

Esercizi - Sistemi dinamici lineari

Esercizio 1 Risolvere il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

con dato iniziale $x(0) = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$.

Esercizio 2 Risolvere il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Esercizio 3 Disegnare il ritratto di fase per i sistemi dinamici lineari con matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 Calcolare l'esponenziale della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

decomponendola come la somma di una matrice semi-semplice e una matrice nilpotente.

Esercizio 5 Considerate la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Introduciamo $\tau = \text{Tr}A = \lambda_+ + \lambda_-$ e $\delta = \det A = \lambda_+ \lambda_-$ in funzione degli autovalori λ_{\pm} . Si consideri nel piano (τ, δ) la parabola di equazione $\tau^2 - 4\delta = 0$. Si classifichino i sistemi dinamici planari in base alla loro posizione nel piano (τ, δ) . In particolare notate che $\tau^2 - 4\delta < 0$ corrisponde al caso di due autovalori complessi (con parte immaginaria non nulla) $\tau^2 - 4\delta = 0$ corrisponde al caso di due autovalori reali ripetuti e $\tau^2 - 4\delta > 0$ corrisponde al caso di due autovalori reali e distinti. Al variare del segno di τ e δ si ritrovi la classificazione fatta in classe (sella, pozzo, sorgente, centro, pozzo spirale e sorgente spirale)

Esercizio 6 Risolvere il sistema dinamico con matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$