ANGOLI DI EULERO - corpo rigido con pto fisso (possono essere usati anche rispetto c.m.)

Consideriamo una terna fissa $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$

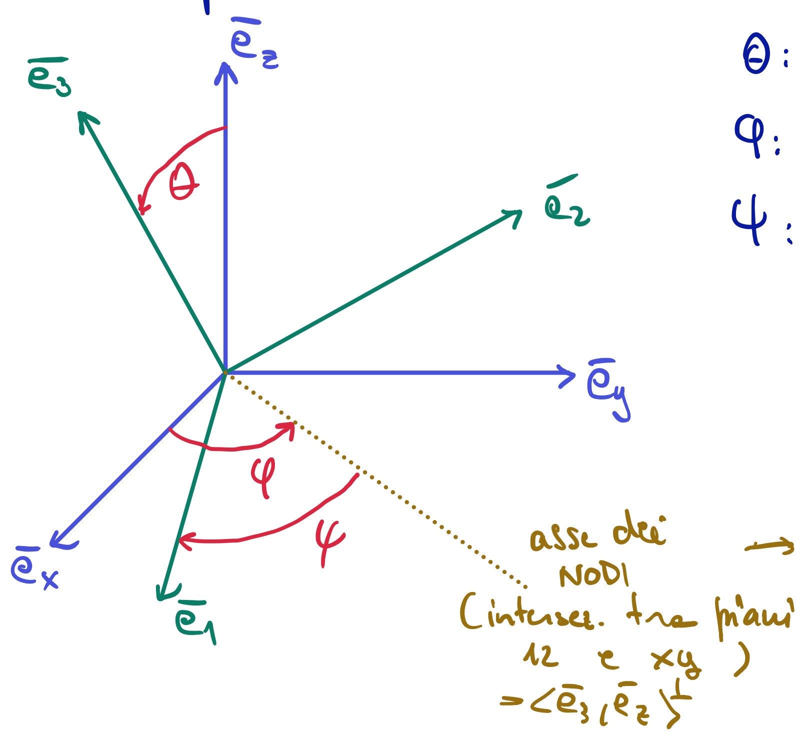
La config. del corpo rigido è data da come si dispone una terna solidale $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ rispetto alla terna fissa $\Rightarrow$ qta è data da una ROTAZIONE $\in SO(3)$

$\Longrightarrow$ sp. delle config. di un corpo rigido con pto fisso è

$$Q = SO(3)$$

(se non c'è pto fisso $Q = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{posizione del c.m.}} \times SO(3)$)

Vediamo come parametrizzare Q. Si usano gli ANGOLI d'EULERO



θ: angolo tra $\bar{e}_3$ e $\bar{e}_z$ (nutazione)

φ: angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_x$ (precessione)

ψ: angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_1$ (rotazione propria)

$\rightarrow \bar{n} = \cos\varphi\, \bar{e}_x + \sin\varphi\, \bar{e}_y$

$e_x\, e_y, e_z$: terna FISSA
$e_1\, e_2\, e_3$: terna SOLIDALE al corpo rigido

θ, φ, ψ determinano una rotaz. in $SO(3)$ (che manda $e_{xyz} \to e_{123}$)

Ogni angolo determina una rotazione indipendente.

$\downarrow$

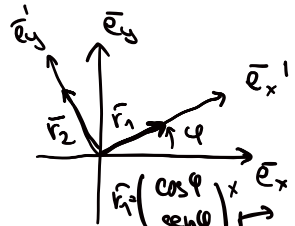
Si parta con le terne sovrapposte:

1) si tenga $\bar{e}_3 = \bar{e}_z$ e si ruoti di angolo φ portando $\bar{e}_1$ a coincidere con l'asse dei nodi $\bar{n}$. (R_φ)
2) Si tenga fisso $\bar{e}_1$ e si ruoti di angolo θ. (R_θ)
3) Si tenga fisso $\bar{e}_3$ e si ruoti di angolo ψ. (R_ψ)

Individuiamo s.d.r. intermedi (SI VEDA DISEGNO NELLA PAGINA SUCCESSIVA)

$$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z \xrightarrow{\varphi} \bar{e}_x', \bar{e}_y', \bar{e}_z' \xrightarrow{\theta} \bar{e}_x'', \bar{e}_y'', \bar{e}_z'' \xrightarrow{\psi} \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$$

Prendiamo vettore colonna $\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (x, y, z componenti in base $\bar{e}_x \bar{e}_y \bar{e}_z$)



$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}_{x,y} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{x',y'}$$

$$\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Componenti in base $\bar{e}_x' \bar{e}_y' \bar{e}_z'$ sono date da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora passiamo a s.d.r. $\bar{e}_x'', \bar{e}_y'', \bar{e}_z''$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Infine andiamo a $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

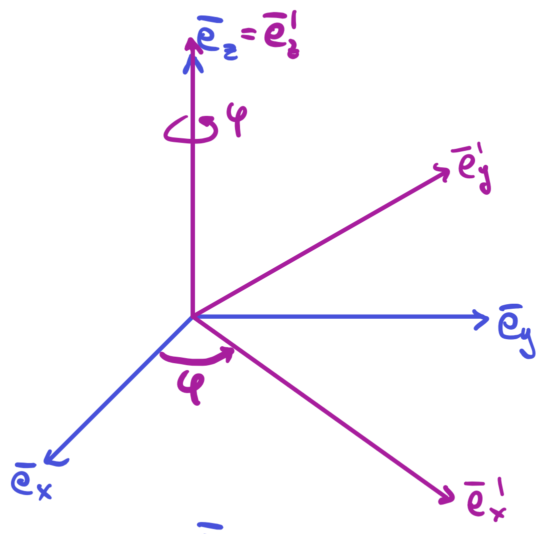
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\psi R_\theta R_\varphi = R_\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

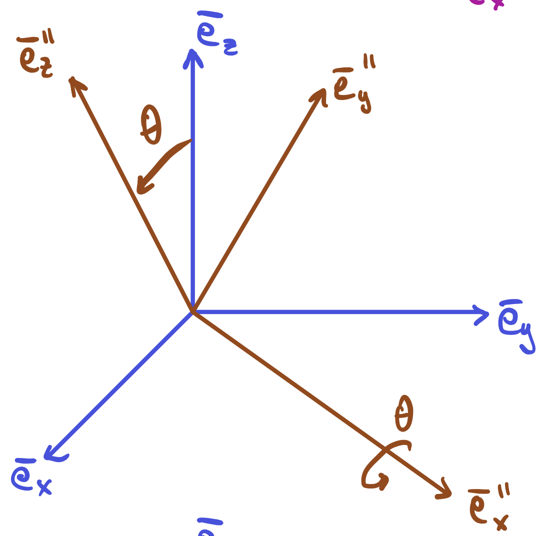
$\equiv R_{\psi\theta\varphi}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

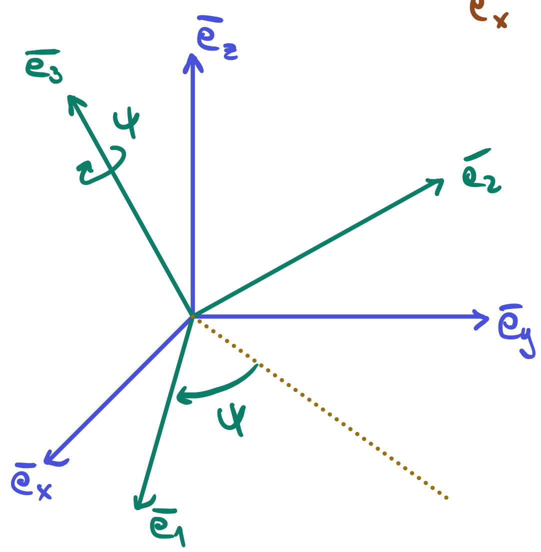
La trasf. inversa è data dalla trasposta, essendo tale matrice una matrice di $SO(3)$ $(OO^T = O^TO = \mathbb{1})$.



Rotazione di angolo φ attorno a $\bar e_z' = \bar e_z$.
(R_φ)



Rotazione di angolo θ attorno a $\bar e_x'' = \bar e_x'$
(R_θ)



Rotazione di angolo ψ attorno a $\bar e_3 = \bar e_z''$
(R_ψ)

Osservazione: C'è un altro modo semplice per capire come gli angoli θ, φ, ψ determinano come sono messi i vettori $e_{1,2,3}$ rispetto alla base $e_{x,y,z}$:

- θ e φ determinano univocamente $\bar e_3$ (coord. polari);
- $\bar e_1$ ed $\bar e_2$ stanno su piano $\perp \bar e_3$, su cui giace anche asse dei nodi: l'angolo ψ mi dice dove sta $\bar e_1$, e quindi anche $\bar e_2 \perp \langle \bar e_1, \bar e_3 \rangle$.

Siamo ora in grado di calcolare le componenti di $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$:

Prendiamo come esempio $\bar{e}_1$: le sue componenti nella base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sono $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; per ottenere le componenti nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ dobbiamo applicare $R^{-1}_{\varphi\theta\psi}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = R^{T}_{\varphi\theta\psi}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Qto restituisce la prima riga della matrice $R_{\varphi\theta\psi}$. Lo stesso si può fare per $\bar{e}_2$ e $\bar{e}_3$.

Otteniamo quindi $\dot{\bar{e}}_i$ facendo le 'derivate temporali' di qte componenti, il che ci permette di calcolare $\bar{\omega}$ dalla formula

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\sum_i \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i \rightsquigarrow \bar{\omega} \text{ in s.d.r. } \bar{e}_x \bar{e}_y \bar{e}_z .$$

Per avere $\bar{\omega}$ in s.d.r. $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ basta applicare $R_{\varphi\theta\psi}$

Facendo questo, otteniamo :

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\bar{e}_1 + (\dot{\varphi}\,\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\psi)\bar{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\bar{e}_3$$

Qto è un conto lungo. Si può procedere diversamente:

Riprendiamo eq. $\dot{\bar{u}} = \bar{\omega} \times \bar{u}$:

$$\dot{u}_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\omega_j\,u_k = \sum_k \Big(\sum_j \epsilon_{ijk}\omega_j\Big) u_k \equiv \Omega_{ik} u_k$$

con $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ ← determinata da 3 parametri

$\rightarrow$ possiamo quindi scrivere $\quad \dot{\bar{u}} = \Omega \bar{u} \quad (*)$

dove Ω è una matrice 3×3 ANTISIMMETRICA

La $(*)$ ci dice che in un tempo infinitesimo δt, $\bar{u}(t)$ varia come

$\bar{u} \mapsto \bar{u} + \delta \bar{u}$ con $\delta \bar{u} = \Omega \bar{u}\, \delta t$.

Cioè, in un tempo δt, il vettore ruota di un angolo infinitesimo $|\bar{\omega}|\delta t$ attorno all'asse $\bar{\omega}$.

Se componiamo due rotazioni $R_1 = 1 + \Omega_1$ $\quad R_2 = 1 + \Omega_2$

$$R_1 R_2 = 1 + (\underbrace{\Omega_1 + \Omega_2}_{})$$

matrice relativa a $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$

$\Downarrow$

Scomponiamo $\bar{\omega} = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_B$; allora $\Omega = \Omega_A + \Omega_B$

ciò vuol dire scomporre rotaz. infinitesima attorno a $\bar{\omega}$ di angolo $|\bar{\omega}|\delta t$ in una rotaz. infinitesima attorno a $\bar{\omega}_A$ di angolo $|\bar{\omega}_A|\delta t$ e una attorno $\bar{\omega}_B$ di angolo $|\bar{\omega}_B|\delta t$

Tornando alla trottola.

Un $\bar{\omega}$ generica può essere scomposta come $\quad$ ($\bar{e}_z, \bar{n}, \bar{e}_3$ sono genericam. vett. indipendenti.)

$$\bar{\omega} = \omega_\varphi \bar{e}_z + \omega_\theta \bar{n} + \omega_\psi \bar{e}_3$$

Cioè variazione di terna solidale alla trottola si scompone in una rotaz. infinitesima $\omega_\varphi \delta t$ attorno a $\bar{e}_z$, di $\omega_\theta \delta t$ attorno a $\bar{n}$ e di $\omega_\psi \delta t$ attorno a $\bar{e}_3$.

(Queste rotaz. non commutano fra loro, ma a livello infinitesimo è irrilevante).

Viste le cordinate scelte, gli angoli saranno rispettivamente $\dot{\varphi}\,\delta t$, $\dot{\theta}\,\delta t$ e $\dot{\psi}\,\delta t$ $\Longrightarrow$

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{e}_z + \dot{\theta}\,\bar{n} + \dot{\psi}\,\bar{e}_3$$

Per scrivere le componenti del vett. $\bar{\omega}$ nel s.d.r. $e_1 e_2 e_3$, ci serve sapere le comp. di $\bar{e}_z$, $\bar{n}$ e $\bar{e}_3$ in tale base.

$\longrightarrow$ dobbiamo applicare $R_{\psi\theta\varphi}$ alle loro comp. nel s.d.r. $e_x e_y e_z$

dove
$$R_{\psi\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nella base $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$

$$\bar{e}_z = R_{\psi\theta\varphi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\\ \operatorname{sen}\theta\cos\psi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = R_{\psi\theta\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\cos^2\varphi\cos\psi} - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} + \underline{\operatorname{sen}^2\varphi\cos\psi} + \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} \\ -\underline{\cos^2\varphi\operatorname{sen}\psi} - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi} - \underline{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\psi} + \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi} \\ \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta} - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\psi\\ -\operatorname{sen}\psi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{e}_z + \dot{\theta}\,\bar{n} + \dot{\psi}\,\bar{e}_3 = (\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\bar{e}_1 + (\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi)\,\bar{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\bar{e}_3 \qquad (*)$$

Ora possiamo calcolare l' ENERGIA CINETICA rotazionale del corpo rigido (attorno pto fisso, o c.m.)

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

Siccome T è uno scalare, posso calcolarlo in un qualsiasi sist. di rif. ortonormale come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{I}_{ij} \omega_i \omega_j$$

Di solito conviene scegliere s.d.r. solidale $e_1 e_2 e_3$ lungo gli assi principali d'inerzia. In qto caso, in qto s.d.r.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \qquad \text{dove} \quad \bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$$

Osservazione : Quando $\mathcal{I}_{ij}$ sono le componenti di $\mathcal{I}$ rispetto una base solidale, esse sono costanti (cioè non dipendono da come il corpo si muove nello spazio). Per qto motivo è utile sapere le componenti di $\bar{\omega}$ rispetto alla base solidale, così in $\bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \sum_{ij} \omega_i \mathcal{I}_{ij} \omega_j$ $\mathcal{I}_{ij}$ sono dei numeri caratteristici del corpo rigido.