)a + tb) = \gamma(a + t(b - a)).$$

   Si osservi che per fare ciò abbiamo sostanzialmente trovato un cambio di variabile σ dall'intervallo $[0, 1]$ all'intervallo $[a, b]$ e $\tilde{\gamma}$ non è altro che $\gamma \circ \sigma$.

3. ... sia definita in un generico intervallo $[c, d]$.
   Come si può intuire dal punto precedente, e come già visto nelle dispense di teoria, la prima cosa da fare è trovare una biiezione tra l'intervallo $[c, d]$ e l'intervallo $[a, b]$, la qual cosa può essere fatta cercando

due biiezioni più semplici da trovare, prima una tra $[c, d]$ e $[0, 1]$, poi una tra $[0, 1]$ e $[a, b]$. Due possibili biiezioni sono date dalle funzioni

$$\begin{aligned} \alpha &: [c, d] \to [0, 1], \qquad & \alpha(t) &= \frac{t-c}{d-c} \\ \beta &: [0, 1] \to [a, b], \qquad & \beta(s) &= (1-s)a + sb \end{aligned}$$

e quindi una possibile biiezione tra $[c, d]$ e $[a, b]$ è data da

$$\begin{aligned} \sigma(t) := \beta \circ \alpha(t) &= \left(1 - \frac{t-c}{d-c}\right) a + \frac{t-c}{d-c}\, b \\ &= a + (t-c)\,\frac{b-a}{d-c}. \end{aligned}$$

Una parametrizzazione definita in $[c, d]$ è quindi data da

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t)), \qquad t \in [c, d].$$

4. ... percorra a velocità diversa la curva è semplice nel caso in cui $a = 0$. In tal caso l'intervallo di definizione è $[0, b]$. Si fissi $v > 0$ e si consideri

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(vt) \qquad \text{con } t \in [0, b/v].$$

Nel caso dell'esercizio richiesto si sceglierà $v = 2$ e $v = 1/2$. Nel caso in cui $a \neq 0$ si può procedere così: si trasla prima l'intervallo nell'origine, si procede come nel caso precedente, poi si ritrasla in a. Si fanno quindi i tre passaggi:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 : [a, b] \to [0, b-a], & \alpha_1(t) &= t - a, \\ &\alpha_2 : [0, b-a] \to [0, (b-a)/v], & \alpha_2(t) &= t/v, \\ &\alpha_3 : [0, (b-a)/v] \to [a, (b-a)/v + a], & \alpha_3(t) &= t + a, \end{aligned}$$

si considerano le inverse

$$\begin{aligned} &\beta_1 : [0, b-a] \to [a, b], & \beta_1(s) &= s + a, \\ &\beta_2 : [0, (b-a)/v] \to [0, b-a], & \beta_2(s) &= vs, \\ &\beta_3 : [a, (b-a)/v + a] \to [0, (b-a)/v], & \beta_3(s) &= s - a, \end{aligned}$$

si definisce

$$\sigma(s) := \beta_1 \circ \beta_2 \circ \beta_3(s) = v(s-a) + a$$

ed infine

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sigma(s)) = \gamma(v(s-a) + a) \qquad \text{con } s \in [a, (b-a)/v + a].$$

Soluzione 4.3 - La curva che stiamo considerando è data dalla funzione $\gamma : [3/4, 4/3] \to \mathbf{R}^2$,

$$\gamma(x) = (x, \log x);$$

quindi siccome

$$\gamma'(x) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

troviamo che

$$L(\gamma) = \int_{3/4}^{4/3} |\gamma'(x)| dx = \int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx\,.$$

Per calcolare tale integrale un modo è il seguente: porre $x = \operatorname{senh} t$ in modo tale che

$$1 + x^2 = \cosh^2 t\,, \qquad dx = \cosh^t \, dt$$

e quindi infine

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \qquad \text{diventa} \qquad \int \frac{\cosh^2 t}{\operatorname{senh} t}\, dt\,.$$

Ponendo $y = e^t$ si ottiene che quest'ultimo integrale è

$$\frac{1}{2} \int \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{y^4 - y^2}\, dy\,.$$

Ora, scrivendo $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^4 - y^2) + (3y^2 + 1)$ si ottiene

$$\frac{y^4 + 2y^2 + 1}{y^4 - y^2} = 1 + \frac{3y^2 + 1}{y^4 - y^2} = 1 + \frac{ay + b}{y^2} + \frac{c}{y-1} + \frac{d}{y+1}\,,$$

che risolto fornisce $a = 0$, $b = -1$, $c = 2$, $d = -2$. Integrando si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{y^4 - y^2}\, dy &= \int \left[1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y-1} - \frac{2}{y+1}\right] dy = \\ &= y + \frac{1}{y} + 2\log|y-1| - 2\log|y+1| =: f(y). \end{aligned}$$

Ora si torna indietro: ricordiamo che per invertire $x = \operatorname{senh} t$ bisogna considerare l'uguaglianza

$$e^t = \cosh t + \operatorname{senh} t$$

per cui $e^t = \sqrt{1+x^2} + x$. Di conseguenza la primitiva cercata è

$$\frac{1}{2}\, f(\sqrt{1+x^2} + x)\,.$$

Soluzione 4.4 - La curva che stiamo considerando può essere espressa dalla funzione $\gamma : [0,2] \to \mathbf{R}^3$ data da

$$\gamma(x) = \left(x, x^2, \frac{2}{3}x^3\right).$$

Quindi si ottiene che $\gamma'(x) = (1, 2x, 2x^2)$, da cui

$$L(\gamma) = \int_0^2 (1+2x^2)dx = \frac{22}{3}.$$

Soluzione 4.5 - Il luogo dei punti che soddisfano $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ è quello disegnato in Figura 4.1. Valutando la derivata di γ si ottiene che in effetti per i valori $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$, corrispondenti rispettivamente ai punti $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, la curva non è regolare. Si ha

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t)$$

‘che ha modulo 0 per i valori di t sopra elencati. Il versore tangente si può

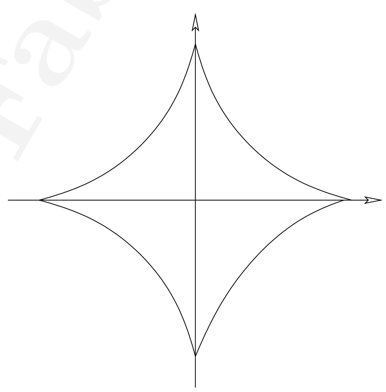


Figura 4.1:

trovare semplicemente dividendo $\gamma'(t)$ per il suo modulo $|\gamma'(t)|$. Valutiamo quindi il modulo:

$$|\gamma'(t)|^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t \qquad \Rightarrow \qquad |\gamma'(t)| = 3|\cos t \operatorname{sen} t| \,.$$

Si ha quindi che il vettore tangente τ è dato da

$$\tau(t) = \Big(\frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}, \frac{3\operatorname{sen}^2 t \cos t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}\Big) .$$

Nel primo quadrante, ad esempio, dove sia $\operatorname{sen} t$ che $\cos t$ sono positivi, si ha

$$\tau(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t) \,.$$

Derivando ulteriormente (ed eventualmente normalizzando nuovamente, ma in questo caso non è necessario perché la derivata di τ ha già norma 1) si ottiene il versore tangente ν

$$\nu(t) = \frac{d}{dt}\tau(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \,.$$

Valutare τ e ν anche negli altri quadranti.

Soluzione 4.6 - Per quanto riguarda la curva γ, se calcoliamo l'ascissa curvilinea si ha che

$$s_\gamma(t) = \int_0^t \sqrt{4e^{4\tau} + 4e^{2\tau} + 1}\, d\tau = e^{2t} + t - 1,$$

e quindi

$$L(\gamma) = s_\gamma(1) = e^2.$$

Per la curva β, si ha che l'ascissa curvilinea è data da

$$s_\beta(t) = \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + 16\tau + 4}\, d\tau = 2t^2 + 2t,$$

da cui

$$L(\beta) = s_\beta(1) = 4.$$

Per calcolare l'angolo ϑ tra le due curve nel punto $(1, 2, 0)$, bisogna prima di tutto calcolare i valori di t e s per i quali $\gamma(t) = \beta(s) = (1, 2, 0)$. Si trova che $t = 0$ mentre $s = 1$. Valutando $\gamma'(0)$ e $\beta'(1)$ ci si accorge che in realtà i due vettori sono paralleli e che

$$\beta'(1) = 2\gamma'(0)$$

per cui l'angolo tra le due rette tangenti è nullo.
Venendo alla parametrizzazione con l'ascissa curvilinea, nel primo caso non è possibile scrivere esplicitamente l'inversa della funzione $s_\gamma(t) = e^{2t} + t - 1$, mentre è possibile per la funzione $s_\beta(t) = 2t^2 + 2t$.
È sufficiente scrivere $2t^2 + 2t$ come $2(t + 1/2)^2 - 1/2$ per ottenere

$$t(s) = \sqrt{\frac{s}{2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, \qquad s \in [0, 4].$$

Soluzione 4.7 - Calcoliamo l'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = 2e^t - 2.$$

Quindi per poter riscrivere la curva in funzione di s, bisogna ricavarsi t e sostituire, cioè

$$\gamma(s) = \frac{s+2}{2} \left(\cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \operatorname{sen} \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \sqrt{2} \right).$$

Provare a verificare che $|\gamma'(s)| = 1$.

Soluzione 4.10 - L'arco di cicloide (si veda la Figura 4.2) può essere pensato come la curva tracciata nel piano da un punto fissato su un circonferenza che ruota sull'asse x (si pensi di fissare un punto sul copertone di una ruota di bicicletta che corre, il cui raggio è a, e di osservarne il movimento). La derivata è data da

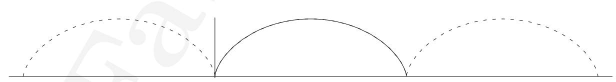


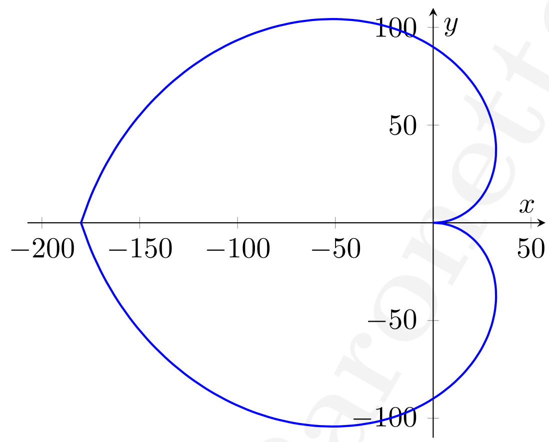
Figura 4.2:

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \qquad \dot{y}(t) = a \operatorname{sen} t .$$

Si noti che il puntino sulla ruota è fermo per un istante ogni giro ($t = 0$ e $t = 2\pi$ nel nostro caso, ma se la bicicletta prosegue per ogni $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$), mentre la componente y si ferma (si annulla $\dot{y}$) anche per $t = \pi$ (quando la ruota ha percorso mezzo giro). La lunghezza è data da

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(2 \operatorname{sen}^2 t/2)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t/2 dt = 8a.$$

Soluzione 4.11 - La curva ha il sostegno mostrato in figura.



La sua più semplice parametrizzazione è

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta\cos\vartheta, \vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \qquad \text{per } \vartheta \in [0,\pi]$$
$$\gamma(\vartheta) = ((2\pi-\vartheta)\cos\vartheta, (2\pi-\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \qquad \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi].$$

Si osserva che la curva è simmetrica rispetto all'asse x, per cui è sufficiente studiare la parte definita per $\vartheta \in [0,\pi]$. Derivando γ si ha

$$\gamma'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \mathrm{sen}\,\vartheta + \vartheta\cos\vartheta) \qquad \text{per } \vartheta \in [0,\pi].$$

Valutandone il modulo si ha

$$|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{1+\vartheta^2} \qquad (\text{solo per } \vartheta \in [0,\pi])$$

e analogamente

$$f(\gamma(\vartheta)) = \sqrt{1+\vartheta^2} \qquad (\text{solo per } \vartheta \in [0,\pi]).$$

Per simmetria (di f rispetto al sostegno della curva) si ha che

$$\int_\gamma f\,ds = 2\int_0^\pi (1+\vartheta^2)\,d\vartheta = 2\left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right).$$

Volendo svolgere tutti i calcoli si otterrebbe che

$$|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{1 + (2\pi - \vartheta)^2} \qquad \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi],$$
$$f(\gamma(\vartheta)) = \sqrt{1 + (2\pi - \vartheta)^2} \qquad \text{per } \vartheta \in [\pi, 2\pi],$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\, ds &= \int_0^\pi (1 + \vartheta^2)\, d\vartheta + \int_\pi^{2\pi} (1 + (2\pi - \vartheta)^2)\, d\vartheta = \\ &= \left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right) + \left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right)\end{aligned}$$

Soluzione 4.12 - Si ha che $\gamma(0) = \gamma(e) = (0,0)$, per cui la curva è chiusa. Per vedere che è semplice si osservi che, per $t \in [0,1]$ si ha

$$\gamma_1, \gamma_2 \qquad \text{crescenti}\,.$$

La stessa cosa vale per $t \in [1,e]$. Questo ci dice che i due archi (le restrizioni di γ ai due intervalli $[0,1]$ e $[1,e]$) $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ e $\gamma : [1,e] \to \mathbf{R}^2$ sono semplici, ma questo non basta a vedere che la curva γ è semplice. Per fare ciò si osservi che per $t \in [0,1]$ si ha

$$\gamma_1(t) < \gamma_2(t),$$

perché $t^{2/3} < t^{1/3}$, per cui la curva, per $t \in [0,1]$, descrive un arco, semplice, che unisce il punto $(0,0)$ al punto $(2,2)$ stando sopra la retta $x = y$ e toccandola solo in $(0,0)$ e in $(2,2)$. Per $t \in (1,e]$ poiché le componenti sono uguali la curva ha come immagine un segmento sulla retta $x = y$ (il segmento che unisce il punto $(2,2)$ al punto $(0,0)$).
Volendo applicare la definizione ci si chiede se per caso esistono $t \in (0,1)$ ed $s \in (1,e)$ tali che

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(s) \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = \gamma_2(s).$$

Poiché $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ ciò significa che

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \qquad \text{cioè } t^{2/3} = t^{1/3},$$

ma ciò è impossibile per $t \in (0,1)$.

Soluzione 4.14 - La curva è data da

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta \cos\vartheta, \vartheta \operatorname{sen}\vartheta).$$

Il modulo di γ' è dato da $\sqrt{1+\vartheta^2}$ e

$$f \circ \gamma(\vartheta) = \sqrt{\frac{\vartheta^2 \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}} = \sqrt{1+\vartheta^2}\,.$$

Per cui l'integrale si riduce a calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} (1+\vartheta^2)\, d\vartheta = 2\pi + 8\pi^3/3$.

Soluzione 4.15 - Passando alle coordinate polari si può scrivere la curva come

$$\rho^2(\rho^2 - 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)) = 0\,.$$

Da ciò si deduce immediatamente che l'origine fa parte del sostegno della curva, da cui il punto di minima distanza dall'origine è l'origine stessa. Dall'uguaglianza di sopra si deduce che, una volta eliminata l'origine, i punti del sostengo della curva devono soddisfare

$$\rho^2 - 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta) = 0\,,$$

cioè

$$\rho^2 = 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\,, \tag{4.1}$$

che avrà senso solo quando la quantità a destra non è negativa, cioè solo per

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{oppure per} \quad \vartheta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\,.$$

Poiché $\rho(x,y)$ rappresenta proprio la distanza dall'origine del punto (x,y) per trovare tali punti basterà massimizzare, al variare di ϑ, la quantità $\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}$ che è massima dove è massima la funzione

$$f(\vartheta) := \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta\,.$$

Derivando si ottiene

$$f'(\vartheta) := -4\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta$$

che si annulla per

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \pi, \quad \vartheta = \frac{3\pi}{2}\,.$$

La distanza dall'origine è quindi massima in corrispondenza a $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ che corrispondono ai due punti

$$(\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad (0, \sqrt{2})\,.$$

A questo punto verificare che Γ è compatta è immediato: è il sostegno di una curva continua, e quindi è chiusa, è limitata perché la sua massima distanza dall'origine è $\sqrt{2}$.

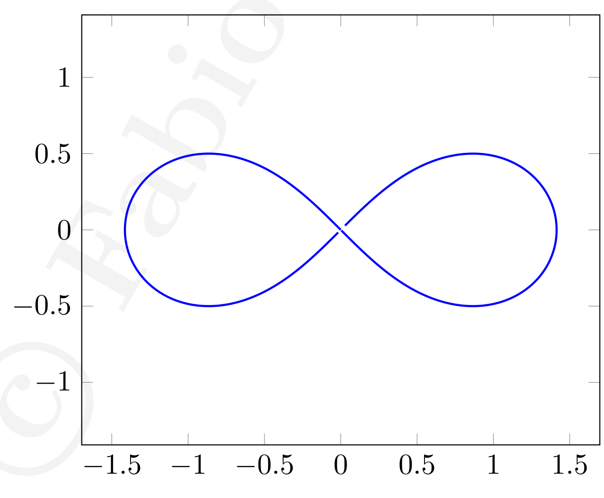
Per completezza vediamo di disegnare il sostegno della curva, anche se il testo dell'esercizio non lo richiedeva esplicitamente: la curva espressa da (4.1) può facilmente essere parametrizzata nel modo seguente

$$\gamma(\vartheta) = \left(\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\cos\vartheta, \sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\operatorname{sen}\vartheta\right)$$
$$\text{fintanto che} \quad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

il cui sostegno è la parte della curva in figura nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 0\}$; la stessa parametrizzazione con il parametro in un altro intervallo, cioè

$$\gamma(\vartheta) = \left(\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\cos\vartheta, \sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\operatorname{sen}\vartheta\right)$$
$$\text{fintanto che} \quad \vartheta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

ha come sostengo la parte della curva in figura nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leqslant 0\}$.



Soluzione 4.16 - La curva può essere parametrizzata con

$$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + 2)\,.$$

Soluzione 4.17 - Una volta considerata la parametrizzazione

$$\gamma(\vartheta) = \vartheta \mapsto (\cos^2\vartheta, \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta)$$

si verifica facilmente che è già parametrizzata con il parametro d'arco e la sua lunghezza è π.
Per calcolare la minima e la massima distanza dei punti del sostegno di tale curva dal punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ basta valutare

$$\begin{aligned}\left(\cos^2\vartheta\ -\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta = \\ = \cos^4\vartheta + \frac{1}{4} + \cos^2\vartheta\left(\operatorname{sen}^2\vartheta - 1\right) = \\ = \cos^4\vartheta + \frac{1}{4} + \cos^2\vartheta\left(\cos^2\vartheta\right) = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Essendo la distanza di tutti i punti del sostegno di γ costante si conclude che il sostegno di γ è una circonferenza o un arco di circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$. Poiché la sua lunghezza è π concludiamo che è una circonferenza.

Soluzione 4.18 - Una possibile (e la più semplice) parametrizzazione è data da

$$\gamma(t) = \left(t, t, \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}}\right) \qquad t \in [-1, 1]. \tag{4.2}$$

Calcoliamo il modulo di γ':

$$\gamma'(t) = \left(1, 1, \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}\right)$$

da cui

$$|\gamma'(t)|^2 = 2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 + \left(e^t - e^{-t}\right)^2}{2} = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}{2}$$

Per valutare la retta tangente alla curva nel punto richiesto è sufficiente considerare $t = 1/2$ nella parametrizzazione (4.2) e valutare γ' in $1/2$. Una possibile forma parametrica della retta è

$$r(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right) + t\left(1, 1, \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{t} \left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right)\, d\tau = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{t} \left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right)\, d\tau = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{t} - e^{-t} - e^{-1} + e\right] .
\end{aligned}
$$

Se ne deduce che la lunghezza di γ è data da

$$l(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\, e - \frac{\sqrt{2}}{e} .$$

Provando ad invertire l'espressione che definisce s (domanda facoltativa a richiesta) si ha:

$$e^{t} - e^{-t} = s(t) + e^{-1} - e$$

da cui

$$\operatorname{senh} t = \frac{1}{2} \left[s(t) + e^{-1} - e\right] .$$

Poiché si hanno

$$\operatorname{senh} t + \cosh t = e^{t} \qquad \text{e} \qquad \cosh^{2} t - \operatorname{senh}^{2} t = 1$$

si ricava che

$$
\begin{aligned}
t &= \log(\operatorname{senh} t + \cosh t) = \log\left(\operatorname{senh} t + \sqrt{1 + \operatorname{senh}^{2} t}\right) = \\
&= \log\left(\operatorname{senh} t + \sqrt{1 + \operatorname{senh}^{2} t}\right)
\end{aligned}
$$

da cui

$$t(s) = \log\left(\frac{s + e^{-1} - e}{2} + \sqrt{1 + \frac{(s + e^{-1} - e)^{2}}{4}}\right)$$

Soluzione 4.21 - Data una curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$, una prima osservazione da fare è che se γ racchiude una regione di area massima, allora tale regione deve essere convessa (se non lo fosse, se cioè ci fosse una regione di non convessità, si potrebbe 'tappare' tale regione convessificando l'insieme, operazione che aumenterebbe l'area della regione senza aumentare il diametro dell'insieme). Quindi, se la regione è convessa, ogni punto della curva vede ogni altro punto della curva stessa; possiamo quindi porre un sistema di coordinate centrate in un punto O della curva stessa in cui l'asse y è tangente alla curva e l'asse x è perpendicolare alla curva, diretto verso l'interno della curva. Scrivendo quindi la curva usando coordinate polari centrate in tale punto O, otterremmo

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

con $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e a ϑ fissato, il raggio ϱ varia tra 0 e un certo raggio $\varrho(\vartheta)$. Otteniamo quindi per l'area che

$$A(\gamma) = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\varrho(\vartheta)} \varrho d\varrho d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho(\vartheta)^2}{2} d\vartheta.$$

A questo punto notiamo che l'integrale possiamo restringerlo a $\vartheta \in [0, \pi/2]$, se oltre a $\varrho(\vartheta)^2$ consideriamo anche $\varrho(\vartheta - \pi/2)^2$, e notare infine che $\varrho(\vartheta)$ e $\varrho(\vartheta - \pi/2)$ sono i due cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha estremi che stanno sulla curva, e quindi la sua lunghezza è minore del diametro dell'insieme, cioè

$$\varrho(\vartheta)^2 + \varrho(\vartheta - \pi/2) \leqslant (\operatorname{diam}(\gamma))^2 \leqslant 4.$$

In definitiva, troviamo che

$$A(\gamma) \leqslant \pi$$

e π rappresenta l'area del cerchio di diametro 2.