

TRASFORMAZIONI CANONICHE

In un sist. Hamiltoniano, lo STATO è dato da un pto nello SPAZIO DELLE FASI, individuato dalle coord. (\bar{p}, \bar{q}) .

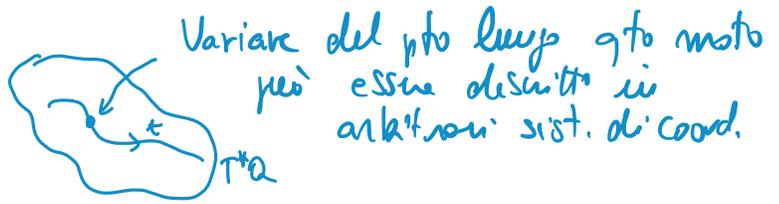
Il MOTO di qto punto nello spazio delle fasi descrive come evolve lo stato del sistema

Un SISTEMA HAMILTONIANO è tale se esiste un sistema di coordinate $(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$, dette COORDINATE CANONICHE, t.c. le equazioni del moto (eq. nelle incognite $p_1(t), \dots, p_m(t), q_1(t), \dots, q_m(t)$) hanno la semplice forma delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = - \frac{\partial H}{\partial q_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \\ \dot{q}_h(t) = \frac{\partial H}{\partial p_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \end{cases} \quad h=1, \dots, m \quad \text{e } H: \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R} \text{ detta HAMILTONIANA}$$

Le funzioni $\bar{p}(t)$ e $\bar{q}(t)$ descrivono il moto, nel senso che ad ogni t associamo un set di numeri (p_1, \dots, q_m) che individuano un pto nello sp. delle fasi T^*Q . Al variare di t questo punto cambia.

Lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse coord. per tale pto, per es. (\tilde{p}, \tilde{q}) .



In qto sist. di coord. il moto è dato dalle funzioni $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$.

Se la trasf. di coord. è

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t),$$

allora deve valere $p(t) = u(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \quad q(t) = v(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$.

Domanda: le equazioni differenziali che $\tilde{p}_h(t)$ e $\tilde{q}_h(t)$ ($h=1, \dots, m$) soddisfano, sono ancora nella FORMA DI EQ. DI HAMILTON?

→ qta domanda equivale a chiedersi se esiste una funzione hamiltoniana $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. le funt. $\tilde{p}_h(t), \tilde{q}_h(t)$ soddisfano le eq. diff.

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad h=1, \dots, m$$

Se qto accade, la trasf. di coord. (tra due set di COORDINATE CANONICHE) è detta **TRASFORMAZIONE CANONICA**.

ESEMPIO di trasformazione NON-canonica.

Consideriamo la seguente trasf. di coord nello spazio delle fasi:

$$p = \tilde{p} \cos \tilde{q} \quad (*)$$

$$q = \frac{\tilde{p}}{m\omega} \sin \tilde{q}$$

dove (p, q) sono coord. canoniche. Lo sono anche (\tilde{p}, \tilde{q}) ?

Consideriamo la PARTICELLA LIBERA con $H = \frac{p^2}{2m}$;

le eq. di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 0 \\ \dot{q}(t) = \frac{p(t)}{m} \end{cases} \quad (**)$$

Vediamo quali sono le eq. che le funz. $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ soddisfano, tenuto conto che esse sono legate alle funz. $p(t), q(t)$ da

$$p(t) = \tilde{p}(t) \cos \tilde{q}(t)$$

$$q(t) = \frac{\tilde{p}(t)}{m\omega} \sin \tilde{q}(t)$$

Facciamo le derivate temporali di entrambi i lati.

$$\dot{p} = \dot{\tilde{p}} \cos \tilde{q} - \tilde{p} \dot{\tilde{q}} \sin \tilde{q}$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{\tilde{p}}}{m\omega} \sin \tilde{q} + \frac{\tilde{p} \dot{\tilde{q}}}{m\omega} \cos \tilde{q}$$

Siccome p, q soddisfano (**), le \tilde{p}, \tilde{q} soddisfano

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} \cos \tilde{q} - \tilde{p} \dot{\tilde{q}} \sin \tilde{q} = 0 \\ \frac{\dot{\tilde{p}}}{\omega} \sin \tilde{q} + \frac{\tilde{p} \dot{\tilde{q}}}{\omega} \cos \tilde{q} = \tilde{p} \cos \tilde{q} \end{cases}$$

← sist. lineare in incognite $\dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}$

Risolviamo il sist. lin. e troviamo le eq.:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \omega \tilde{p} \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} = \omega \cos^2 \tilde{q} \end{cases} \quad (*)$$

Se \tilde{p}, \tilde{q} sono buone coord. canoniche, allora (*) potranno essere scritte nella forma di eq. di Hamilton, cioè \exists funt. $K(\tilde{p}, \tilde{q})$ t.c.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \end{cases}$$

Qto avviene se $\exists K(\tilde{p}, \tilde{q})$ t.c.

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \stackrel{?}{=} -\omega \tilde{p} \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \stackrel{?}{=} \omega \cos^2 \tilde{q} \end{cases}$$

Se qto avviene bisogna che si verifichi la condizione

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \right) = -\cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \right) = -2\omega \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} \end{cases}$$

$\neq \Rightarrow \nexists K$ t.c. (*)

passano essere portate nella forma di eq. di Hamilton



La trasf. di coord. (0)
NON è canonica!

ESEMPIO di trasformazione CANONICA

$$p_n = \alpha \tilde{p}_n$$

$$q_n = \beta \tilde{q}_n$$

Le eq. in (p, q) sono $\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}(p, q)$ $\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}(p, q)$

\Rightarrow Le eq. diff. in (\tilde{p}, \tilde{q}) sono

$$\dot{\tilde{p}}_n = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_n}(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q}) \quad \dot{\tilde{q}}_n = \frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_n}(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q})$$

I termini a destra dell'uguale sono scrivibili come

$$-\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_n}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_n}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad \text{per qualche } K(\tilde{p}, \tilde{q})?$$

La risposta è sì \checkmark

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha \tilde{p}, \beta \tilde{q}) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \exists \text{ un tale } K \\ \checkmark \text{ scelta di } H \end{array}$$

\Rightarrow La trasformazione è CANONICA.

TRASF. CANONICHE.

Scriviamo la transf. di coord. nello sp. delle fasi:

$$(*) \begin{cases} p_n = u_n(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_n = v_n(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases} \equiv \tilde{p}, \tilde{q} \quad (\text{notazione semplificata})$$

← coord. note p e q si mescolano

Nella notazione compatta:

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) \quad \leftarrow \text{anche scritta a volte } x_i(\tilde{x}, t)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} \quad \text{ha det} \neq 0$$

Def. La transf. di coord. (*), regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prenda H un'Hamiltoniana $H(p, q, t)$, ESISTE SEMPRE una funzione $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c.

se le eq. del moto nelle coord. (p, q) assumono la forma di eq. di Ham. per H , cioè

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad h=1, \dots, n \quad (\neq)$$

ALLORA anche le eq. del moto nelle nuove coord. assumono la forma di eq. di Ham. con Hamiltoniana K :

$$\dot{\tilde{p}}_k = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_k} \quad \dot{\tilde{q}}_k = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_k} \quad k=1, \dots, n \quad (o)$$

Le soluzioni di (\neq) e (o) sono collegate dalla transf. (*):

$$\begin{cases} p_n(t) = u_n(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \\ q_n(t) = v_n(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \end{cases}$$

soluz. di (\neq) soluz. di (o)

H e K si dicono
CANONICAMENTE
CONIUGATE

Trasf. canoniche nel formalismo compatto

Consideriamo la trasf. di coord. nello spazio delle fasi data da

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) \quad \bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$$

↳ trasf. inverse $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$, cioè

$$\begin{cases} w(\tilde{w}(x, t), t) = x \\ \tilde{w}(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x} \end{cases}$$

Se il moto in T^*Q è descritto dalle funz.

$$x_i(t) \quad i=1, \dots, 2m$$

nelle coord. x , allora nelle coord. \tilde{x} sarà descritto dalle funzioni

$$\tilde{x}_j(t) = \tilde{w}_j(x(t), t)$$

equivalentemente:

$$x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$$

Da qta espressione, si può ricavare una relaz. tra le derivate $\dot{x}(t)$ e $\dot{\tilde{x}}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2m} \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_i}}_{\tilde{J}_{ji}} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}$$

\tilde{J}_{ji} (Jacobiano delle trasf. di coord.)

↑ analogamente

$$\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_l} = J_{ml} \quad \text{con} \quad \sum_l J_{ml} \tilde{J}_{lj} = \delta_{mj}$$

$$\text{cioè} \quad \tilde{J} = J^{-1}$$

Ora, se $x(t)$ soddisfa l'eq. diff. $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t)$,

allora

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2m} \tilde{J}_{ji}(x(t), t) f_i(x(t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(x(t), t)$$

usando $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$, posso scrivere una rel. tra $\dot{\tilde{x}}(t)$ e $\tilde{x}(t)$, cioè un'eq. diff. 1° ord in la funzione $\tilde{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \tilde{J}_{ji}(w(\tilde{x}(t), t), t) f_i(w(\tilde{x}(t), t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(w(\tilde{x}(t), t), t)$$

Diciamo ora che x_i sono buone coord. canoniche, cioè le eq. diff. del moto sono nella forma

$$\dot{x}_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} \rightarrow f_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l}$$

Allora

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_{i,l} \tilde{J}_{ji} E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} \quad (*)$$

↳ in forma vettoriale $\dot{\tilde{x}} = \tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$

La transf. è **CANONICA** se anche le nuove coord. \tilde{x}_i sono buone coordinate canoniche, cioè se $\exists K(\tilde{x}, t)$ t.c. le eq. del moto nelle coord \tilde{x} sono nella forma

$$\dot{\tilde{x}} = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K \quad (**)$$

Confrontando (*) con (**) si vede che la transf. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è canonica se $\exists H, \exists K$ t.c.

$$\tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K$$

Espressa per bene con tutti gli argomenti espliciti:

$$\tilde{J}(w(\tilde{x}, t), t) E \bar{\nabla}_x H(w(\tilde{x}, t), t) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t) = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K(\tilde{x}, t)$$

In particolare possiamo prendere $H=0$. Allora se la transf. è canonica $\exists K_0(\tilde{x}, t)$ t.c.

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t) = \epsilon \nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t)$$

Cioè K_0 è l'Hamiltoniana coniugata all'Hamiltoniana nulla.

Esempi di transf. canoniche

$$1) \quad p_n = \tilde{p}_n + a_n \quad q_n = \tilde{q}_n + b_n \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(\tilde{p} + a, \tilde{q} + b, t)$$

\uparrow const. \uparrow const.
 $\underbrace{\hspace{10em}} \equiv u_n(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$

$$2) \quad p_n = \alpha \tilde{p}_n \quad q_n = \beta \tilde{q}_n \quad \alpha, \beta \neq 0 \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde{p}, \beta\tilde{q}, t)$$

$$3) \quad p_n = \tilde{p}_n \quad q_n = \tilde{q}_n + \alpha t \tilde{p}_n \quad K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

↳ Es. particella libera $\left. \begin{array}{l} \alpha = 1/m \\ \downarrow \\ K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m} \tilde{p}^2 = 0 \end{array} \right\}$

$$H(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$$

→ eq. di Ham. relative a K :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_n &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_n} = 0 & \Rightarrow & \tilde{p}_n(t) = \tilde{p}_n^{(0)} \\ \dot{\tilde{q}}_n &= +\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_n} = 0 & \Rightarrow & \tilde{q}_n(t) = \tilde{q}_n^{(0)} \end{aligned}$$

→ usando la transf. di coord.

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \tilde{p}_n^{(0)} \\ q_n(t) &= \tilde{q}_n^{(0)} + t \frac{\tilde{p}_n^{(0)}}{m} \end{aligned}$$

4) Invece la transf. di coord.

$$p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \quad q = \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}$$

è canonica con $K = H(\sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}, t)$.

5) Trasformazioni PUNTOALI ESTESE

$$Q_h = v_h(\tilde{q}, t) \quad (\text{non dip. da } \tilde{p})$$

$$P_h = \underbrace{\sum_{k=1}^M \tilde{P}_k \frac{\partial v_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t)} \quad (\text{non-generica})$$

Vediamo qual è la forma generale delle nuove Hamiltoniane.

Prop. Se la trasf. è CANONICA, allora $\exists c$ (dipendente al più dal tempo t) t.c.

$$K(\tilde{x}, t) = c \tilde{H}(\tilde{x}, t) + K_0(\tilde{x}, t) \quad (*)$$

dove:

- $\tilde{H}(\tilde{x}, t) \equiv H(w(\tilde{x}, t), t)$

- K_0 è t.c. $\text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t)$

[K_0 è l'Hamiltoniana convolta ad $H=0$ ed è non-banale quando la trasf. canonica dip. da t esplicita.]

Dim. *trasf. canonica per ipotesi*

$$\text{E } \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} \text{E } \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \tilde{E}^{-1} \text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T (\tilde{J}^T)^{-1} \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} =$$

$$\stackrel{\tilde{E}^{-1}=\text{E}}{=} -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} + \text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0$$

se trasf. è canonica, $\exists K_0$ t.c. $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \text{E } \nabla_{\tilde{x}} K_0$

$$\rightarrow \sum_j \tilde{J}_{ij}^T \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = \nabla_{\tilde{x}} (K - K_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} \text{ è IRROTAZIONALE } \forall \tilde{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\text{E } \tilde{J} \text{E } \tilde{J}^T = c \mathbb{1}_{2n} \Rightarrow \nabla_{\tilde{x}} (K - c \tilde{H} - K_0) = 0$$

\uparrow Lemma 4 (vedi ultime pagine)

$$\Rightarrow K = c \tilde{H} + K_0 \quad (\text{a meno di una cost. irrilevante}).$$

Riassunto:

Data transf. coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ e

sue inverse $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$,

qta è CANONICA se $\forall H(x, t)$, $\exists K(\tilde{x}, t)$ t.c.

se $x(t)$ soddisfa $\dot{x} = E \nabla_x H$, allora

$\tilde{x}(t) = \tilde{w}(x(t), t)$ soddisfa $\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K$

Qto avviene quando $\exists K$ t.c.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

$$\text{dove } \tilde{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}$$

Qto $K(\tilde{x}, t)$ prende la forma

$$K = c \tilde{H} + K_0$$

con c cost., $\tilde{H} = H \circ w$, K_0 Ham. costante a $H=0$.

Come si fa a capire se una transf. è
canonica (senza applicare la def.)?



CRITERI di CANONICITA'

Possiamo ora dimostrare il primo CRITERIO di CANONICITA' :

Prop. La trasf. di coordinate $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$
 è CANONICA $\iff \exists c \neq 0$ t.c. $J E J^T = c E$
 con $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

Dim. m. \Rightarrow : se è canonica, possiamo seguire dim. di prop. (*) e concludere che $\exists c \neq 0$ t.c.

- $\tilde{J} E \tilde{J}^T E = c \mathbb{1}_{2m}$, ovvero $\tilde{J} E \tilde{J}^T = c E$;
 moltiplichiamo a sinistra per \tilde{J} e a destra per \tilde{J}^T e
 usiamo $\tilde{J} \tilde{J}^T = \mathbb{1} \Rightarrow J E J^T = c' E$, con $c' = 1/c$. //

\Leftarrow : (più interessante perché ci dà un criterio di canonicità)

Dobbiamo dim che se $\exists c$ t.c. $J E J^T = c E$ allora $\forall H$
 $\exists K$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ (*) $\xrightarrow{\text{equiv. a } \tilde{J} E \tilde{J}^T = c E}$

Come abbiamo già visto: $\nabla_x H = \tilde{J}^T \tilde{J}^T \nabla_x H = \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}$

dove abbiamo usato $(\nabla_{\tilde{x}} \tilde{H})_i = \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}$.

$\Rightarrow \tilde{J} E \nabla_x H = \tilde{J} E \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = E \nabla_{\tilde{x}} (c \tilde{H})$

Se $\exists k_0$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} k_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$, allora $\exists K$ che soddisfa (*)
 e cioè $K = c \tilde{H} + k_0$.

Qto è vero grazie a lemmi 2c 3 (vedi ultima pagina) :

$$\exists k_0 \text{ s.t. } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} k_0 \iff \Lambda \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} (w(\tilde{x}, t), t) \right) \text{ è f.c.} \\ \text{Lemma 3} \quad \Lambda E + E \Lambda = 0$$

$$\Lambda_{ij} = \sum_{l=1}^{2m} \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial t \partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \right)_{ij} \text{ che soddisfa} \\ \text{per Lemma 2.} //$$

Dato una transf. canonica che soddisfa

$$c J' E J'^T = E \quad (A) \quad J' = \frac{\partial w'}{\partial \tilde{x}}$$

riusciamo sempre a trovare una transf. canonica

$$\text{che soddisfa } J E J^T = E \quad (B) \quad J = \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}$$

Infatti, la composizione di transf. canoniche è una trasform. canonica. Possiamo quindi comporre la transf. canonica (A) con

$$p = \alpha p' \quad q = \beta q' \quad \alpha = \beta = \sqrt{c} \quad \tilde{x} = \sqrt{c} \tilde{x}'$$

$$\Rightarrow \bar{w}(\tilde{x}, t) = \sqrt{c} \bar{w}'(\tilde{x}', t)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{c} \frac{\partial w'_i}{\partial \tilde{x}'_j} = \sqrt{c} J'_{ij}$$

$$\Rightarrow J E J^T = c J' E J'^T = E.$$

Possiamo quindi restringerci al caso $c=1$ e ottenere tutte le transf. canoniche (con c generico) attraverso la composizione descritta sopra. Se $c=1$, la trasform. è detta **TRASF. CANONICA UNIVALENTE**.

Le trasf. di coord. t.c. lo Jacobiano J soddisfa $J E J^T = E$

sono dette **TRASFORMAZIONI SIMPLETTICHE**, le

matrici A t.c. $A E A^T = E$ sono dette **MATRICI SIMPLETTICHE**.

[Le matrici ORTOGONALI sono t.c. $O O^T = \mathbb{1}$, cioè $O \perp O^T = \mathbb{1}$. $O \in SO(n)$.] $A \in Sp(2n)$

ESEMPIO.

Riprendiamo la trasformazione 3) tra gli esempi dati in precedenza e applichiamo a sistemi a $n=1$ grado di lib.

$$\begin{cases} p = \tilde{p} \\ q = \tilde{q} + \alpha t \tilde{p} \end{cases} \xrightarrow[\text{completo}]{\text{in formalism}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + \alpha t \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \stackrel{||}{=} w(\tilde{x})$$

$$K(\hat{p}, \hat{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2 \rightarrow K_0 = -\frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

1) Verifichiamo che è canonica: $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{J} = J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix}$$

$$J E J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \text{transf. e' canonica (univocita)}$$

$$\Rightarrow C=1$$

2) Troviamo K_0 . K_0 e' t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$, cioè

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t) = -E \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t)$$

Sappiamo che $\tilde{w}_i(w(\tilde{x}_i, t), t) = \tilde{x}_i$; applichiamo $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$

$$\rightarrow \sum_j \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\tilde{J} \frac{\partial w}{\partial t}$$

Qui abbiamo $\frac{\partial w}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix}$

Quindi K_0 è soluz. di eq.

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0 = -E \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{cases} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_1} = -\alpha \tilde{x}_1 & \rightarrow K_0 = -\alpha \frac{\tilde{x}_1^2}{2} \\ \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_2} = 0 & \rightarrow K_0 \text{ è funz. solo di } \tilde{x}_1 \end{cases}$

Quindi, la transf. è canonica con $c=1$ e $K_0 = -\alpha \frac{\tilde{x}_1^2}{2}$

$$\Rightarrow K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = c H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

cioè quanto riportato nell' ES 3).

LEMMI utili per le dimostrazioni precedenti.

Lemma 1. localmente, \bar{v} è gradiente di una funt. F
(cioè $\bar{v} = \bar{\nabla} F$) se e solo se il suo ROTORE è nullo,
cioè $\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0$. (Forme chiuse sono localmente
esatte e viceversa.)

Lemma 2. Se \tilde{J} t.c. $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE$, allora

$$B = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \quad \text{soddisfa} \quad B^T E + E B = 0, \text{ cioè}$$

$E B$ è simmetrica.

Dim. Dimostriamo che $E \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}$ è simmetrica:

differentiamo $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E \tilde{J} + \tilde{J}^T E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\tilde{J}^{-T} \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E}_{\text{"}} + E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} = 0$$

$$- \left(E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} \right)^T \quad //$$

moltiplichiamo
 $(\tilde{J}^T)^{-1}$ a sin. e
 \tilde{J}^{-1} a des.

Lemma 3. Dato camp. vett. $\bar{v}(x,t)$, pto pssibile
 essere scritto come $\bar{v} = E \nabla_x F$, per qualche $F(x,t)$,

$$\Leftrightarrow \Omega \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \text{ soddisfa } \Omega^T E + E \Omega = 0$$

cioè $E \Omega$ simm.

Dim. \Rightarrow : $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_k E_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \Leftrightarrow \Omega = E (\partial^2 F)$
 $\Rightarrow E \Omega$ è simm.

\Leftarrow : $\bar{u} \equiv E \bar{v} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = E \Omega$ simm.

$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \xRightarrow{\text{Lemma 1}} \text{f.t.c. } \bar{u} = -\nabla_x F \Rightarrow \bar{v} = E \nabla_x F //$

Lemma 4. Sia $A(x,t)$ matrice $2n \times 2n$ (con $x \in \mathbb{R}^{2n}$)

Se \forall funt. regolare $F(x,t)$, il camp. vett. $A \nabla_x F$

è IRROTAZIONALE (cioè ha rotore nullo \Leftrightarrow (localm.) $= \nabla_x(\dots)$)

allora \exists funt. $a(t)$ t.c. $A = a(t) \mathbb{1}$.

Dim. $A \nabla_x F$ irrotaz. $\forall F \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l A_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l A_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F \quad (0)$

Prendiamo $F = x_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} \quad (1)$

" $F = x_i^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ii} x_i) \quad (2)$

$(2) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} x_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ii} x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} \right) x_i + A_{ji} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} \right) x_i - A_{ii} \delta_{ij}$

$(1) \Rightarrow A_{ji} = A_{ii} \delta_{ij} \quad (3) \Rightarrow A$ è matrice diagonale

$$\text{Inoltre } (1), (3) \Rightarrow \frac{\partial A_{ii}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i} = \frac{\partial A_{ii}}{\partial x_i} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_{ii}}{\partial x_j} = 0 \quad \mu \quad j \neq i$$

$$\Rightarrow A_{ij}(x, t) = a_i(x_i, t) \delta_{ij}$$

Mettiamo in (0):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l a_j(x_j, t) \delta_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l a_i(x_l, t) \delta_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j(x_j, t) \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x_i, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow \mu \quad i \neq j \quad \left[a_j(x_j, t) - a_i(x_i, t) \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall F$$

$$\hookrightarrow a_j(x_j, t) = a_i(x_i, t) \quad i \neq j$$

\uparrow indep. de x_i \uparrow indep. de x_j

$$\Rightarrow a_i(x_i, t) = a(t) \quad \forall i //$$