U N I V E R S I T A ’ D E G L I S T U D I D I T R I E S T E

Aurelio Amodeo Paolo Rosato

MATEMATICA FINANZIARIA
per l’Ingegneria civile e per l’Architettura

Dipartimento di Ingegneria e Architettura – Trieste, marzo 2014

Premessa

La finalità di questi *Elementi*, dedicati ai Corsi di Estimo ed Economia per le lauree in Ingegneria Civile ed in Architettura, è quella di fornire il necessario e tradizionale aiuto matematico per affrontare i problemi estimativi in fase di stima analitica, nonché di dare gli elementi per la formulazione di piani per il finanziamento di opere pubbliche e private attraverso prestiti rimborsabili a quote e con il coinvolgimento di Istituti di Credito o con l'emissione di titoli di credito. A tale scopo sarà sufficiente l'esposizione delle leggi finanziarie e delle operazioni finanziarie più ricorrenti in condizioni di certezza, salvo esaminare singoli spazi di probabilità in valutazioni non deterministiche. Il ricorso ad esempi caratterizzanti e la proposta di esercizi e quesiti consentirà agli studenti la rapida assimilazione della materia ed il suo collegamento con le realtà operative più ricorrenti.

Trieste, 2014

Aurelio Amodeo

SOMMARIO

Capitolo 1°

IL CAPITALE E L'INTERESSE

1.1 Il Capitale

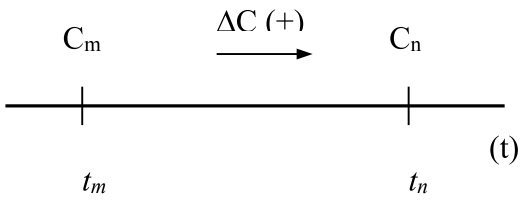
Nei fattori storici della produzione, *Natura-Lavoro-Capitale-Organizzazione*, viene definito il *Capitale*, dal punto di vista economico-estimativo, come qualunque bene impiegato o prodotto nella produzione, purché utile e disponibile, ma in quantità limitata. Il suo *valore*, cioè l'importanza in termini monetari che quel bene acquista in un mercato di scambio, dipende quindi dalla sua limitatezza e dalla sua utilità, valutata sempre in sede di mercato e non intesa come importanza assegnata singolarmente o affettivamente da un solo soggetto.

In sede di stima analitica viene poi indicato come *valore capitale* di un bene il valore attuale della accumulazione finanziaria dei suoi redditi futuri.

Il valore di un capitale C va quindi comunque espresso in unità monetarie precisate (euro, franco, dollaro, ecc.) che ne definiscono l'importo, ma ciò non basta. In una operazione finanziaria va precisato il momento temporale della sua disponibilità, quello che in termine bancario ha il nome di *valuta*. Il valore è quindi funzione dell'importo e del tempo intercorrente fra il momento dell'operazione ed il momento della valuta; il rapporto del valore con l'importo è ovviamente diretto, ma inverso è il suo rapporto con il tempo, nel senso che a parità di importo il valore è maggiore per tempi di valuta più brevi.

La considerazione che il muoversi di un capitale C di determinato importo, sulla retta del tempo, ne produce una variazione, porta a definire questa variazione come *interesse*.

Diremo quindi che un capitale C_m, disponibile al momento t_m ed impiegato in una operazione per un tempo $t = t_n - t_m$, subisce una variazione positiva di valore ΔC che lo fa salire o montare al valore C_n. Chiameremo *montante M* di C_m al tempo t_n il capitale C_n .



$M = C_n$ = Montante al tempo t_n del capitale C_m disponibile al tempo t_m.

Chiameremo *interesse* la variazione positiva del valore del capitale C_m.

$$\Delta C = I = C_n - C_m$$

nonché *saggio (o tasso) di interesse* questa variazione, se riferita all'unità di capitale ed all'unità di tempo

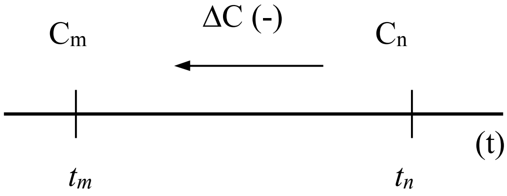
$$r = i = \frac{I}{C_m \cdot t}$$

e chiameremo *legge di formazione del montante*, oppure *legge di capitalizzazione* (oppure ancora *legge di posticipazione*) una funzione atta a fornire il valore di un capitale in un momento successivo, o comunque non antecedente a quello della sua disponibilità. Se il momento t_m è all'origine di un'operazione finanziaria, e quindi è il momento t_0, allora $C_m = C_o$ sarà il capitale iniziale disponibile.

In merito all'adozione della simbologia per il saggio d'interesse, va detto che la lettera *i* è generalmente impiegata nelle operazioni finanziarie, mentre la *r* (ratio) è tradizionalmente usata nella letteratura estimativa. L'ambito di questi appunti ci porta quindi all'adozione del simbolo *r*. Analoga osservazione va fatta per il termine finanziario *tasso d'interesse* o per il suo equivalente *saggio*; useremo ambedue questi termini, nel modo che riterremo di volta in volta più appropriato.

La definizione che abbiamo dato dell'interesse non contrasta matematicamente con quella tradizionale e legata alla stessa sua esistenza, di prezzo che si deve pagare per l'uso di un capitale. Quella più attuale interpretazione ci consentirà però di porre in maggior evidenza l'andamento della formazione del montante secondo vari regimi.

Il movimento opposto di un capitale sulla retta del tempo, cioè la ricerca del valore C_m in un momento t_m di un capitale C_n disponibile in t_n, porta ad una variazione negativa del valore del capitale di riferimento C_n, che viene *scontato* o *anticipato* al tempo t_m.



$V = C_m$ = valore scontato al tempo m del capitale C_n disponibile al tempo t_n .

Chiameremo *differenza* o *sconto* la variazione negativa del capitale C_n

$$\Delta C = D = C_m - C_n$$

nonché *tasso (o saggio) di sconto* questa variazione, se riferita all'unità di capitale ed all'unità di tempo

$$d = \frac{D}{C_n \cdot t}$$

e chiameremo *legge di anticipazione o di sconto* una funzione atta a fornire il valore di un capitale in un momento antecedente, o comunque non successivo a quello della sua disponibilità. Se il momento t_m è all'origine di una operazione finanziaria, e quindi è il momento t_0, allora $C_m = C_o$ sarà il valore attuale del capitale C_n e la legge di sconto sarà chiamata *di attualizzazione*.

Le due leggi citate, quella di posticipazione e quella di anticipazione, sono funzioni generalmente ad una sola variabile (purché il tasso rimanga costante per tutta l'operazione), nelle quali il capitale montato o scontato è funzione solo del tempo di impiego o di anticipazione. Si tratta di leggi che su un mercato generalmente non hanno reciprocità, nel senso che è un caso solamente teorico che in un definito intervallo di tempo un capitale in movimento nei due sensi rimanga invariato al suo ritorno all'origine. Si tratta in effetti di due leggi usate finanziariamente per operazioni differenti, essendo legata quella di capitalizzazione soprattutto all'impiego ed al prestito di capitali, mentre quella di sconto ha il suo significato comune nella necessità dell'anticipazione monetaria per capitali con valuta successiva.

Va detto ancora che per le due leggi, da considerarsi come leggi generali e solo indicatorie, troveremo diverse funzioni che ne soddisfano i requisiti richiesti, e che vanno ad operare in ambiti finanziari generalmente chiamati *regimi*. Si tratterà sempre di funzioni continue monotone, atte cioè a dare il valore del capitale in qualunque momento temporale, anche se negli usi bancari gli interessi (o le differenze) diventano disponibili in modo discreto (ogni anno, ogni semestre, ogni giorno, ecc.) e si aggiungono al (o si tolgono dal) capitale all'inizio oppure al termine di questi periodi di tempo (interesse anticipato o posticipato). L'andamento continuo delle funzioni si trasforma in questo caso in andamento a "scaletta" (fonction crochet op. fonction en escalier).

Osserviamo inoltre fin d'ora che mentre i montanti *M*, i valori scontati *V*, l'accumulazione degli interessi *I* e degli sconti *D*, hanno le dimensioni dei Capitali, i tassi di interesse e di sconto vanno assunti come numeri puri, senza dimensioni, anche se, correttamente, dovrebbero intendersi come il reciproco di un tempo, cioè come una intensità.

1.2 Il saggio di interesse ed il tasso di sconto

Al di là della definizione matematico-finanziaria, sulla giustificazione dell'esistenza dell'interesse, cioè di un compenso per l'uso del capitale, va suggerita la lettura del capitolo "Il saggio d'interesse" del testo del Medici "Principi di estimo" [*]. In sostanza, rileva il Medici, l'esigenza di un corrispettivo per l'abbandono di un capitale per un certo tempo nasce dalla diversa importanza ed utilità che il genere umano attribuisce ai beni presenti rispetto quelli futuri, della fruizione dei quali non si è certi.

Va per contro detto che la custodia di un capitale è un servizio che richiede un compenso; l'affidamento a Istituti di Credito di capitali con garanzia di disporre in qualsiasi momento di parte o di tutto l'importo, vincola la possibilità del reinvestimento del capitale stesso e quindi del maturarsi di un suo frutto. Per questa ragione i tassi dei conti correnti sono bassi, o addirittura nulli o negativi.

Per quanto riguarda l'entità del saggio di interesse, vanno considerati i seguenti fattori:

- la quantità del risparmio esistente in un certo periodo in un Paese o in un'area dello stesso. L'abbondanza di capitali in offerta abbassa ovviamente il tasso d'uso degli stessi; la carenza lo fa aumentare;
- la quantità degli investimenti produttivi in un certo periodo in un Paese o in un area dello stesso. L'aumento della domanda di capitali per la produzione aumenta ovviamente il tasso d'uso degli stessi; la carenza lo fa diminuire;
- il rischio dell'operazione per la quale si propone il finanziamento. Il rischio è pressoché nullo nella collocazione dei capitali negli Istituti di Credito, ma non così negli

[*] Giuseppe Medici "Principi di Estimo" ediz. Grafiche Calderini, Bologna 1955.

investimenti e reinvestimenti di questi capitali. Il premio per l'assicurazione di questi capitali comporta un aumento del saggio, tanto maggiore quanto è maggiore il rischio;

- la durata dell'operazione per la quale si richiede il finanziamento. In periodi di abbondanza di capitali in offerta, l'Istituto offerente è portato ad abbassare il tasso pur di collocare il capitale per tempi più lunghi. Inversamente in periodi di carenza di capitali, quando sarà invece l'imprenditore portato a pagare di più per la certezza della disponibilità di un capitale.

Altri fattori, quali il livello dei prezzi delle materie prime ed, in generale, il costo di produzione dei beni economici, possono agire in un senso o nell'altro sull'entità del saggio di interesse, che risulterà pertanto determinato dall'equilibrio di tutte queste forze, di volta in volta diverse.

Per quanto riguarda il tasso di sconto, cioè il prezzo per l'anticipazione di capitali di valuta differita, il suo significato finanziario non va confuso con il tasso debitorio che le Banche fissano nei rapporti contrattuali con i Clienti, di due - tre volte maggiore di quello creditorio, e che è sostanzialmente ancora un tasso d'interesse.

Il Medici, nell'opera citata, precisa che se il saggio d'interesse rappresenta il prezzo di uso del risparmio, il saggio di sconto rappresenta invece il prezzo d'uso della moneta, nel senso che mentre il saggio di interesse dipende, oltre che da altri fattori, dalla quantità di risparmio esistente, il saggio di sconto dipende dalla quantità di mezzi di pagamento offerti dal mercato. L'asserzione va intesa nel senso che lo stock del risparmio esistente in un certo momento in un Paese, pur se valutato in moneta, non implica necessariamente l'impiego di essa; per contro l'operazione di sconto nasce dalla necessità di denaro per impegni da soddisfare subito, e quindi dalla anticipazione in termini monetari di capitali disponibili in tempi successivi.

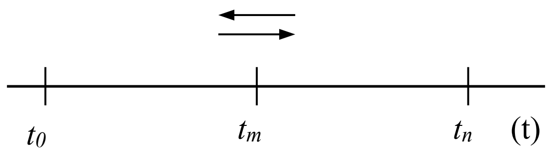
A conclusione di queste considerazioni, e tenendo particolare conto di esse, va fin d'ora precisato che, nelle rappresentazioni grafiche e negli esempi numerici che daranno supporto didattico alle relazioni finanziarie trattate nei capitoli seguenti, non si terrà conto di valori negativi per i saggi di interesse e di sconto. L'applicazione di questi valori, ovviamente matematicamente possibile, condurrebbe nella maggior parte dei casi a risultati finanziari discutibili, se non anche assurdi.

Capitolo 2°

I REGIMI FINANZIARI USUALI

2.1 La scindibilità in un regime finanziario

Di precisa importanza per le applicazioni operative è la verifica se un regime finanziario gode della proprietà della *scindibilità*. Questa proprietà è verificata quando



il montante al tempo t_m di un capitale investito al tempo $t_0 < t_m$, impiegato successivamente fino al tempo $t_n > t_m$ e nelle medesime condizioni finanziarie, è uguale al montante al tempo t_n dello stesso capitale iniziale, cioè quando

$$M\ (t_0, t_m) \times M\ (t_m, t_n) = M\ (t_0, t_n)$$

Il moltiplicatore fra i due montanti al primo termine non và ovviamente inteso in senso matematico, bensì come indicatore di ripresa, nello stesso regime, di un capitale maturato al tempo t_m.

Ciò vale anche in un regime di sconto, che è scindibile solo quando il valore scontato al tempo t_m di un capitale disponibile al tempo $t_n > t_m$, scontato successivamente fino al tempo t_0 e nelle medesime condizioni finanziarie, è uguale al valore scontato al tempo t_0 dello stesso capitale iniziale, cioè quando

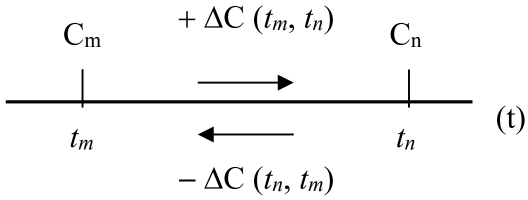
$$V\ (t_n, t_m) \times V\ (t_m, t_0) = V\ (t_n, t_0)$$

In sostanza la proprietà della scindibilità consiste (come la definiscono Daboni e De Ferra in "Elementi di matematica finanziaria[†]") nel poter interrompere e riprendere istantaneamente una operazione finanziaria senza mutare il valore finale della medesima. Questa proprietà, come vedremo, è riservata ai soli regimi regolati da leggi esponenziali, sia per montare che per scontare.

[†] Luciano Daboni e Claudio De Ferra – Elementi di matematica finanziaria - Ed. Lint Trieste 1977-1985

2.2 La reciprocità fra movimenti di posticipazione e di anticipazione

Data una legge di posticipazione $M = f(t)$, continua e sempre crescente in un intervallo di tempo $t_m - t_n$, applicata ad un capitale iniziale C con un tasso r, sarà sempre possibile esprimere una legge di anticipazione coniugata $V = f(t)$ tale che, per lo stesso periodo di tempo e lo stesso tasso, le variazioni algebriche del capitale si annullino.



$$\Delta C(t_m, t_n) - \Delta C(t_n, t_m) = 0$$

In questo caso i due movimenti sono uno il reciproco dell'altro, con la notazione

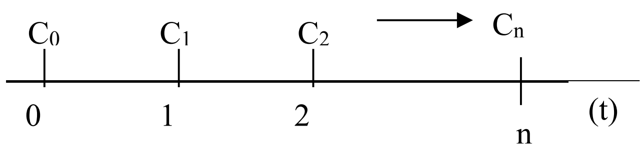
$$M\ (t_m, t_n) = [V\ (t_n, t_m)]^{-1}$$

$$\text{op.} M\ (t_m, t_n) \cdot V\ (t_n, t_m) = 1$$

Ciò non comporta però la corrispondenza di valori nell'interno dell'intervallo di tempo considerato, nel senso che il montante di un capitale iniziale, in un momento t_k tale che $t_m < t_k < t_n$, debba essere uguale al valore scontato in t_k dello stesso capitale montato in t_n. Vedremo che tale proprietà sarà ancora riservata ai regimi esponenziali.

2.3 La formazione del montante in regime di interesse semplice

Fissato il valore del saggio di interesse r, riferito ad un'unità temporale discreta t, in questo regime la variazione del capitale in funzione del tempo d'impiego è lineare. Pertanto il montante di un capitale iniziale C_o dopo n unità di tempo diventa



(2.3.1) $\quad M = C_n = C_o + C_0\ rn = C_0\,(1 + rn)$

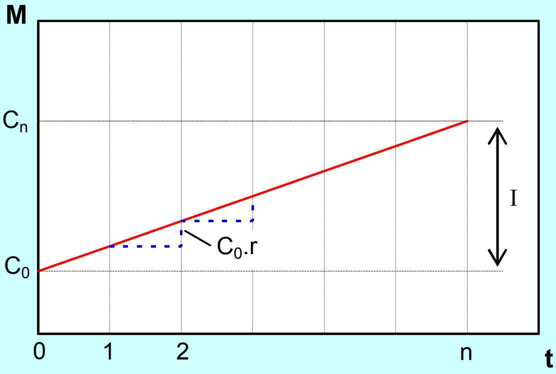


Fig. 1

M = f (t) in regime di interesse semplice

e l'accumulazione degli interessi

(2.3.2) $\quad I = C_n - C_0 = C_0\ rn$

La geometria funzione $M = f(t)$ è una semiretta nel 1° quadrante, uscente all'ordinata C_0 e con coefficiente angolare $r > 0$ (Fig.1).

L'interesse si rende logicamente disponibile quando il capitale l'ha maturato, quindi al termine dell'unità di tempo considerata. Questa precisazione dell'intervallo temporale di riferimento e la maturazione degli interessi all'estremo di questo intervallo non esclude però il loro calcolo anche in un momento intermedio, in caso di interruzione dell'operazione. Ad esempio, per un saggio di interesse convenuto annuale in ragione del 5%, dopo 127 giorni oppure dopo 4 anni e 127 giorni il montante diventa

(2.3.3)

$$M = C_0\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{127}{365}\right) = 1{,}0174\ C_0$$

$$M = C_0\left[1 + 0{,}05\left(4 + \frac{127}{365}\right)\right] = 1{,}2174\ C_0$$

con una accumulazione di interessi, rispettivamente di

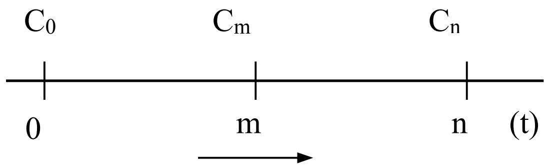
(2.3.4)

$$I = (1{,}0174 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}0174\ C_0$$

$$I = (1{,}2174 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}2174\ C_0$$

Se altro non vien detto, l'interesse è riferito al periodo d'impiego del capitale di 1 anno, ed espresso in percentuale sul capitale iniziale (4%, 6%, ecc.). Ciò vale anche per gli altri regimi sia d'interesse che di sconto; ci riferiremo quindi a questa unità temporale di misura per il saggio (tasso), salvo che non sia precisato di volta in volta differentemente.

Questo regime di capitalizzazione non è scindibile. Infatti, per quanto detto al par. 2.1



$$C_0\,(1+rm)\times\left[1+r(n-m)\right]\neq C_o\,(1+rn)$$

Semplici operazioni algebriche consentono di ricavare, in questo regime, le funzioni inverse, cioè il tempo o il saggio di capitalizzazione in funzione degli altri valori.

2.4 L'anticipazione o sconto in regime d'interesse semplice (sconto razionale)

Formulando la reciprocità con la formazione del montante in questo regime, si ottiene dalla (2.3.1) il valore al momento *0* di un capitale disponibile fra *n* unità temporali.

$$(2.4.1)\qquad V = C_0 = \frac{C_n}{1+rn}$$

nonché lo sconto, cioè la differenza

$$(2.4.2)\qquad D = C_n - C_0 = C_n\,\frac{rn}{1+rn}$$

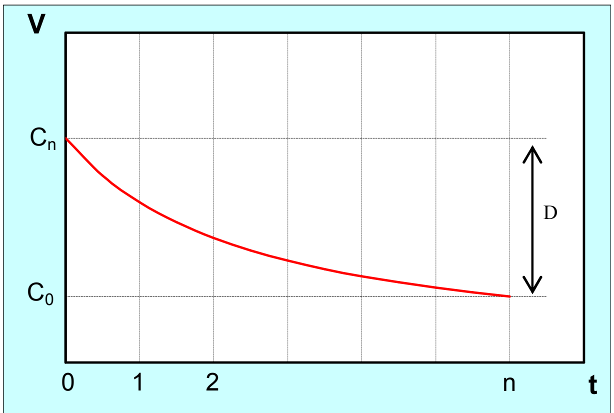


Fig. 2
V = f (t) in regime di interesse semplice

e lo sconto per unità di capitale C_n e di tempo, cioè il "*tasso di sconto*" chiamato pure "*tasso d'interesse scontato*"

$$(2.4.3)\qquad d = \frac{r}{1+r}$$

da cui, pure

$$(2.4.4)\qquad D = \frac{C_n\cdot n\cdot d}{1+(n-1)\cdot d}\qquad\qquad (2.4.5)\qquad V = C_0 = C_n - \frac{C_n\cdot d\cdot n}{1-d+d\cdot n}$$

La geometria della funzione *V = f (t)* è una curva nel 1° quadrante, uscente dall'ordinata C_n, con andamento discendente e con la concavità verso l'alto ($f'(t)<0$, $f''(t)>0$), nonché tendendo asintoticamente alla ascissa per C_0 per $n\to\infty$ (Fig. 2).

Ripetiamo, per una giusta lettura del grafico, che la curva dà il valore di un capitale disponibile fra *n* unità di tempo (C_n), scontato di *1,2 … n* unità temporali.

Vale quanto già detto nel paragrafo precedente in merito alla disponibilità delle differenze agli estremi dell'intervallo temporale di riferimento, ma anche alla possibilità del loro calcolo in un momento intermedio.

In relazione agli esempi fatti ad. 2.3.3, per un saggio r del 5% (corrispondente ad un tasso d del 4,76%) e per lo stesso periodo già calcolato, il valore del capitale scontato diventa

$$(2.4.6) \quad V = C_n \frac{1}{1 + 0,05 \times \dfrac{127}{365}} = 0,9829 \ \ C_n$$

$$V = C_n \frac{1}{1 + 0,05 \left(4 + \dfrac{127}{365} \right)} = 0,8214 \ \ C_n$$

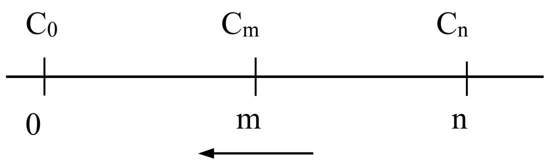
dove si nota che 0,9829 e 0,8214 sono ovviamente il reciproco di 1,0174 e di 1,2174 delle 2.3.3. e che lo sconto

$$(2.4.7) \qquad D = (1,0 - 0,09829) \times C_n = 0,0171 \times C_n = 0,0171 \times 1,0174 \times C_0 = 0,0174 \cdot C_0$$

$$D = (1,0 - 0,8214) \times C_n = 0,1786 \times C_n = 0,1786 \times 1,2174 \times C_0 = 0,2174 \cdot C_0$$

è pari all'accumulazione degli interessi nel regime reciproco. Ciò non comporta però la reciprocità fra i movimenti di posticipazione e di anticipazione nel senso spiegato al par. 2.2, proprietà che in questo regime di interesse semplice non c'è, come facile verificare. Vedere anche in merito il par. 5.2.

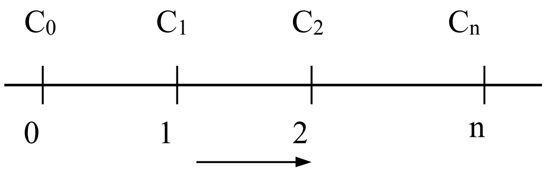
Pure questo regime di sconto razionale, come già il suo reciproco, non è scindibile. Infatti



$$\frac{C_n}{1 + r\,(n - m)} \times \frac{1}{1 + rm} \neq \frac{C_n}{1 + rn}$$

2.5 La formazione del montante in regime di interesse composto

Fissato il valore del saggio di interesse r, riferito all'unità temporale discreta t, in questo regime l'interesse maturato, disponibile di solito alla fine dell'intervallo di tempo, si aggiunge al capitale investito fino a quel momento e concorre assieme ad esso alla maturazione dell'interesse nel periodo successivo. Si ha pertanto



$$C_1 = C_0 + C_0 r = C_0\ (1 + r)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 r = C_1\ (1 + r) = C_0\ (1 + r)^2$$

……………………..

$$C_n = C_0\ (1 + r)^n$$

Il termine $1 + r$ viene chiamato *binomio di interesse* o *fattore di capitalizzazione* ed indicato con q, e sta ad indicare il montante, al termine di ogni unità temporale, di una unità del capitale disponibile all'inizio della stessa. La legge di formazione del montante è pertanto

(2.5.1) $$M = C_n = C_0 \times q^n$$

ed è esponenziale crescente, con la concavità rivolta verso l'alto ($f'(t) > 0$, $f''(t) > 0$) (Fig.3)

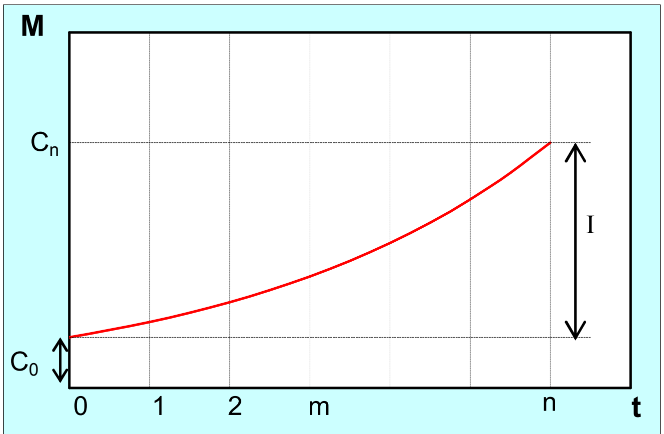


Fig. 3

M = f (t) in regime di interesse composto

L'accumulazione degli interessi dall'inizio dell'operazione alla fine di ogni periodo risulta

(2.5.2) $$I = C_n - C_0 = C_0\, q^n - C_0 = C_0\, \left(q^n - 1\right)$$

Vale inoltre quanto già precisato per l'interesse semplice in merito alla possibilità del calcolo del montante in un momento intermedio dell'intervallo. Per gli esempi già fatti nel cap.2.3

(2.5.3) $$M = C_0\ \left(1 + 0{,}05\right)^{127/365} = 1{,}0171\, C_0$$

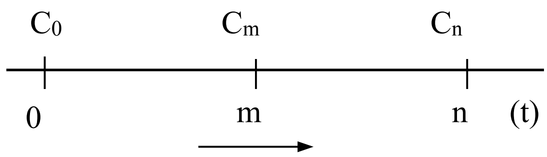
$$M = C_0\ \left(1 + 0{,}05\right)^{4 + 127/365} = 1{,}2363\ C_0$$

(2.5.4) $$I = \left(1{,}0171 - 1{,}0\right) C_0 = 0{,}0171\, C_0$$

$$I = (1{,}2363 - 1{,}0)\, C_0 = 0{,}2363\, C_0$$

Notiamo fin d'ora che il montante in questo regime, a parità di saggio, è inferiore al corrispondente ad interesse semplice per tempi di impiego inferiori all'unità temporale di riferimento e maggiore per tempi superiori a detta unità (2.3.3 – 2.5.3)

Questo regime di interesse, esponenziale, è scindibile. Infatti, sempre con riferimento a quanto detto al par. 2.1



$$C_0 \times q^m \times q^{n-m} = C_0 \times q^n$$

Questa proprietà della scindibilità consentirà larghe applicazioni di questo regime.

La definizione delle funzioni inverse si appoggia, in questo regime, su espressioni logaritmiche; ad esempio

(2.5.5) $$n = \frac{\lg C_n - \lg C_0}{\lg(1 + r)}$$

dalla quale si deduce pure r.

2.6 L'anticipazione o sconto in regime di interesse composto

In reciprocità con la formazione del montante nell'analogo regime, si ha dalla (2.5.1)

(2.6.1) $$V = C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n} = \frac{C_n}{q^n} = C_n \times q^{-n}$$

e lo sconto, cioè la differenza

(2.6.2) $$D = C_n - C_0 = C_n\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$$

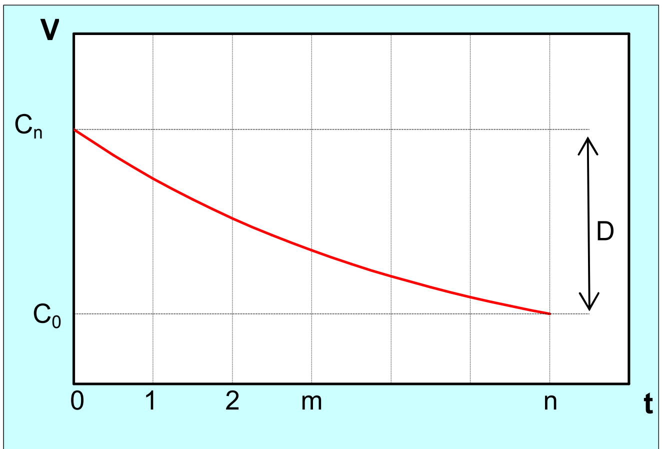


Fig. 4
V = f (t) in regime di interesse composto

e lo sconto per unità di capitale e di tempo,

cioè il tasso di sconto (tasso d'interesse scontato)

(2.6.3) $$d = \frac{r}{1+r} = \frac{r}{q}$$

da cui pure

(2.6.4) $$D = C_n - C_n(1-d)^n$$ (2.6.5) $$V = C_0 = C_n \cdot (1-d)^n$$

Pure in analogia con la definizione di fattore di capitalizzazione, chiameremo *fattore di anticipazione* o *di sconto* il valore scontato al termine di ogni unità temporale di una unità di capitale disponibile all'inizio della stessa. Ovviamente l'unità temporale s'intende percorsa in senso opposto al regime di posticipazione. Indicheremo con $v = 1 - d = q^{-1}$ questo valore, che nasce come segue

$$C_{n-1} = C_n - C_n \cdot d = C_n\,(1-d) = C_n \cdot v$$

$$C_{n-2} = C_{n-1} - C_{n-1} \cdot d = C_{n-1}\,(1-d) = C_n \cdot v^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_0 = C_1 - C_1 \cdot d = C_1\,(1-d) = C_n \cdot v^n$$

e, data la reciprocità con l'analogo regime di posticipazione

(2.6.6) $$V = C_0 = \frac{C_n}{q^n} = C_n \cdot (1-d)^n = C_n \cdot v^n$$

(2.6.7) $$q = 1 + r = v^{-1} = \frac{1}{1-d} \qquad\qquad r = \frac{d}{1-d}$$

Si osserva pure dalla 2.6.3 che in una stessa operazione finanziaria il tasso di interesse è maggiore del corrispondente tasso di sconto, che risulta essere pari al tasso di interesse scontato.

La geometria della funzione *V = f(t)* è ancora una esponenziale con la concavità verso l'alto, ma discendente asintoticamente (*f'(t) < 0, f''(t) > 0*) (Fig. 4).

Vale inoltre la precisazione già fatta al par. 2.4 per una giusta lettura del grafico.

In relazione agli esempi fatti al cap. 2.5, e con il solito intervallo di tempo e saggio *r* di interesse (0,050) oppure tasso di sconto (0,0476)

(2.6.8) $$V = C_n \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^{127/365}} = C_n \cdot (1-0{,}0476)^{\frac{127}{365}} = 0{,}9832 \cdot C_n$$

$$V = C_n \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^{4+127/365}} = 0{,}8089 \cdot C_n$$

dove si nota ancora che i valori scontati sono il reciproco dei montanti 2.5.3 e che le differenze

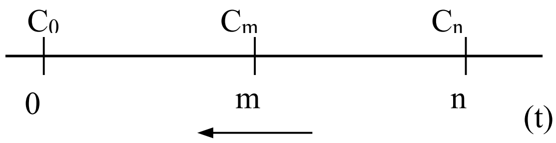
(2.6.9) $$D = (1{,}0 - 0{,}9832) \cdot C_n = 0{,}0168 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}8089) \cdot C_n = 0{,}1911 \cdot C_n$$

sono pari all'accumulazione degli interessi nel regime reciproco.

Osserviamo pure che in questo regime il capitale scontato, a parità di saggio, è superiore al corrispondente ad interesse semplice per tempi inferiori all'unità temporale, ed inferiore per tempi superiori a detta unità (2.4.5)

Come per la formazione del montante ad interesse composto, anche questo regime inverso è scindibile. Infatti



$$\frac{C_n}{q^{n-m}} \times \frac{1}{q^m} = \frac{C_n}{q^n}$$

Sarà anche facile osservare che i due movimenti, di posticipazione e di anticipazione, nell'interesse composto hanno pure reciprocità nel senso spiegato al par. 2.2. Questa proprietà, unita a quella della scindibilità, rende questo regime preferibile nelle operazioni finanziarie, in particolare se di durata superiore alla unità temporale considerata.

2.7 L'anticipazione o sconto in regime lineare (sconto commerciale)

E' commercialmente usato per tempi brevi, in quanto di semplice calcolo, valutare la variazione negativa del capitale, ossia lo sconto *D*, proporzionalmente al capitale, al tempo ed al tasso di sconto *d*. Si tratta di un regime simile (ma non reciproco) di quello della formazione del montante a interesse semplice, con la geometria della funzione $V = f(t)$ rappresentata da una semiretta nel 1° quadrante uscente dal valor del capitale al momento della sua disponibilità, con direzione discendente, con coefficiente angolare $-d$, e pertanto limitata nel numero di frazioni di tempo considerate se non si vuole che lo sconto annulli il capitale o che il calcolo non diventi finanziariamente assurdo (Fig. 5).

Pertanto, fissato un tasso di sconto *d*, riferito all'unità temporale discreta *t* oltreché all'unità di capitale, lo sconto risulta

$$(2.7.1) \qquad D = C_n - C_0 = C_n \times d \times n$$

con $n \leq \dfrac{1}{d}$

ed il valore in *0* del capitale disponibile in *n*

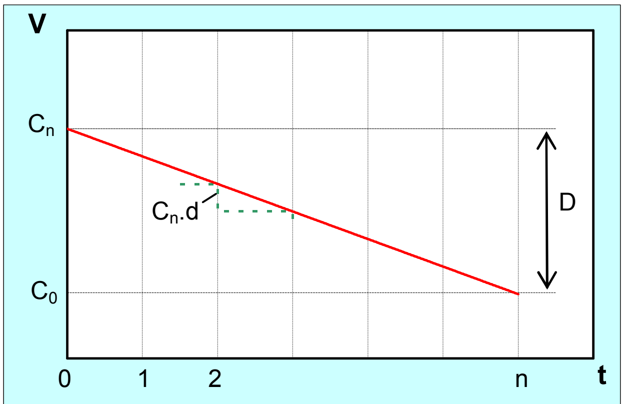


Fig. 5

V = f (t) in regime di sconto commerciale

$$(2.7.2) \qquad V = C_0 = C_n - D = C_n\,(1 - dn)$$

Va ancora ricordato che, così come negli altri regimi, la continuità della funzione *V* = *f(t)* consente il calcolo del valore del capitale pure in un momento intermedio. Negli esempi più volte esaminati

$$(2.7.3) \qquad V = C_n\left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{127}{365}\right) = 0{,}9826 \cdot C_n$$

$$V = C_n\left[1 - 0{,}05\left(4 + \frac{127}{365}\right)\right] = 0{,}7826 \cdot C_n$$

$$(2.7.4) \qquad D = (1{,}0 - 0{,}9826) \cdot C_n = 0{,}0174 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}7826) \cdot C_n = 0{,}2174 \cdot C_n$$

In questi esempi si è considerato il tasso di sconto *d* pari al saggio di interesse *r* utilizzato sia per posticipare che per anticipare negli altri due regimi. Il confronto numerico fra i tre regimi sarà però possibile solo se si pone per *d* il valore del saggio d'interesse scontato *r/1+r = d* , come evidenziato ad 2.4.3 e 2.6.3, oppure per *r* il valore del tasso di sconto posticipato *r = d (1+r)*. Nel primo caso, e per i precedenti esempi, si ottiene

$$(2.7.5) \qquad V = C_n\left(1 - \frac{0{,}05}{1{,}05} \cdot \frac{127}{365}\right) = 0{,}9834 \cdot C_n$$

$$V = C_n\left[1 - \frac{0{,}05}{1{,}05}\left(4 + \frac{127}{365}\right)\right] = 0{,}7930 \cdot C_n$$

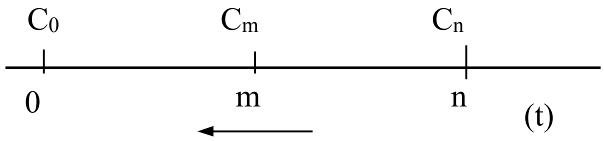
$$(2.7.6) \qquad D = (1{,}0 - 0{,}9834) \cdot C_n = 0{,}0166 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}7930) \cdot C_n = 0{,}0207 \cdot C_n$$

dove si vede che in questo regime il capitale scontato è superiore ai corrispondenti ad interesse semplice e composto per tempi inferiori all'unità temporale, ed è inferiore ad essi per tempi superiori a detta unità (2.4.6 – 2.6.8).

Ricordiamo ancora che, se altro non vien detto, commercialmente il tasso di sconto è riferito al periodo temporale di un anno ed espresso in percentuale sul valore del capitale al momento della sua disponibilità.

Questo regime di attualizzazione non è scindibile. Infatti



$$C_n \left[1 - d\,(n - m)\right] \times (1 - dm) \neq C_n\,(1 - dn)$$

Pure in questo regime semplici operazioni consentono di determinare le funzioni inverse.

2.8 La formazione del montante in regime di sconto commerciale

L'analisi dello sconto in regime lineare o commerciale ci dà l'occasione per esaminare il regime finanziario reciproco, in cui la formazione del montante diventa, per un prefissato tasso *d*

(2.8.1) $$M = C_n = \frac{V}{1-dn} = \frac{C_0}{1-dn}$$

con $n \leq \frac{1}{d}$ per le ragioni già dette al capitolo precedente.

La geometria della $M = f\ (t)$ è ancora una curva ad andamento crescente e con la concavità verso l'alto ($f'(t) > 0, f''(t) > 0$) (Fig. 6), così come nell'interesse composto, ma con le differenze da esso che si diranno.

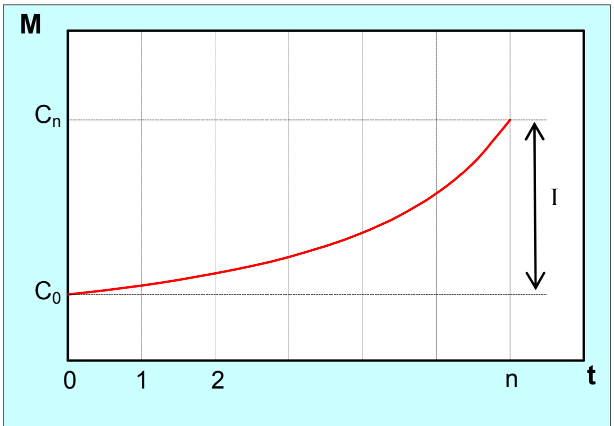


Fig. 6

M = f (t) in regime di sconto commerciale

L'accumulazione degli interessi risulta

$$(2.8.2)\qquad I = C_n - C_0 = C_0 \times \frac{dn}{1-dn}$$

e, per gli esempi già ripetuti di calcolo in momenti intermedi dell'unità temporale di riferimento, per *d=5%*

$$(2.8.3)\qquad M = C_0 \times \frac{1}{1-0{,}05\times\dfrac{127}{365}} = 1{,}0177\times C_0$$

$$M = C_0 \times \frac{1}{1-0{,}05\left(4+\dfrac{127}{365}\right)} = 1{,}2778\times C_0$$

$$I = (1{,}0177 - 1{,}0)\times C_0 = \ 0{,}0177\times C_0 \ = 0{,}0177\times 0{,}9826\ C_n = 0{,}0174\times C_n$$

(2.8.4)

$$I = (1{,}2778 - 1{,}0)\times C_0 = \ 0{,}2778\times C_0 \ = 0{,}2778\times 0{,}7826\ C_n = 0{,}2174\times C_n$$

dove si osserva che questa volta sono i montanti ad essere il reciproco dei valori scontati (2.7.3) e che l'accumulazione degli interessi è pari alla differenza (2.7.4) nel regime reciproco. Ciò non comporta però la reciprocità assoluta fra i due movimenti, come già osservato nel regime a interesse semplice.

Analogamente a quanto detto al capitolo precedente, il confronto con gli altri due regimi di capitalizzazione può venir stabilito con l'assunzione di un tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato, come di seguito

$$M = C_0 \frac{1}{1-\dfrac{0{,}05}{1{,}05}\cdot\dfrac{127}{365}} = 1{,}0168\cdot C_0$$

(2.8.5)

$$M = C_0 \frac{1}{1-\dfrac{0{,}05}{1{,}05}\left(4+\dfrac{127}{365}\right)} = 1{,}2611\cdot C_0$$

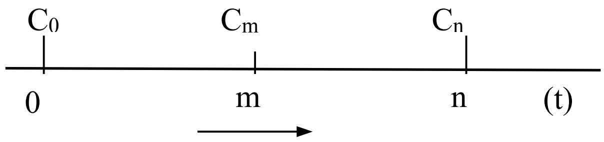
$$I = (1{,}0168 - 1{,}0)\cdot C_0 = 0{,}0168\cdot C_0$$

(2.8.6)

$$I = (1{,}2611 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}2611 \cdot C_0$$

dove si osserva che in questo regime il montante è inferiore ai corrispondenti ad interesse semplice e composto per tempi inferiori all'unità, e maggiore per tempi superiori a detta (2.3.3 – 2.5.4).

Come per la formazione del capitale scontato nel regime lineare, pure nella reciproca formazione del montante non c'è scindibilità. Infatti



$$C_n = \frac{C_0}{1 - dm} \times \frac{1}{1 - d(n - m)} \neq \frac{C_n}{1 - dn}$$

2.9 Il confronto fra i regimi finanziari usuali

Come già detto, il confronto fra i tre regimi finora analizzati può venir esaminato a parità di saggio d'interesse per i regimi a interesse semplice e composto, e con saggio d'interesse scontato per il regime di sconto commerciale.

I grafici sovrapposti dei tre regimi, sia per la posticipazione che per la anticipazione di un capitale unitario, danno questo confronto ed evidenziano quanto già dedotto dagli esempi numerici (Fig. 7). In particolare si nota e si ricorda che:

- per un periodo pari all'unità temporale di riferimento dei tassi (n=1), le tre funzioni danno lo stesso valore;
- per $0<n<1$ l'interesse I in regime di interesse semplice è maggiore di quello a interesse composto e di quello a sconto commerciale; i rapporti si invertono per $n>1$;
- per $0<n<1$ lo sconto o differenza D è minore in regime di sconto commerciale rispetto quelli ad interesse composto e semplice; i rapporti si invertono per n>1

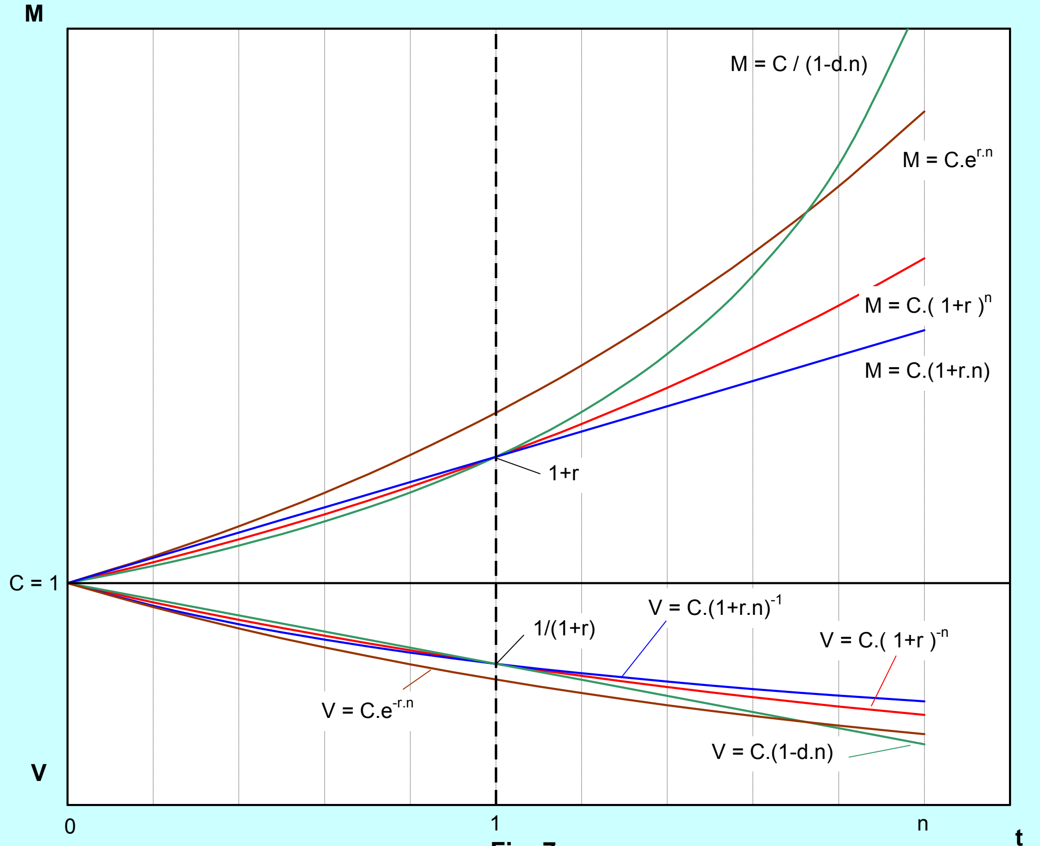


Fig. 7
confronto fra regimi di posticipazione M = f(t)
e fra regimi di anticipazione V = f(t)

Nella figura 7 è stata disegnata pure la geometria del regime finanziario istantaneo di cui ai paragrafi seguenti, sia per posticipare che per anticipare, per utile successivo confronto. Per questo regime occorre far notare che, per la formazione del montante e nell'ipotesi assunta a base del confronto di un tasso di sconto pari al saggio di interesse scontato, il regime istantaneo stà sopra quello dello sconto commerciale per tempi inferiori all'unità, ma che il rapporto si inverte fra $n = 1,5$ e $n = 2$. Ciò non risulta invece per tassi d'interesse e di sconto uguali $(d = r)$, dove la curva del montante dello sconto commerciale supera l'altra fin dall'inizio (Fig. 8). Ovviamente la situazione si inverte nei regimi reciproci, di anticipazione.

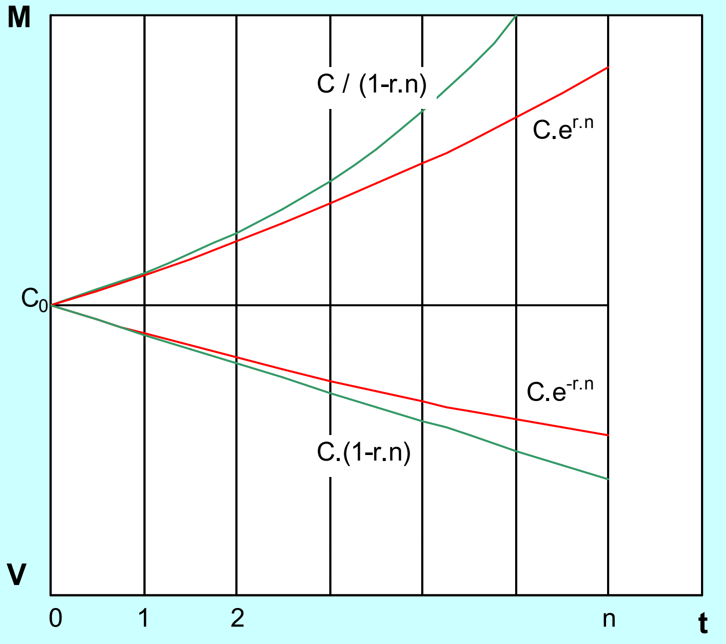


Fig. 8

Confronto fra: $M = C / (1-r.n)$ e $M = C.e^{r.n}$

Confronto fra: $V = C.(1-r.n)$ e $V = C.e^{-r.n}$

2.10 L'equivalenza dei saggi di interesse e di sconto

Dati due saggi differenti r_1 e r_2 (op. d_1 e d_2), riferiti a unità temporali discrete τ_1 e τ_2, diremo che essi sono equivalenti quando, relativamente allo stesso capitale e ad uno stesso tempo d'impiego t (multiplo di τ_1 e τ_2) danno effetti economici uguali.

Nei due regimi dell'interesse semplice e dello sconto commerciale ciò sarà quando (sia per montare che per scontare)

$$(2.10.1) \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

e quando, in regime di interesse composto

$$(2.10.2) \qquad (1 + r_1)^{t/\tau_1} = (1 + r_2)^{t/\tau_2} \qquad \text{e} \qquad (1 - d_1)^{t/\tau_1} = (1 - d_2)^{t/\tau_2}$$

Il problema è interessante nella formazione del montante in regime di interesse composto, quando gli interessi maturano più volte in un anno, e si aggiungono al capitale alla fine di ogni periodo. Se, ad esempio, gli interessi maturano k volte in un anno al tasso convenuto annuale r, si avrà dopo n anni e per un capitale unitario

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk} \rangle \ (1+r)^n$$

in quanto, per la formula del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = 1 + k\,\frac{r}{k} + \frac{k(k-1)}{2\,!} \times \left(\frac{r}{k}\right)^2 + \ldots$$

con gli addendi successivi al secondo tutti positivi. Sarà come aver impiegato il capitale ad un tasso effettivo annuale

(2.10.3) $$r' = \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} - 1 \quad \rangle \quad r$$

con un montante $C_n = C_0 \ (1+r')^n > C_0 \ (1+r)^n$

Ad esempio, se con una banca si è convenuto un interesse annuale del 6%, che matura però trimestralmente, si sarà ottenuto un saggio effettivo del

$$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4} - 1 \ = \ 0{,}0614 = 6{,}14\%$$

L'operazione viene detta effettuata al *"tasso annuo nominale r convertile k volte"* oppure al *"tasso effettivo annuale r' "*, oppure ancora *"al tasso annuo equivalente r' "*. Ovviamente l'unità temporale di riferimento può anche non essere annuale.

Se invece si conviene, sì, la maturazione dell'interesse k volte all'anno, ma in modo da non superare il saggio annuale convenuto r, che si vuole effettivo, si dovrà applicare ad ogni frazione di tempo un saggio $\frac{r''}{k}$ tale che

$$\left(1+\frac{r''}{k}\right)^{k} = 1 + r$$

(2.10.4) con $$r'' = \left[(1+r)^{1/k} - 1\right] \times k \quad \langle \quad r$$

Nell'esempio precedente $r'' = 0{,}0587 = 5{,}87\%$, con r'' detto *tasso annuo frazionabile k* volte.

In questo caso il montante sarà

$$C_n = C_0 \left(1+r\right)^n = C_0 \left(1+\frac{r''}{k}\right)^{k\,n}$$

Come già detto i tassi convertibili, effettivi e nominali, possono essere riferiti a periodi anche differenti dell'anno.

Sempre in regime di interesse composto, k può diventare sempre maggiore (ad es. k = 365 se gli interessi maturano ogni giorno, oppure k = 8.760 se maturano ogni ora) ed al limite può essere infinitamente grande. In tal caso, sviluppando la 2.10.3 come di seguito

$$r' = \left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1 = \left[\left(1+\frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right]^r - 1$$

e ricordando che la funzione $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ha un valore determinato per ogni valore di x tranne che per $x = 0$ e tende ad un limite finito, indicato con e (numero di Neper), quando x tende a $+\infty$, sarà per $k \to +\infty$

(2.10.5) $$r'(\infty) = \lim_{k/r \to \infty} \left[\left(1+\frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right]^r - 1 = e^r - 1$$

(2.10.6) $$C_n = C_0 \left(1+r'(\infty)\right)^n = C_0 \cdot e^{r\,n}$$

espressione che ci dà la formazione del montante in regime di interesse composto, con tasso annuale r che matura da istante a istante, cioè con *"tasso annuale r convertibile continuo"*, ovvero in "*regime finanziario continuo di capitalizzazione"* con tasso annuale effettivo r'.

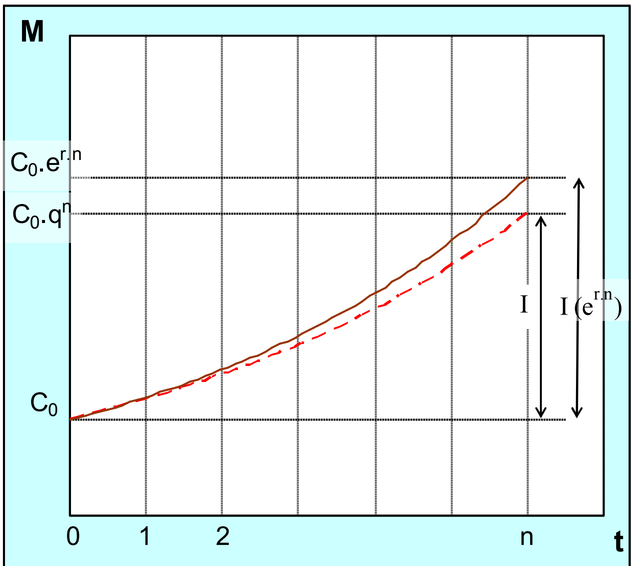


Fig. 9

M = f (t)

Confronto in regime di interesse composto

La geometria della funzione *M = f(t)* è evidenziata in figura 9 (a linea continua) dove (a tratto) è pure disegnata la corrispondente formazione del montante a interesse composto che, a parità di *r*, matura in modo tempisticamente discontinuo.

Il confronto con gli esempi fatti al cap, 2.5 si legge come segue

(2.10.7) $$M = C_0 \cdot e^{0{,}05 \cdot 127/365} = 1{,}0175\, C_0 \qquad \text{contro } 1{,}0171 \cdot C_o$$

$$M = C_0 \cdot e^{0{,}05\left(4 + 127/365\right)} = 1{,}2428\, C_0 \qquad \text{contro } 1{,}2363 \cdot C_0$$

(2.10.8) $$I = (1{,}0175 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}0175\, C_0 \qquad \text{contro } 0{,}0171 \cdot C_0$$

$$I = (1{,}2428 - 1{,}0) \cdot C_0 = 0{,}2428\, C_0 \qquad \text{contro } 0{,}2363 \cdot C_0$$

Analogamente, dalla 2.10.4 e sempre per $k \to +\infty$

(2.10.9)

$$r''(\infty) = \lim_{k \to \infty} \left[(1+r)^{1/k} - 1 \right] \cdot k = \lim_{1/k \to 0} \frac{(1+r)^{1/k} - 1}{\frac{1}{k}} = \lg_e (1+r) \quad = \delta$$

espressione che ci consente di determinare il tasso nominale *r''* (indicato in seguito con δ) che matura da istante a istante *(tasso istantaneo di interesse)*, equivalente però al tasso annuale convenuto *r*, e per la quale

(2.10.10) $$C_n = C_0 \left(1+r\right)^n = C_0 \cdot e^{\delta n} \quad \langle \quad C_0 \cdot e^{rn}$$

Per il calcolo delle espressioni precedenti si può ricorrere ai logaritmi, oppure a sviluppi in serie di Mac Laurin interrotti dopo il secondo termine, come segue

(2.10.11) $$r'(\infty) = e^r - 1 = 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots - 1 \cong r + \frac{r^2}{2} \quad \rangle \quad r$$

(2.10.12) $$r''(\infty) = \delta = \lg_e \left(1+r\right) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \cdots \cong r - \frac{r^2}{2} \quad \langle \quad r$$

Con il crescere di k la funzione $r' = f\left(k\right)$ è crescente e la $r'' = f\left(k\right)$ è decrescente, come del resto ovvio e confermato dai valori della tabella seguente

Interesse	k	r	r'	r''
annuale	1	0,06	0,06000	0,06000
semestrale	2	0,06	0,06090	0,05913
trimestrale	4	0,06	0,06136	0,05870
mensile	12	0,06	0,06168	0,05841
giornaliero	365	0,06	0,06183	0,05827
istantaneo	$+\infty$	0,06	0,06183	δ=0,05826

$r'' \leq r \leq r'$ $\qquad\qquad$ $r''\left(\infty\right) = \delta < r$

Va pure fatto osservare che se δ è riferito ad una unità temporale, ad es. ad un anno, sarà $\delta/2$ oppure $\delta/3$ il tasso istantaneo riferito al trimestre oppure al quadrimestre, cioè

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

Corrispondentemente a quanto considerato per la formazione del montante, e con la stessa progressione didattica, esaminiamo il problema dell'anticipazione o sconto di capitali, sempre in regime di interesse composto, quando le differenze maturano *k* volte in un anno al tasso convenuto annuale *d*. Con *n* anni di anticipazione e per un capitale unitario

$$\left(1-\frac{d}{k}\right)^{n\,k} > (1-d)^n$$

Sarà come aver scontato il capitale ad un tasso effettivo annuale

$$d' = 1-\left(1-\frac{d}{k}\right)^{k} \quad \langle \quad d \tag{2.10.13}$$

con un valore scontato

$$V = C_n \cdot (1-d')^n > C_n\,(1-d)^n$$

Se con una banca si è convenuto un tasso di sconto annuale del 6%, che matura però trimestralmente, si sarà adottato un tasso effettivo (*tasso di sconto annuale d convertibile k volte*) del

$$1-\left(1-\frac{0{,}06}{4}\right)^{4} = 0{,}0587 = 5{,}87\ \%$$

Se invece si conviene, sì, la maturazione dello sconto *k* volte all'anno, ma in modo tale da raggiungere il tasso annuale convenuto *d*, che si vuole effettivo, si dovrà applicare ad ogni frazione di tempo un saggio $\frac{d''}{k}$ tale che

$$\left(1-\frac{d''}{k}\right)^{k} = 1-d$$

$$\text{con} \qquad d'' = \left[\,1-(1-d)^{1/k}\,\right]\cdot k \ \rangle\ d \tag{2.10.14}$$

Nell'esempio precedente *d'' = 0,0614 = 6,14 %*, con *d''* detto anche *tasso di sconto nominale*.

In questo caso il valore scontato sarà

$$V = C_n\,(1-d)^n = C_n\left(1-\frac{d''}{k}\right)^{k\,n}$$

Inoltre, dalla 2.10.13

$$(2.10.15) \qquad d'(\infty) = \lim_{k/r \to \infty} 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{k/d} \right)^{k/d} \right]^d = 1 - e^{-d} \qquad \langle\, d$$

$$(2.10.16) \qquad V = C_n \left(1 - d'(\infty)\right)^n = C_n \cdot e^{-d\,n}$$

espressione che ci dà la formazione del capitale scontato in regime di interesse composto con tasso annuale *d* che matura da istante a istante, cioè con "*tasso annuale d convertibile continuo*", ovvero in "*regime finanziario continuo di anticipazione"* con tasso annuale effettivo *d'*.

Per questo regime di sconto le geometrie della *V = f(t)* nella versione continua (a linea continua) e discontinua (a tratto) sono riportate nella figura 10.

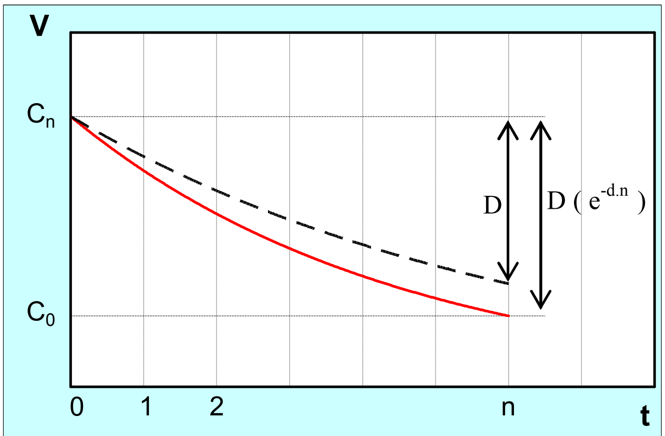


Fig. 10
V = f (t)
Confronto in regime di interesse composto

Il confronto con gli esempi del cap. 2.6 è il seguente

$$(2.10.17) \qquad V = C_n \cdot e^{-0{,}05 \cdot 127/365} = 0{,}9828 \cdot C_n \qquad \text{contro } 0{,}9832 \cdot C_n$$

$$V = C_n \cdot e^{-0{,}05\left(4 + 127/365\right)} = 0{,}8046 \cdot C_n \qquad \text{contro } 0{,}8089 \cdot C_n$$

$$(2.10.18) \qquad D = (1{,}0 - 0{,}9828) \cdot C_n = 0{,}0172\, C_n \qquad \text{contro } 0{,}0168 \cdot C_n$$

$$D = (1{,}0 - 0{,}8046) \cdot C_n = 0{,}1954\, C_n \qquad \text{contro } 0{,}1911 \cdot C_n$$

Inoltre, dalla 2.10.14

(2.10.19)

$$d''\left(\infty\right)=\lim_{k\to\infty}\left[1-\left(1-d\right)^{1/k}\right]\cdot k=-\lim_{1/k\to 0}\frac{\left(1-d\right)^{1/k}-1}{1/k}=-\lg_e\left(1-d\right)=\rho \quad \rangle\, d$$

espressione che ci consente di determinare il tasso nominale *d''* (in seguito indicato con ρ) che matura da istante a istante (*tasso istantaneo di sconto*), equivalente però al tasso annuale *d*, e per la quale

(2.10.20) $$V=C_n\left(1-d\right)^n=C_n\cdot e^{-\rho n} \quad \langle\, C_n\cdot e^{-dn}$$

ed ancora, approssimativamente

(2.10.21) $$d'\left(\infty\right)=1-e^{-d}\cong d-\frac{d^2}{2} \quad \langle\, d$$

(2.10.22) $$d''\left(\infty\right)=\rho=-\lg_e\left(1-d\right)\cong d+\frac{d^2}{2} \quad \rangle\, d$$

Con il crescere di *k* la funzione *d' = f(k)* e decrescente e la *d'' = f(k)* è crescente, come nella seguente tabella di valori

Anticipazione	*k*	*d*	*d'*	*d''*
annuale	1	0,06	0,06000	0,06000
semestrale	2	0,06	0,05910	0,06093
trimestrale	4	0,06	0,05866	0,06140
mensile	12	0,06	0,05838	0,06172
giornaliera	365	0,06	0,05824	0,06187
istantanea	$+\infty$	0,06	0,05823	ρ =0,06188

$$d''\geq d\geq d' \qquad\qquad d''\left(\infty\right)=\rho>d$$

A conclusione di questo paragrafo vogliamo far osservare che abbiamo esaminato l'equivalenza di saggi di interesse fra loro (riferiti a unità temporali diverse) e, separatamente, l'equivalenza di tassi di sconto fra loro (con la stessa precisazione).

L'equivalenza di saggi di interesse con tassi di sconto, ma nello stesso regime di interesse composto, è già stata determinata al par. 2.6 e può venir estesa alle considerazioni precedenti. Diremo cioè che un saggio di interesse convertibile *k* volte ed un tasso di sconto, pure convertibile *k* volte nella stessa unità temporale, sono equivalenti quando

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}=\left(1-\frac{d}{k}\right)^{-k} \tag{2.10.23}$$

Ciò significa che nella stessa frazione di tempo k i due tassi maturano lo stesso interesse, positivo e negativo.

Ad esempio, sempre con $r = 6{,}00\ \%$ e $k = 4$, risulta $d = 5{,}91\ \%$, e per contro occorre che sia $r = 6{,}09\ \%$ e sempre $k = 4$ perché risulti $d = 6{,}00\ \%$.

Al limite, per $k \to +\infty$

$$\delta = \lg_e(1+r) = \lg_e\frac{1}{1-d} = -\lg_e(1-d) = \rho \tag{2.10.24}$$

cioè per $r = 0{,}06$ e $d = 0{,}06/1{,}06$ si ha $\delta = \rho = 0{,}05826$, e per $d = 0{,}06$ e $r = 0{,}06\,(1-0{,}06)$ si ha $\delta = \rho = 0{,}6188$ (vedi i valori al limite nelle due tabelle). Quindi in *regime di capitalizzazione continua* i due tassi equivalenti coincidono ed i fattori di capitalizzazione e di sconto valgono rispettivamente $q = e^{\delta}$ e $v = e^{-\delta}$

2.11 Il regime finanziario istantaneo

Nelle 2.10.9 e 2.10.19 abbiamo individuato in δ e ρ i tassi costanti di interesse e di sconto che, maturando da istante a istante in un regime di interesse composto, sono equivalenti a tassi annuali *r* o *d*. Si tratta di un regime finanziario istantaneo, nel quale le variazioni del capitale impiegato sono infinitesime, così come i periodi di posticipazione o anticipazione, e sono disponibili alla fine di tali periodi. Nel paragrafo 1.1 abbiamo chiamato *"interesse"* o "*differenza*" queste variazioni di capitale, che possiamo anche intendere come proporzionali al capitale impiegato in un certo momento t ed al tasso δ e ρ, che pure possiamo intendere non costanti, bensì variabili in funzione del tempo e quindi definibili come tassi istantanei.

Pertanto, esaminando la formazione del montante e considerando un intervallo infinitesimo $t \div t + \Delta t$, interno ad un intervallo più ampio $0 - n$ nel quale sia il montante che il tasso istantaneo siano funzioni continue (ma indipendenti) di t, potremo scrivere

$$I = \Delta M(t) = M(t + \Delta t) - M(t) = M'(t) \cdot \Delta(t) + \varepsilon\, \Delta t$$

nella quale intendiamo l'interesse nell'intervallo infinitesimo Δt come differenziale della funzione $M = f(t)$, e dalla quale possiamo escludere l'infinitesimo $\varepsilon \cdot \Delta t$ in quanto di ordine superiore a Δt e con limite $\lim \varepsilon = 0$ per $\Delta t \to 0$. E ripetiamo che l'aumento che subisce in un intervallo Δt il montante $M(t)$ accumulato fino al momento t può essere ritenuto proporzionale sia a tale capitale accumulato, sia alla grandezza dell'intervallo temporale, sia ancora ad un coefficiente δ (t), che fra poco definiremo. Si tratta di una relazione simile a quella che definisce l'accumulazione I degli interessi nel regime di interesse semplice (2.3.2), con la differenza che questo I è proporzionale non al capitale iniziale, bensì al montante M(t) di quel capitale al tempo t.

Pertanto $$I = \Delta M(t) = M(t) \cdot \delta(t) \cdot \Delta t$$

E dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$

$$M'(t) = M(t) \cdot \delta(t)$$

equazione differenziale ordinaria di primo ordine con l'incognita nella funzione $M(t)$ della variabile t, di cui la risoluzione

$$\int \frac{M'(t)}{M(t)}\, dt = \int \delta(t) \cdot dt = \lg_e |M(t)| + c$$

e definendo l'integrale fra 0 e n e ricordando di aver sempre posto

per $t = 0$ $M = C_0 = 1$, e di conseguenza $\lg_e M(t = 0) = 0$

segue $$\lg_e M(0, n) = \int_0^n \delta(t)\, dt$$

$$M(0, n) = e^{\int_0^n \delta(t) \cdot dt}$$

e più generalmente, per C_0 qualunque

(2.11.1) $$M(n) = C_n = C_0 \cdot e^{\int_0^n \delta(t) \cdot dt}$$

espressione che ci dà la formazione del montante in *regime di capitalizzazione istantanea*, e che per δ = *costante*

(2.11.2) $$M\left(n\right) = C_n = C_0 \cdot e^{\delta \int_0^n dt} = C_0 \cdot e^{\delta\, n}$$

nella quale si riconosce la 2.10.10. Si tratta di una legge generale di capitalizzazione, esponenziale crescente e con concavità volta verso l'alto, ed in quanto esponenziale anche scindibile purché δ sia costante oppure funzione solo del tempo cioè ad una variabile. Chiameremo questo regime come *finanziario istantaneo*. La sua geometria è simile alle esponenziali (con esponente positivo) delle figure 7 e 9.

Le funzioni inverse dell'espressione precedente si ricavano facilmente attraverso i logaritmi.

Segue pure

(2.11.3) $$\delta\left(t\right) = \frac{M'\left(t\right)}{M\ (t)} = \frac{d}{dt}\,\lg_e\, M\left(t\right)$$

cioè il *tasso istantaneo di interesse è la derivata logaritmica del montante al tempo t e viene pure chiamato "intensità istantanea di interesse" o "forza di interesse".*

Nel caso dell'interesse composto, per δ = *cost.* e M (0) = 1, a riscontro della 2.10.9 e con lo sviluppo in serie logaritmica della 2.10.12

(2.11.4) $$\delta_{i,c} = \lg_e\left(1 + r\right) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \cdots \;\cong\; r - \frac{r^2}{2} \;\langle\; r$$

(2.11.5) $$r = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots \;\cong\; \delta + \frac{\delta^2}{2} \;\rangle\; \delta$$

dove, ovviamente, le approssimazioni valgono per valori ordinari, e non elevati, di δ e r.

Inoltre, invertendo i limiti dell'integrale nella 2.11.1, si ha

(2.11.6) $$V\left(n, 0\right) = C_0 = C_n \,.\, e^{\int_n^0 \delta(t)\cdot dt} = C_n \cdot e^{-\int_0^n \delta(t)\cdot dt}$$

espressione che ci dà la formazione del capitale scontato in regime finanziario istantaneo, e che per $\delta =$ *costante*

(2.11.7) $$V\left(n, 0\right) = C_0 = C_n \cdot e^{-\delta\, n}$$

nella quale si riconosce la 2.10.20, con la successiva precisazione della 2.10.24 che al limite $\delta = \rho$. Si tratta ancora di una legge generale, esponenziale decrescente con concavità rivolta verso l'alto, asintotica alle ascisse, scindibile, di geometria simile alle esponenziali (con esponente negativo) delle figure 7 e 10.

Per analogia con quanto dedotto per δ (t), potremo definire come "*intensità istantanea di sconto*" o *"forza di sconto"*

(2.11.8) $$\rho(t) = -\frac{V'(t)}{V(t)} = -\frac{d}{dt}\lg_e V(t)$$

e per ρ = *cost.* e *V (0) = 1*, a riscontro della 2.10.22

(2.11.9) $$\rho_{i,c} = -\lg_e(1-d) = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \cdots \cong d + \frac{d^2}{2} \rangle d$$

(2.11.10) $$d = 1 - e^{-\rho} = \rho - \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} - \frac{\rho^4}{4!} + \cdots \cong \rho - \frac{\rho^2}{2} \langle \rho$$

2.12 La forza di interesse e di sconto

Abbiamo già individuato la stretta corrispondenza fra il regime finanziario ad interesse composto ed il regime finanziario istantaneo. Ne abbiamo pure dedotto che, nel caso più generale della formazione del montante con δ costante, cioè per $\delta(t) = \delta$, questo tasso istantaneo di interesse vale (2.11.4)

(2.12.1) $$\delta_{i,c} = \lg_e(1+r) \cong r - \frac{r^2}{2}$$

e coincide con il già determinato tasso nominale *r''* (2.10.9), che matura da istante a istante e che è equivalente al tasso annuale *r*, nonché costante al variare del tempo. Il ché significa che questa intensità istantanea dell'interesse è sempre la stessa, indipendentemente dal montante del capitale in quell'istante e dal momento d'inizio dell'operazione.

Ora, dalla 2.11.1 intesa come legge generale, e dalla 2.11.3, possiamo determinare l'andamento dell'intensità istantanea di interesse (non necessariamente costante) in funzione dei tempi di operazione, una volta conosciuta l'espressione della formazione del montante, oppure viceversa.

Ad esempio, se assumiamo la legge finanziaria

$$M(t) = C_0(1 + rt) \qquad \text{(espressione del regime ad interesse semplice)}$$

avremo che per $M(0) = 1$ e $t = n$

$$\delta_{i,s}(t) = \frac{1}{1+rt} \cdot \frac{d}{dt}(1+rt) = \frac{r}{1+rt} = \frac{r}{1+rn} \tag{2.12.2}$$

dalla quale risulta che la forza (uguale a r per n = 0) decresce al crescere del tempo con andamento iperbolico e si estingue all'asintoto. Ciò significa che l'intensità istantanea dell'interesse si indebolisce man mano che il montante cresce; ciò che è anche intuitivo.

E se assumiamo che

$$M(t) = C_0 \frac{1}{1-dn} \qquad \text{(espressione del regime di sconto commerciale)}$$

Avremo, sempre con la 2.11.3 e con la 2.6.3

$$\delta_{s,c}(t) = \frac{d}{1-dn} = (1-dt) \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{1-dt} = \frac{d}{1-dt} = \frac{r}{1-r(n-1)} \tag{2.12.3}$$

dalla quale risulta che la forza (uguale a d per $n = 0$) cresce ad crescere del tempo ed al diminuire del capitale, e diventa infinitamente grande per $n = \frac{1}{d}$, così come in fig. 11, dove sono messe a confronto le tre leggi analizzate. Questo confronto ci fa notare come la scindibilità di un regime finanziario sia assicurata dalla indipendenza di un'operazione dal momento di un suo inizio o di una sua ripresa, cioè da δ =costante.

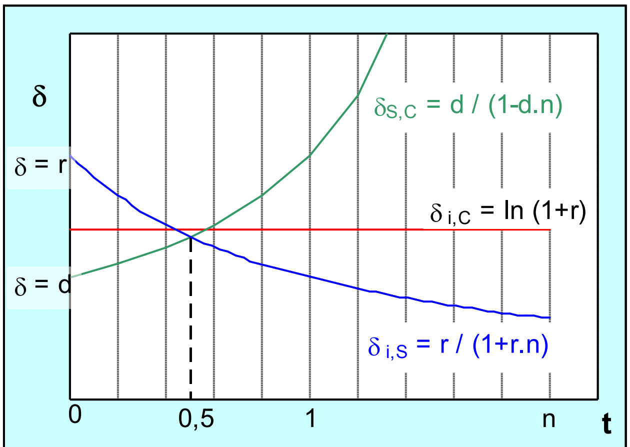


Fig. 11
Andamento della forza di interesse
nei regimi considerati

Ed ancora, se assumiamo al di fuori dei regimi usuali

$$M(t) = C_0 \, (1 + kn)^r$$

avremo una intensità $$\delta = \frac{k \cdot r}{1 + kn}$$

che per $k = 1$ ha un andamento uguale alla $\delta_{i,s}$ della fi. 11, e per $k \neq 1$ se ne discosta.

Per quanto riguarda la forza di sconto nei tre regimi considerati, e ricordando dalla 2.11.8 che

$$\rho \;(t) = -\frac{1}{V\,(t)} \cdot \frac{d}{dt} V(t)$$

e pure, dalle 2.10.24 e 2.11.9, che in regime di interesse composto il tasso istantaneo di interesse coincide con quello di sconto ed è

$$\rho_{i,c} = -\lg_e \, (1 - d) = \lg_e (1 + r) = \delta_{i,c}$$

si ottengono facilmente anche le

$$\rho_{\;i,s} \,(t) = \frac{r}{1 + rn} = \delta_{i,s} \,(t)$$

$$\rho_{\;s,c} \;(t) = \frac{d}{1 - dn} = \delta_{s,c} \,(t)$$

nonché $$\rho \; = \frac{kr}{1 + kn} = \delta$$

Va inoltre ricordato quanto già fatto osservare al Cap. 1.1 in merito ai tassi di interesse e di sconto *r*, *d*, ed ora anche per i tassi istantanei δ e ρ; per ragioni di omogeneità con i valori dei capitali e degli interessi essi sono numeri puri, senza dimensioni, ma correttamente vanno intesi come il reciproco di un tempo, cioè più che mai come delle intensità.

2.13 Formulario di sintesi

Posticipazione di capitali (saggio d'interesse *r*, tasso di sconto *d*)

Regime	Montante $M=f(t)$ per $t(0,n)$	Scindibilità	Tasso istantaneo di interesse δ
Interesse semplice	$C_n = C_0 \left(1+rn\right)$	no	$\frac{r}{1+rn}$
Interesse composto	$C_n = C_0 \left(1+r\right)^n$	si	$\lg_e \left(1+r\right)$
Sconto commerciale	$C_n = \frac{C_0}{1-dn}$	no	$\frac{d}{1-dn}$
Finanziario istantaneo $\delta=r=cost$	$C_n = C_0 \cdot e^{rn}$	si	$\lg_e \left(1+r\right)$
$\delta=f(t)$	$M(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^n \delta(t)\cdot dt}$	si	$\frac{d}{dt} \lg_e M(t)$

Anticipazione di capitali (saggio di interesse *r*, tasso di sconto *d*)

Regime	Valore scontato $M=f(t)$ per $t(0,n)$	Scindibilità	Tasso istantaneo di sconto ρ
Interesse semplice	$C_0 = \frac{C_n}{1+rn}$	no	$\frac{r}{1+rn}$
Interesse composto	$C_0 = \frac{C_n}{\left(1+r\right)^n}$	si	$\lg_e \left(1+r\right)$
Sconto commerciale	$C_0 = C_n \left(1-dn\right)$	no	$\frac{d}{1-dn}$
Finanziario istantaneo $\rho=d=cost$	$C_0 = C_n \cdot e^{-dn}$	si	$-\lg_e \left(1-d\right)$
$\rho=f(t)$	$V(t) = C_n \cdot e^{-\int_0^n \rho(t)\cdot dt}$	si	$-\frac{d}{dt} \lg_e V(t)$

2.14 Leggi finanziarie non usuali

In merito alle leggi finanziarie finora esaminate, e che danno la formazione del montante di un capitale o del valore scontato dello stesso in funzione del tempo, osserviamo trattarsi di leggi regolate da funzioni algebriche ad una variabile, considerabili solo per la parte collocata nel primo quadrante di un piano cartesiano, con *M* op. *V* eguali all'unità per

$t=0$ e $C_0 = 1$, monotòne non decrescenti o rispettivamente non crescenti, derivabili in ogni punto nel periodo di tempo considerato (per $t=0\text{-}n$). L'esistenza della derivata ci consente di individuare l'intensità istantanea dell'interesse o dello sconto per ogni n, intensità che potrà essere costante o variabile.

Altre funzioni che leghino fra loro capitali-tassi-tempo possono rappresentare leggi finanziarie, certamente non usuali, purché soddisfino a quelle proprietà. Tali sono, ad esempio, per montare e per scontare, le già considerate

$$M(t) = C_0\,(1+kn)^r \qquad\qquad V = C\,(1+kn)^{-r}$$

con $k \geq 0$, rappresentate nella Fig. 12 in confronto con il regime di interesse composto, e per le quali si verifica facilmente la non scindibilità, e pure che la forza di interesse e di sconto è inizialmente tanto maggiore quanto maggiore è il k, e poi decrescente con il progredire del tempo, con limite 0 per $n \to \infty$.

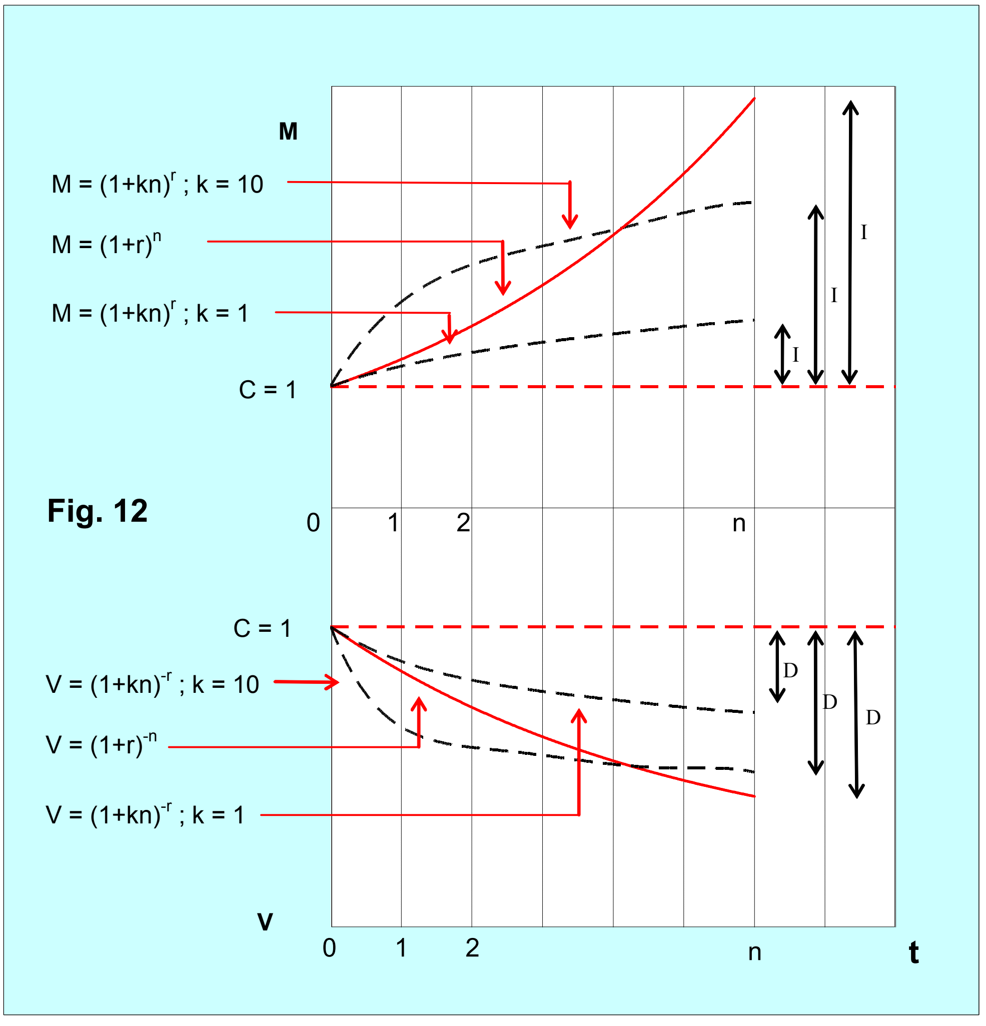


Fig. 12

Va ancora fatto notare che nella Fig. 12 le scale di *M = f(t)* e di *V = f(t)* sono differenti, al fine di evidenziare meglio gli andamenti delle funzioni; precauzione già adottata nei grafici dei regimi usuali.

2.15 L' uso bancario dei regimi usuali

Generalmente le banche utilizzano i regimi lineari per periodi brevi, non superiori all'anno; cioè l'interesse semplice per montare e lo sconto commerciale per scontare. Per periodi più lunghi si utilizza il regime ad interesse composto, sia per montare che per scontare.

Per periodi di più unità temporali *n'* nonché di frazioni di unità *n''* vengono pure utilizzati ambedue i regimi, in modo misto, come segue (Fig. 13)

$$C_{n'+n''} = C_0\, q^{n'} + C_0 q^{n'} \times r \times n'' = C_0\, q^{n'}\left(1 + rn''\right) > C_0\, q^{n'+n''}$$

Ad esempio, al saggio del 5% e per l'esempio già portato in 2.5.4, si ha

$$M = C_0 \times 1{,}05^4 \left(1 + 0{,}05 \times \frac{127}{365}\right) = 1{,}2367 \times C_0 \rangle \quad 1{,}2363 \times C_0$$

Analogamente per scontare

$$V_{n'+n''} = \frac{C}{q^{n'}}\left(1 - dn''\right) \rangle \frac{C}{q^{n'+n''}}$$

In relazione all'esempio ad 2.6.4:

$$V = C \times \frac{1}{1{,}05^4}\left(1 - \frac{0{,}05}{1{,}05} \times \frac{127}{365}\right) = 0{,}8091 \times C \rangle \ 0{,}8089 \times C$$

Nel caso dei conti correnti il regime misto viene generalmente adottato dalle Banche raggruppando giorno per giorno tutte le operazioni di uguale valuta e moltiplicandone il saldo per il numero dei giorni intercorrenti fino al saldo successivo. Alla sommatoria di questi numeri su un periodo prefissato (3, 4, 6, 12 mesi o altro) vengono applicati i tassi creditori e debitori convenuti per tale periodo, determinando gli interessi da portare algebricamente a valor capitale alla fine dello stesso. Va ancora ricordato che le banche usano un tasso creditorio per il cliente disgiunto da quello debitorio del cliente verso la banca nei casi di sconfinamento dei conti correnti, od in genere nelle somme prestate dalla banca al cliente. Non valgono quindi, nella pratica bancaria, le relazioni 2.4.3 e 2.6.3.

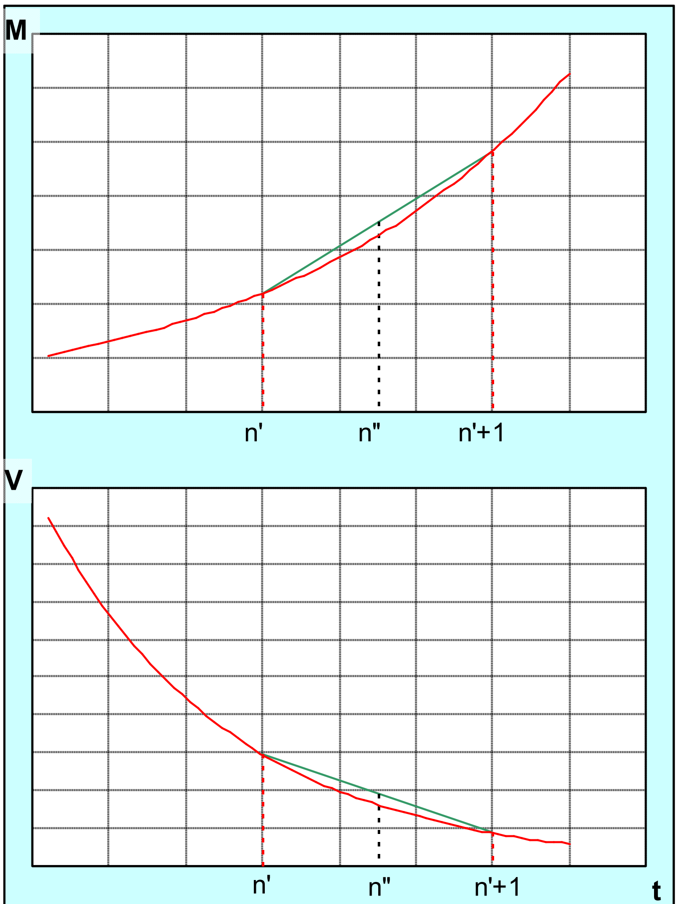


Fig. 13
capitalizzazione M = f(t) e sconto V = f(t)
in regime bancario misto

Nel caso di tassi convenuti differenti, ma costanti per sottoperiodi di un periodo più lungo d'impegno, non sarà difficile trovarne i montanti oppure i valori scontati con regimi usuali. E' il caso del negozio detto "a tasso variabile", in cui il tasso potrebbe pure variare istantaneamente con legge $\delta = f(t)$, riportandoci alle espressioni 2.11.1 e 2.11.6.

Va ancora detto che per ciò che riguarda il regime finanziario istantaneo, nell'uso bancario esso non è conosciuto, e pertanto l'esposizione fattane sembra solo teorica. Ciò di fatto non è, in quanto in vari ambiti economici gli incrementi algebrici del capitale sono istantanei, e così pure i loro effetti sul reddito e quindi sulla stima dei valori dei capitali che producono reddito in quel modo. Si pensi ad esempio alle produzioni industriali a ciclo continuo ed alle produzioni culturali in genere.

Capitolo 2°

ESERCIZI E QUESITI RISOLTI

1 - Un capitale C = 1.000 viene depositato in banca all'interesse semplice del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare: a) degli interessi dopo un anno; b) del montante dopo un anno.

a) $I = C_0 \cdot r = 1.000 \cdot 0{,}05 = 50$

b) $M = C_0 + I = C_0 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot q = 1.000 \cdot 1{,}05 = 1.050$

2 - Un capitale C = 1.000 viene depositato in banca per 90 giorni all'interesse semplice del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare : a) degli interessi; b) del montante.

a) $I = C_0 \cdot r \cdot n = 1.000 \cdot 0{,}05 \cdot (90 / 365) = 12{,}39$

b) $M = C_0 + C_0 \cdot r \cdot n = C_0 \cdot (1 + r \cdot n) = 1.012{,}39$

3 - A quanto ammonterà, tra 10 anni, il capitale C = 1.000 investito in titoli al saggio del 5%?

$M = C_0 \cdot q^n = 1.000 \cdot 1{,}05^{10} = 1.629{,}00$

Se l'interesse non fosse composto, cioè se gli interessi non venissero reinvestiti e quindi non maturassero altri interessi, il montante sarebbe inferiore: 1.500,00.

4 - Il canone annuo di un appartamento è suddiviso in due rate anticipate di importo 6.000 ciascuna. A quanto ammonta l'affitto percepito dal proprietario, riferito a fine anno se r = 5%?

$C_a = 6.000 \cdot (1 + 0{,}05) + 6.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 1 / 2) = 6.000 \cdot 1{,}05 + 6.000 \cdot 1{,}025 = 12.450{,}00$

5 - Viene acquistato un nuovo computer pagato in 2 rate di importo 2.000, la prima alla consegna e la seconda dopo due anni. Quanto costa il computer al momento attuale supponendo r = 6%?

$2.000 + 2.000 \cdot 1/1{,}06^{2} = 3.780{,}00$

6 - Trovare il saldo al 15 settembre di un anno ordinario (non bisestile) di un conto corrente con tasso creditorio del 4% e debitorio del 8%, in regime di interesse semplice, con un primo versamento di un capitale 100,00 al 15 febbraio di quell'anno, un prelevamento di 150,00 al 15 maggio ed un versamento di 100,00 al 15 luglio, con valuta al giorno dell'operazione.

Nell'ipotesi di regime lineare fra le singole frazioni di tempo

Valuta	Saldi per valuta	Giorni	Numeri	Tasso
15/02	100,00	89	8.900,00	0,04
15/05	-50,00	61	-3.050,00	0,08
15/07	50,00	62	3.100,00	0,04
15/09	50,00			

Interessi: $(12.000{,}00 \cdot 0{,}04 - 3.050 \cdot 0{,}08) : 365 = 0{,}6465$ al lordo della ritenuta fiscale

Saldo al 15/09 c.s.: 50,65

7 - Al saggio del 5% annuo, uguale per tutti i regimi, dopo quanto tempo (in anni e decimi di anno) un capitale unitario raddoppia in regime di interesse semplice, composto, sconto commerciale, finanziario istantaneo? A che limite tende il montante in regime di sconto commerciale quando il tempo tende al valore 20 ?

$M(i,s) = C_0 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) = 2C_0$ n = 20,00

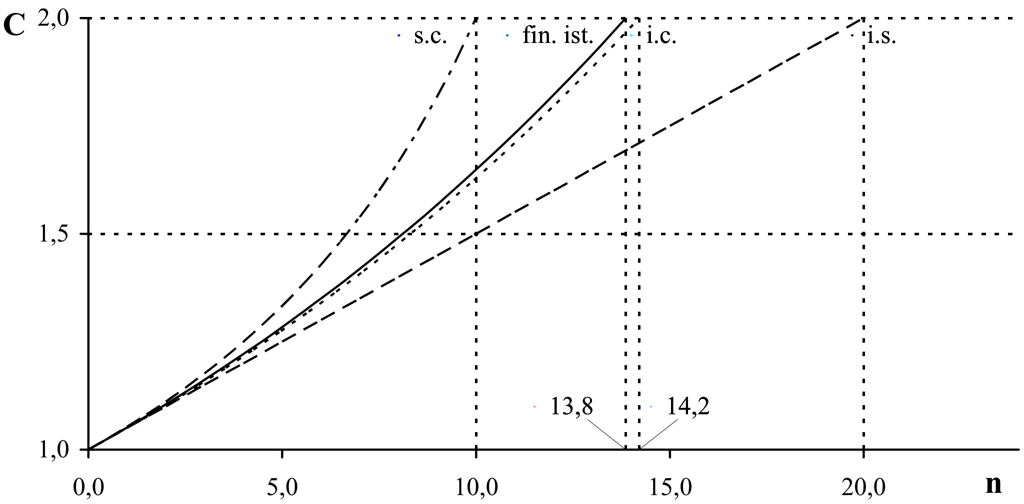
$M(i,c) = C_0 \cdot (1+0{,}05)^n = 2C_0$ n = log 2,0 : log 1,05 = 14,207

$M(s,c;\, d=0{,}05) = \dfrac{C_0}{1-0{,}05\cdot n} = 2C_0$ n = 10,00

$M(s,c;\, d=0{,}05/1{,}05) = \dfrac{C_0}{1-\dfrac{0{,}05}{1{,}05}\cdot n} = 2C_0$ n = 10,50

$M(s,c;\, d=0{,}05;\, n=20) = \dfrac{C_0}{1-0{,}05\cdot 20} = +\infty$

$M(\text{fin.ist.}) = C_0 \cdot e^{0{,}05\cdot n} = 2C_0$ n = ln 2,0 : 0,05 = 13,863



8 - Qual è il saggio annuo di interesse al quale è stato impiegato un capitale $C_0 = 100$ che in 10 anni si è raddoppiato; nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ?

$M(i,C_0) = 200 = 100\cdot(1+10\cdot r);$ r = 0,100

$M(i,C) = 200 = 100\cdot(1+r)^{10};$ $10\cdot\log(1+r) = \log 2;$ $r = 10^{0{,}0301} - 1 = 0{,}0717$

$M(s,C) = 200 = \dfrac{100}{1-10d};$ $1-10d = 0{,}5;$ $d = 0{,}050$

$M(\text{fin.ist.}) = 200 = 100\cdot e^{10\cdot r};$ $10\cdot r = \log 2;$ $r = 0{,}0693$

9– Al tasso di sconto del 8% annuo, uguale per tutti i regimi, di quanto tempo (in anni e decimi di anno) occorre anticipare un capitale unitario perché il suo valore si dimezzi, nei quattro regimi di cui all'esercizio precedente? A che limite tende questo valore in regime di sconto commerciale quando il tempo *n* tende al valore 12,5 ?

$$V(i,s) = 0{,}5 \cdot C = \frac{C}{1 + 0{,}08 \cdot n}; \qquad n = 12{,}500$$

$$V(i,c) = 0{,}5 \cdot C = C \cdot 1{,}08^{-n}; \qquad n \cdot \log 1{,}08 = \log 2; \qquad n = 9{,}006$$

$$V(s,c) = 0{,}5 \cdot C = C \cdot (1 - 0{,}08 \cdot n); \qquad n = 6{,}250$$

$$V(s,c; n = 12{,}5) = C \cdot (1 - 0{,}08 \cdot 12{,}5) = 0{,}000$$

$$V(\text{fin.ist.}) = 0{,}5 \cdot C = C \cdot e^{-0{,}08 \cdot n}; \qquad 0{,}08 \cdot n = \ln 2; \qquad n = 8{,}664$$

10 - Per quanto tempo (in anni e decimi di anno) due capitali $C_1 = 100$ e $C_2 = 80$ debbono essere impiegati rispettivamente al saggio annuo del 5% e del 8%, per ottenere lo stesso montante nei quattro regimi di cui all'esercizio 7 ?

$$M(i,s) = 100 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) = 80 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot n); \qquad n = 14{,}286$$

$$M(i,c) = 100 - 1{,}05^{n} = 80 \cdot 1{,}08^{n}; \qquad n \cdot \log \frac{1{,}08}{1{,}05} = \log 1{,}25; \qquad n = 7{,}921$$

$$M(s,c) = \frac{100}{1 - 0{,}05 \cdot n} = \frac{80}{1 - 0{,}08 \cdot n}; \qquad n = 5{,}000$$

$$M(\text{fin.ist.}) = 100 \cdot e^{0{,}05 \cdot n} = 80 \cdot e^{0{,}08 \cdot n}; \quad 1{,}25 = e^{0{,}03 \cdot n}; \quad 0{,}03 \cdot n = \ln 1{,}25; \qquad n = 7{,}438$$

11 - Qual è il tempo (in anni e decimi di anno) di anticipazione di due capitali $C_1 = 100$ e $C_2 = 80$, scontati rispettivamente del tasso annuo del 8% e del 5%, per ottenere lo stesso valore, nei quattro regimi di cui all'esercizio 7 ?

$$V(i,s) = \frac{100}{1 + 0{,}08 \cdot n} = \frac{80}{1 + 0{,}05 \cdot n}; \qquad n = 14{,}286$$

$V(i,c) = 100 \cdot 1{,}08^{-n} = 80 \cdot 1{,}05^{-n}; \qquad n \cdot (\log 1{,}08 - \log 1{,}05) = 1{,}25 \qquad\qquad n = 7{,}921$

$V(s,c) = 100 \cdot (1 - 0{,}08 \cdot n) = 80 \cdot (1 - 0{,}05 \cdot n); \qquad\qquad n = 5{,}000$

$V(\text{fin.ist.}) = 100 \cdot e^{-0{,}08 \cdot n} = 80 \cdot e^{-0{,}05 \cdot n}; \; 1{,}25 = e^{0{,}03 \cdot n}; \quad 0{,}03 \cdot n = \ln 1{,}25 \qquad\qquad n = 7{,}438$

12 - Qual è la relazione n_1/n_2 fra i tempi di impiego dello stesso capitale ai saggi rispettivamente r_1 e r_2 (uguali per tutti i regimi) perché si formi lo stesso montante,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ?

$M(i,s) = C_0 \cdot (1 + r_1 \cdot n_1) = C_0 \cdot (1 + r_2 \cdot n_2); \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1}$

$M(i,c) = C_0 \cdot (1 + r_1)^{n_1} = C_0 \cdot (1 + r_2)^{n_2}; \; n_1 \cdot \log(1 + r_1) = n_2 \cdot \log(1 + r_2); \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\log q_2}{\log q_1}$

$M(s,c; d = r) = \frac{C_0}{1 - r_1 \cdot n_1} = \frac{C_0}{1 - r_2 \cdot n_2}; \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1}$

$M(s,c; d = r/q); \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{r_2 \cdot q_1}{r_1 \cdot q_2}$

$M(\text{fin.ist.}) = C_0 \cdot e^{r_1 \cdot n_1} = C_0 \cdot e^{r_2 \cdot n_2}; \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1}$

13 - Qual è la relazione n_1/n_2 fra i tempi di anticipazione dello stesso capitale ai tassi rispettivamente del 3% e del 6%, perché si ottenga lo stesso valore scontato,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti?

$V(i,s) = \frac{C}{1 + 0{,}03 \cdot n_1} = \frac{C}{1 + 0{,}06 \cdot n_2}; \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = 2{,}000$

$V(i,c) = (1 + 0{,}03)^{-n_1} = (1 + 0{,}06)^{-n_2}; \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\log 1{,}06}{\log 1{,}03} = 1{,}971$

$V(s,c) = C \cdot (1 - 0{,}03 \cdot n_1) = C \cdot (1 - 0{,}06 \cdot n_2); \qquad\qquad \frac{n_1}{n_2} = 2{,}000$

$$V(\text{fin.ist.}) = C \cdot e^{-0,03 \cdot n_1} = C \cdot e^{-0,06 \cdot n_2}; \qquad \frac{n_1}{n_2} = 2,000$$

14 - Un capitale C = 100 viene impegnato in un'operazione finanziaria della durata di due anni al saggio del 4% annuo per i primi 6 mesi, del 5% per i secondi 6 mesi, e del 6% per l'anno successivo. Quale sarà il montante al termine dei due anni,nei quattro regimi di cui agli esercizi precedenti ?

$$M(i,s) = 100 + 100 \cdot (0,5 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,05 + 0,06) = 110,50$$

$$M(i,c) = 100 \cdot 1,04^{0,5} \cdot 1,05^{0,5} \cdot 1,06 = 110,77$$

$$M(s,c) = 100 + 100 \cdot \left(\frac{0,5 \cdot 0,04}{1 - 0,5 \cdot 0,04} + \frac{0,5 \cdot 0,05}{1 - 0,5 \cdot 0,05} + \frac{0,06}{1 - 0,06} \right) = 110,99$$ (a Σ di montanti)

$$M(s,c) = 100 \cdot \frac{1}{1 - 0,5 \cdot 0,04} \cdot \frac{1}{1 - 0,5 \cdot 0,05} \cdot \frac{1}{1 - 0,06} = 111,73$$ (a montante continuo)

$$M(\text{fin.ist.}) = 100 \cdot e^{0,5 \cdot 0,04} \cdot e^{0,5 \cdot 0,05} \cdot e^{0,06} = 111,07$$

15 - Qual è il saggio di interesse trimestrale equivalente ad un saggio semestrale del 3%, in regime di interesse semplice, composto, sconto commerciale ?

$$(i,s): r_3 = 0,03 \cdot \frac{3}{6} = 0,0150$$

$$(i,c): (1 + r_3)^{\frac{6}{3}} = 1,03; \quad r_3 = 1,03^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0149$$

$$(s,c): d_3 = 0,03 \cdot \frac{3}{6} = 0,0150$$

16 - Un capitale C = 100 viene impiegato per 8 anni al tasso del 5% in regime a interesse semplice posticipato oppure in regime istantaneo al tasso $\partial = \dfrac{0,05}{1 + 0,05 \cdot t}$. Qual è il montante? Cosa si osserva?

$M(i,s) = 100 \cdot (1 + 8 \cdot 0{,}05) = 140$

$M(\text{fin.ist.}) = 100 \cdot e^{\int_0^8 \delta(t) \cdot dt}$ con $\delta(t) = \dfrac{0{,}05}{1 + 0{,}05 \cdot t}$

Ricordando che $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ ed essendo che $\dfrac{d}{dt}(1 + 0{,}05 \cdot t) = 0{,}05$

segue che $\int_0^8 \dfrac{0{,}05}{1 + 0{,}05 \cdot t} dt = \ln|1 + 0{,}05 \cdot t|_0^8 = \ln 1{,}40$

da cui $e^{\ln 1{,}40} = 1{,}40$ e $M = 100 \cdot 1{,}40 = 140$

Si osserva che i due montanti sono uguali. La forza dell'interesse nel regime a interesse semplice nasce con *r* all'origine e decresce nel tempo secondo la $\dfrac{r}{1 + r \cdot t}$.

17 - Un capitale C = 100 viene impiegato per 4 anni, oppure per 8 anni, al tasso del 5% in regime di interesse composto. Qual è il tasso δ che in regime finanziario istantaneo dà lo stesso montante? Cosa si osserva ?

$M(i, c, 4\,\text{anni}) = 100 \cdot 1{,}05^4 = 121{,}5506$ $\delta = \ln(1 + r) = \ln 1{,}05 = 0{,}04879$

$M(\text{fin.ist.}, 4\,\text{anni}) = 100 \cdot e^{4\delta} = 121{,}5506$

$M(i, c, 8\,\text{anni}) = 100 \cdot 1{,}05^8 = 147{,}7455$

$\delta = 0{,}04879$

$M(\text{fin.ist.}, 8\,\text{anni}) = 100 \cdot e^{8\delta} = 147{,}7455$

Nel regime a interesse composto la forza dell'interesse è costante, pari al ln(1+r).

18 - Un capitale C=100 viene impiegato per 8 anni al tasso del 5% in regime di sconto commerciale, oppure in regime di capitalizzazione istantanea al tasso $\partial = \dfrac{0{,}05}{1 - 0{,}05 \cdot t}$.

Qual è il montante? Cosa si osserva ?

$$M(s,c)=\frac{100}{1-8\cdot 0{,}05}=166{,}\overline{6}$$

$$M(\text{fin.ist.})=100\cdot e^{\int_0^8 \delta(t)\cdot dt} \qquad \text{con } \delta(t)=\frac{0{,}05}{1-0{,}05\cdot t} \quad ; \qquad \text{essendo}$$

$$\frac{d}{dt}(1-0{,}05\cdot t)=-0{,}05$$

segue che $\int_0^8 \frac{0{,}05}{1-0{,}05\cdot t}dt=-\ln\left|1-0{,}05\cdot t\right|_0^8=-\ln 0{,}6$

da cui $e^{-\ln 0{,}6}=1{,}\overline{6}$ e $M=100\cdot 1{,}\overline{6}=166{,}\overline{6}$

Si osserva che i due montanti sono uguali. La forza dell'interesse nel regime di posticipazione a sconto commerciale nasce all'origine con *d* e cresce nel tempo secondo la $\frac{d}{1-d\cdot n}$.

19 - Un capitale C = 1.000 con valuta fra otto anni viene scontato all'attualità in regime di interesse semplice (sconto razionale) al tasso del 5%, oppure in regime finanziario istantaneo al tasso $\rho=\frac{0{,}05}{1+0{,}05\cdot t}$. Qual è il valore del capitale scontato? Cosa si osserva?

$$V(i,s)=\frac{1000}{1+8\cdot 0{,}05}=714{,}2857$$

$$V(\text{fin.ist.})=1000\cdot e^{-\int_0^8 \rho(t)dt} \qquad \text{con } \rho(t)=\frac{0{,}05}{1+0{,}05\cdot t}dt$$

essendo $\frac{d}{dt}(1+0{,}05\cdot t)=0{,}05$ segue che $\int_0^8 \frac{0{,}05}{1+0{,}05\cdot t}dt=\ln\left|1+0{,}05\cdot t\right|_0^8=\ln 1{,}40$

da cui $V(\text{fin.ist.})=1000\cdot e^{-\ln 1{,}40}=714{,}2857$

Vale quanto già fatto notare con lo stesso regime ma in movimento di posticipazione.

20 - Un capitale C = 1.000 con valuta fra 4 anni, oppure 8 anni, viene scontato alla attualità al tasso del 5% in regime di interesse composto. Qual è il tasso ρ che in regime finanziario istantaneo dà lo stesso valore scontato? Cosa si osserva ?

$$V(i,c,4\,anni) = 1000 \cdot 1{,}05^{-4} = 822{,}7024$$

$$\rho = \ln(1+0{,}05) = \ln 1{,}05 = 0{,}04879$$

$$V(fin.ist.,4\,anni) = 1000 \cdot e^{-4\cdot\rho} = 822{,}7024$$

$$V(i,c,8\,anni) = 1000 \cdot 1{,}05^{-8} = 676{,}8393$$

$$V(fin.ist.,8\,anni) = 1000 \cdot e^{-8\cdot\rho} = 676{,}8393$$

Vale quanto già fatto notare con le stesso regime ma in movimento di posticipazione.

21 - Un capitale C = 1.000 con valuta fra otto anni viene scontato alla attualità al tasso del 5% in regime di sconto commerciale, oppure in regime finanziario istantaneo al tasso $\rho = \dfrac{0{,}05}{1-0{,}05\cdot t}$. Qual è il valore del capitale scontato? Cosa si osserva ?

$$V(s,c) = 1000 \cdot (1 - 8 \cdot 0{,}05) = 600{,}00$$

$$V(fin.ist.) = 1000 \cdot e^{-\int_0^8 \rho(t)dt} \qquad \text{con } \rho(t) = \frac{0{,}05}{1-0{,}05\cdot t} \qquad \int_0^8 \rho(t)dt = -\ln 0{,}6$$

da cui $V(fin.ist.) = 1000 \cdot e^{\ln 0{,}6} = 600{,}00$

Vale quanto già fatto notare con lo stesso regime ma in movimento di posticipazione.

22 - Esaminare se la funzione $M(t) = C_0 \cdot (1 + kn^r)$ con $k \geq 0$ può essere una legge finanziaria per la formazione di un montante e, in caso positivo, se è scindibile e quale ne sia l'andamento della forza di interesse.

Si tratta di funzione che per $r \geq 0$ è monotona crescente nel primo quadrante, con $M = C_0$ per n = 0, e pertanto associabile ad un regime finanziario di posticipazione, non scindibile in quanto per $0 < m < n$

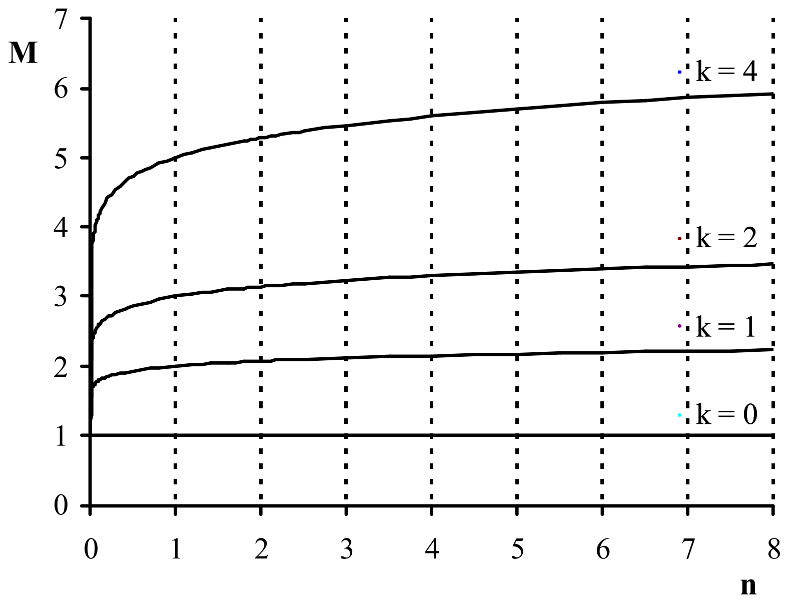
$$\left(1+k\cdot m^r\right)\cdot\left[1+k\cdot(n-m)^r\right]\neq 1+k\cdot n^r$$

L'intensità istantanea dell'interesse è

$$\delta(t)=\frac{M'(t)}{M(t)}=k\cdot r\cdot\frac{n^{r-1}}{1+k\cdot n^r}=k\cdot r\cdot\frac{1}{n^{1-r}+k\cdot n}$$

ed è molto forte all'origine e poi decresce e tende a 0.

Come si vede dal diagramma della M = f(t) il capitale monta rapidamente per tempi brevissimi, fino ad un anno, e poi ha variazioni crescenti debolmente.



23 - Esaminare, con le modalità del quesito precedente, se la funzione $V(t)=C\cdot\left(1+kn^r\right)^{-1}$ con $k\geq 0$ può essere una legge finanziaria per la formazione del valore scontato di un capitale.

Si tratta di una curva che per $r\geq 0$ è monotona decrescente nel primo quadrante, con V = C per n = 0, e pertanto associabile ad un regime finanziario di anticipazione, non scindibile in quanto per $0<m<n$

$$\left[1+k\cdot(n-m)^r\right]^{-1}\cdot\left(1+k\cdot m^r\right)^{-1}\neq\left(1+k\cdot n^r\right)^{-1}$$

L'intensità istantanea di sconto è

$$\rho(t)=-\frac{V'(t)}{V(t)}=\frac{k\cdot r}{n^{1-r}+k\cdot n}$$

e valgono per essa le considerazioni fatte nell'esercizio precedente per la forza d'interesse nel movimento di posticipazione.

24 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0 \cdot (1+2n)^r$ con r = 0,05, determinare la forza d'interesse all'inizio di una operazione e dopo un anno dall'inizio.

Ricordiamo che $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$. Quindi si ha

$$\delta = \frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{r \cdot (1+2 \cdot n)^{r-1} \cdot 2}{(1+2 \cdot n)^r} = \frac{2 \cdot r}{1+2 \cdot n}$$

per $n = 0 \rightarrow \delta = 0{,}10$ per $n = 1 \rightarrow \delta = 0{,}0\overline{3}$

25 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0 \cdot e^{0,04+0,08 \cdot t}$ determinare la forza d'interesse.

Ricordando che $\frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$ si ha

$$\delta = \frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{f'(t) \cdot e^{f(t)}}{e^{f(t)}} = 0{,}08$$

26 - Data la legge finanziaria $M(t) = C_0 \cdot e^{0,04+0,02t+0,01 \cdot t^2}$ determinare la forza d'interesse all'inizio dell'operazione e dopo un anno dall'inizio.

Con riferimento a quanto ricordato all'esercizio precedente

$$\delta(t) = \frac{M'(t)}{M(t)} = 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}01 \cdot t = 0{,}02 + 0{,}02 \cdot t$$ da cui

per $t = 0 \rightarrow \delta = 0{,}02$ e per $t = 1 \rightarrow \delta = 0{,}04$

27 - Scrivere la legge di capitalizzazione in regime finanziario istantaneo in cui la forza d'interesse è costante 0,06.

La costanza della forza d'interesse porta a considerare una legge esponenziale del tipo

$$M(t) = C_0 \cdot (1+r)^t$$

con $\delta = \ln(1+r)$,   da cui $1 + r = e^{\delta}$, e

$$M(t) = C_0 \cdot e^{\delta \cdot t} = C_0 \cdot e^{0,06 \cdot t}$$

28 - Scrivere la legge di sconto in regime finanziario istantaneo in cui la forza di sconto è costante 0,06.

La costanza della forza di sconto porta a considerare una legge esponenziale del tipo

$V(t) = C \cdot (1+r)^{-t}$ con $\rho = -\ln(1+r)$ da cui $1 + r = e^{-\rho}$ e

$$V(t) = C \cdot e^{-\rho \cdot t} = C \cdot e^{-0,06 \cdot t}$$

29 - Scrivere la legge di capitalizzazione in regime finanziario istantaneo in cui la forza di interesse è variabile linearmente secondo la $\delta = 0,04 + 0,02 \cdot t$.

Dalla $\quad M(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^n (t)\cdot dt}$

essendo $\int_0^n (0,04 + 0,02 \cdot t)dt = 0,04 \cdot t + 0,02\dfrac{t^2}{2}$ (per t da 0 a n)

sarà $\quad M(t) = C_0 \cdot e^{0,04 \cdot t + 0,01 \cdot t^2}$

30 - Determinare numericamente la legge finanziaria $M(t) = C_0 \cdot (1 + r \cdot t)$ in cui dopo 18 mesi dall'inizio dell'operazione la forza di interesse è 0,06.

Si tratta di regime ad interesse semplice, in cui la forza d'interesse è decrescente secondo la

$$\delta(t) = \frac{r}{1 + r \cdot t}$$

Ipotizzando la r riferita ad un anno si ha

$$\delta = \frac{r}{1 + 1{,}5 \cdot r} \qquad \text{da cui } r = 0{,}0659$$

E pertanto $M(t) = C_0 \cdot (1 + 0{,}0659 \cdot t)$

31 - Determinare numericamente la legge finanziaria V(t) = C(1-dt) in cui con 18 mesi di anticipazione la forza di sconto è 0,06.

Si tratta di regime di sconto commerciale, in cui la forza di sconto è crescente secondo la

$$\rho(t) = \frac{d}{1 - d \cdot t}$$

Ipotizzando la *d* riferita ad un anno si ha

$$\rho = \frac{d}{1 - 1{,}5 \cdot d} = 0{,}06 \qquad \text{da cui } d = 0{,}0550$$

e pertanto $\qquad V(t) = C \cdot (1 - 0{,}0550 \cdot t)$

Capitolo 3°

LE ANNUALITA'

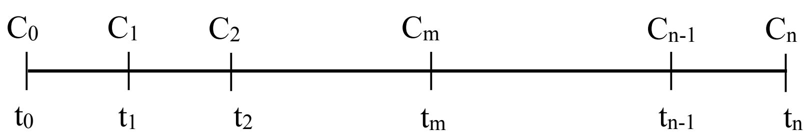
3.1 L'operazione di rendita

Vanno generalmente sotto questo nome delle operazioni finanziarie che mettono in relazione, in condizioni di certezza, un unico importo riferito ad un tempo preciso con una successione di importi esigibili o disponibili ad intervalli temporali solitamente uguali. Gli intervalli sono generalmente (ma non necessariamente) di un anno, da cui il termine tradizionale di *annualità*, mentre gli importi possono essere uguali o diversi tra loro, cioè costanti oppure variabili, e pure di scadenza posticipata o anticipata rispetto l'intervallo di riferimento, se l'operazione finanziaria si rivolge nel discreto e non nel continuo.

L'operazione finanziaria di rendita ha un valore che, in ogni preciso momento, consiste nella *accumulazione finanziaria (A)* dei vari importi (capitali), chiamati *annualità* (a_i), oppure *rate* o *termini*, trattati secondo i regimi di posticipazione e di anticipazione che abbiamo conosciuto al capitolo 2°.

Alla base concettuale dell'argomento sta il principio di equivalenza di valore fra due o più coppie di capitali, associati alla loro valuta e legati da una legge (regime finanziario) che consenta di dare questi giudizi. Diremo quindi che più capitali $C_1, C_2, \dots C_m$ con valuta in $t_1, t_2, \dots t_m$ sono equivalenti tra loro quando i loro montanti in un momento $t_n \geq t_m$, oppure il loro valore scontato in un inizio operativo $t_0 \leq t_1$, sono uguali fra loro e quindi scambiabili.

Ovviamente il momento temporale di riferimento può anche essere intermedio tra l'inizio ed il termine dell'operazione, ciò che comporta l'associazione di movimenti di posticipazione e di anticipazione.



Si tratta di scegliere quindi, fra quelli che abbiamo studiato al capitolo 2°, quei regimi finanziari che abbiano reciprocità fra movimenti di posticipazione e di anticipazione e che consentano l'interruzione e la ripresa dell'operazione senza mutare i risultati finali. Abbiamo rilevato che fra i regimi usuali l'unico che gode di entrambe queste caratteristiche è quello esponenziale ad interesse composto, per montare e scontare con tasso costante r su periodi finiti, e nel qual abbiamo chiamato con q il fattore di capitalizzazione e con $v = q^{-1}$ il fattore di sconto. Nel caso invece che, anziché ad r si faccia riferimento ad una intensità costante δ, saranno e^{δ} e rispettivamente $e^{-\delta}$ detti fattori, che abbiamo conosciuto nel regime finanziario istantaneo. Preciseremo ai paragrafi 3.9 e 3.10 le possibilità di impiego degli altri regimi e ci riferiamo pertanto e per ora solo al regime esponenziale predetto

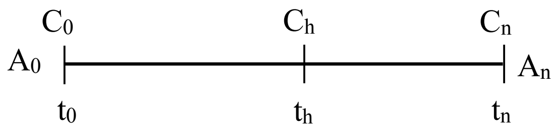
Ritornando alle due coppie di valori $C_1(t_1)$ e $C_2(t_2)$ potremo quindi dire che esse sono equivalenti, e quindi scambiabili, quando

$$C_1 \cdot q^{t_2 - t_1} = C_2 \qquad \text{o rispettivamente} \qquad C_1 = C_2 \cdot \nu^{(t_2 - t_1)}$$

oppure quando $C_1 \cdot e^{\delta(t_2 - t_1)} = C_2$ o rispettivamente $C_1 = C_2 \cdot e^{-\delta(t_2 - t_1)}$

Va da sé che alla base di ogni procedimento di stima dei valori gestiti in un'operazione, sia essa su tempi limitati o illimitati, sta l'assunzione di un saggio d'interesse r, con particolare attenzione ai problemi di equivalenza qualora si operi su sottoperiodi (par. 2.10), o rispettivamente di una intensità istantanea δ costante, nel caso si operi con il regime istantaneo. L'assunzione di una δ variabile comporta il dover valutare attentamente la scindibilità del regime.

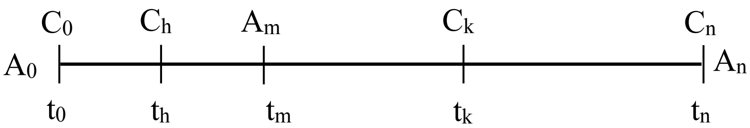
In merito a quanto enunciato all'inizio di questo paragrafo sullo scambio di un unico importo con un insieme di altri importi in successione tra loro, potremo accumulare finanziariamente, in uno dei due termini dell'uguaglianza delle due coppie esaminate, gli altri importi e scrivere:



(3.1.1) $$A_n = \sum_0^n {}_h C_h \cdot q^{(t_n - t_h)} \qquad \text{op} \qquad A_n = \sum_0^n {}_h C_h \cdot e^{\delta(t_n - t_h)}$$

(3.1.2) $$A_0 = \sum_0^n {}_h C_h \cdot \nu^{(t_h - t_0)} \qquad \text{op} \qquad A_0 = \sum_0^n {}_h C_h \cdot e^{-\delta(t_h - t_0)}$$

Valgono pure, in un momento t_m intermedio qualunque:



$$(3.1.3) \quad A_m = \sum_{0}^{m} {}_h C_h \cdot q^{(t_m - t_h)} + \sum_{m+1}^{n} {}_k C_k \cdot \text{v}^{(t_k - t_m)}$$

$$A_m = \sum_{0}^{m} {}_h C_h \cdot e^{\delta(t_m - t_h)} + \sum_{m+1}^{n} {}_k C_k \cdot e^{-\delta(t_k - t_m)}$$

$$A_m = A_n \cdot \text{v}^{(t_n - t_m)} = A_0 \cdot q^{t_m}$$

Ne risulterà quindi che il bilancio generale dell'operazione, inteso come differenza tra i due termini dell'uguaglianza, se è nullo all'inizio o al termine dell'operazione sarà nullo pure in qualunque momento intermedio. Va ripetuto inoltre che i vari importi (*annualità*, *rate*, *termini*) potranno essere positivi o negativi, rappresentando così incassi o pagamenti per l'operatore finanziario. L'operazione di rendita avrà quindi un suo valore V che sarà la A_0 se riferito all'inizio dell'operazione, A_n se riferito alla fine, oppure ancora A_m se il riferimento viene fatto in un momento intermedio.

Del caso più generale, cioè non solo di rendite discrete che maturano su periodi pure discreti oppure con continuità, bensì di flussi continui di rendita, in particolare se costanti, si dirà al successivo par 3.7.

3.2 Rendita, reddito, valore

Come già detto fin dalla presentazione d'inizio, lo scopo di questa didattica finanziaria è quello di fornire gli elementi soprattutto matematici per affrontare i problemi estimativi in fase di stima analitica e formulare giudizi di valore su beni o investimenti che hanno determinate redditività.

Con queste premesse va quindi ricordato che nell'estimo, sia esso civile o rurale, o industriale o speciale, il concetto di *reddito* è legato ad un flusso di ricchezza derivante da una attività economica che può avere tanti aspetti. La produttività di un bene, intesa come differenza fra prodotto lordo e spese di produzione, porta alla determinazione del suo *valore* attraverso l'accumulazione, in un certo momento, di tutte le sue annualità di reddito.

Altro significato ha invece estimativamente il concetto di *rendita*, da intendersi sempre come flusso di ricchezza, ma indipendentemente dalla produttività del bene. Sono tali ad esempio la rendita fondiaria, la rendita edilizia, ed in generale tutti i plusvalori di un bene provocati dalla sua irriproducibilità o da altri fattori, analizzati e discussi nei testi di Estimo.

Ci rendiamo conto che questi concetti estimativi contrastano con il significato che abbiamo dato all'operazione di rendita nel paragrafo precedente, ma ci è parso doveroso affrontare questo chiarimento per non lasciare incertezze su quanto esporremo in seguito. Continueremo quindi a chiamare *operazione di rendita* l'operazione finanziaria nel suo complesso, e con *annualità (o rate o termini)* la successione degli importi, disponibili alle *scadenze t*.

Cogliamo l'occasione per precisare un altro concetto che riteniamo molto importante. Ogni valutazione estimativa basata su metodo analitico e non su stima sintetica storica, guarda alla produttività futura del bene, cioè alla serie di annualità di reddito ipotizzabili in modo più certo possibile per il futuro, per un tempo da considerare limitato od anche illimitato. Fa parte della statistica, e non della matematica delle finanze, l'analisi dei valori rilevati nel passato, senza nulla togliere all'importanza di questi valori per ipotizzare quelli da lanciare nel futuro.

3.3 Le annualità

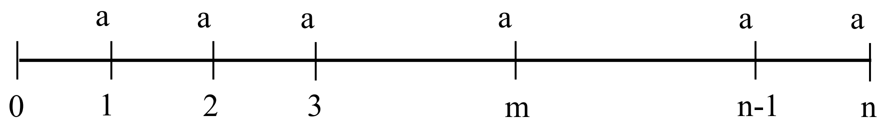
Per semplicità letterale ed immediatezza di comprensione chiameremo con $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_{n-1}, a_n$ le varie *annualità (o termini, o rate)* dell'operazione, generalmente discrete e ad intervallo temporale costante di un anno (*periodo*) e chiameremo *valore V* dell'operazione, o montante *M* della stessa, l'accumulazione finanziaria *A* delle varie annualità in un momento qualunque dell'operazione stessa. Se l'intervallo non è di un anno (minore o maggiore), ma per esigenze di bilancio od altre il riferimento debba essere quello, sappiamo ormai come trattare l'equivalenza dei tassi.

Inoltre si vorrà notare che sulla retta del tempo abbiamo segnato, a seconda della necessità dell'argomento trattato, i momenti temporali $t_1, t_2, \ldots t_m$ di valutazione o scadenza dell'operazione finanziaria, oppure i numeri naturali *1, 2, ...m* che indicano la fine del competente periodo (*intervallo*). Sarà ovvia la corrispondenza fra le due grafie, nel senso, ad es., che il periodo *emmesimo* inizia in t_{m-1} e si conclude in t_m, così come t_0 indica l'inizio del primo periodo e di tutta l'operazione, e t_n la fine del periodo *n* e dell'operazione stessa.

Esamineremo quindi le seguenti tipologie di annualità

$$annualità \left[\begin{array}{l} limitate \\ (temporanee) \\ \\ \\ illimitate \\ (perpetue) \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} periodiche \left[\begin{array}{l} posticipate \\ anticipate \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} costanti \\ \\ variabili \left[\begin{array}{l} con\ legge \\ senza\ legge \\ con\ periodicità \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \\ continue \left[\begin{array}{l} flusso\ costante \\ flusso\ variabile \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3.4 Annualità periodiche costanti, limitate



Come già detto, si tratta di valori uguali che si presentano a intervalli di tempo costanti e generalmente di anno in anno. Se questi valori maturano alla fine di ogni intervallo (o periodo) per una serie limitata di *n* intervalli, sarà semplice trovarne l'accumulazione finanziaria in *n* oppure in *0*, oppure ancora in un qualunque *m*, montando o scontando ogni valore nell'ambito del regime esponenziale che abbiamo già giustificato, e salvo quanto si dirà ai par. 3.9 e 3.10 per gli altri regimi. Sarà quindi, in base alle 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e ricordando l'espressione della somma dei termini in una progressione geometrica di ragione q oppure v

(3.4.1) $A_n = a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^{n-2} + ...a \cdot q + a = a\left(1 + q + q^2 + ...q^{n-2} + q^{n-1}\right) = a \cdot \frac{q^n - 1}{r}$

(3.4.2) $A_0 = a \cdot v + a \cdot v^2 + ...a \cdot v^{n-1} + a \cdot v^n = a \cdot v\left(1 + v + v^2 + ...v^{n-1}\right) =$

$$= a \cdot v \frac{v^n - 1}{v - 1} = a \frac{1 - v^n}{r} = a \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{A_n}{q^n}$$

(3.4.3) $A_m = \frac{A_n}{q^{n-m}} = A_n \cdot v^{n-m} = A_0 \cdot q^m$

intendendosi che A_m rappresenta il valore, alla fine del turno *m*, di tutta la serie di *n* annualità, così come A_0 ne rappresenta il valore all'origine, e non corrisponde quindi (salvo per m = n) al valore V_m di cui si dirà al par. 4.1.

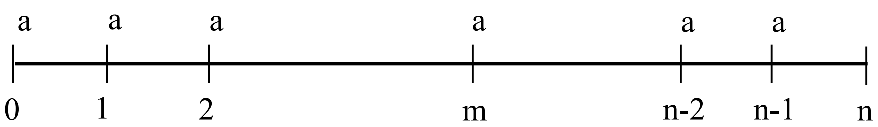
Si può calcolare la A_n (3.4.1) anche più semplicemente, considerando che gli interessi annuali $C_0 \cdot r$ di un capitale iniziale C_0, impiegato in regime d'interesse composto, si accumulano all'anno n come una serie di annualità costanti per dare il valore già ricavato nella 2.5.3

$$I = C_0\left(q^n - 1\right) = \frac{C_0 \cdot r \cdot \left(q^n - 1\right)}{r} = a\frac{q^n - 1}{r} = A_n$$

o similmente, per la 3.4.2, considerando che un capitale iniziale C_0, impiegato come detto sopra, è equivalente al valore attuale della accumulazione degli interessi oltre al valore scontato dello stesso C_0 che viene restituito al termine dell'operazione.

Risulta inoltre: $\frac{A_n}{A_0} = q^n \qquad \frac{A_0}{A_n} = \nu^n$

Qualora i valori considerati si presentino anticipatamente in ogni intervallo di tempo considerato, non sarà difficile riconoscere che le espressioni precedenti si riferiscono all'accumulazione dell'anno *n-1*, per cui:



(3.4.4) $$A_n^x = A_n \cdot q = a \cdot \frac{q^n - 1}{r} \cdot q$$

(3.4.5) $$A_0^x = A_0 \cdot q = a \cdot \frac{1 - \nu^n}{r} \cdot q = a \cdot \frac{1 - \nu^n}{r \cdot \nu} = a \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^{n-1}} = \frac{A_n^x}{q^n}$$

(3.4.6) $$A_m^x = A_n^x \cdot \nu^{n-m} = A_0^x \cdot q^m$$

3.5 Annualità periodiche costanti, illimitate (perpetue)

Non ha significato economico parlare di accumulazione o montante all'anno n di una serie di annualità quando n tende all'infinito ($A_n = \infty$). Ha significato invece chiederci quale sia il valore attuale di quella accumulazione, cioè il valore attuale di un bene capace di fruttare un reddito costante a al termine di ogni anno (o di ogni periodo cui riferiamo il tasso d'interesse). Il caso è tipico nei beni naturali. Pertanto dalla 3.4.2

$$(3.5.1) \quad C = A_0 = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{a}{r} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{a}{r}$$

Allo stesso risultato si può giungere dalla $A_0 = a \cdot \frac{1 - \nu^n}{r}$ ricordando che per $0 < \nu < 1$ il $\lim_{n\to\infty} \nu^n = 0$, o, più semplicemente, chiedendosi quale sia quel capitale che, impegnato al saggio r, dà annualmente un reddito a

$$C \cdot r = a \rightarrow C = A_0 = \frac{a}{r}$$

La semplice espressione trovata per la capitalizzazione dei redditi perpetui viene usata nell'estimo anche quando n, pur non potendo dirsi infinito, è molto grande, ad esempio nel reddito di fabbricati in buon stato di conservazione. La Fig. 14, elaborata per un reddito unitario, è significativa in proposito; si osserva pure che le differenze diminuiscono temporalmente più velocemente con l'aumentare del saggio d'interesse.

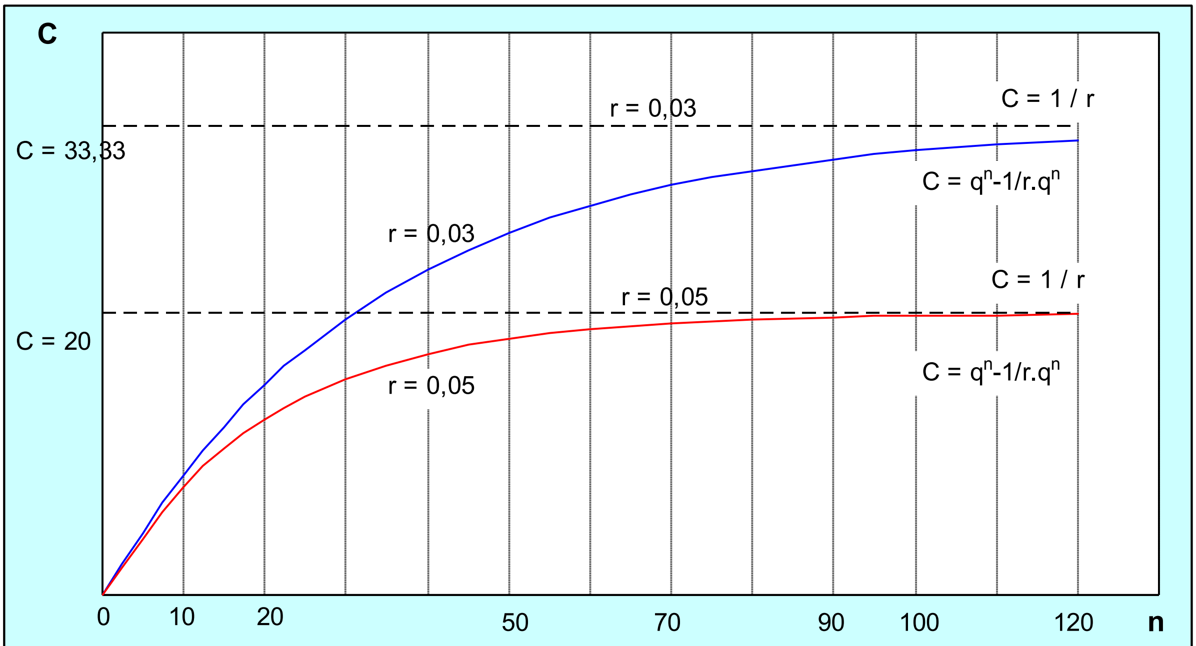


Fig. 14

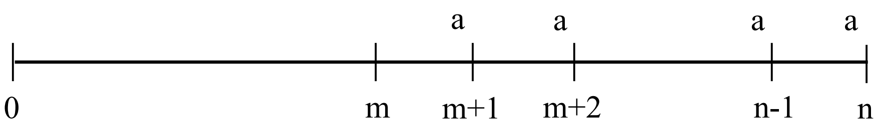
Confronto fra: $C = a / r$ e $C = a.(q^n-1)/(r.q^n)$ per $a = 1$

Nel caso delle annualità anticipate (inconsueto) l'espressione 3.5.1 va moltiplicata per il fattore di capitalizzazione q.

Non trattiamo, né qui né in seguito, i casi in cui $r = 0$ o addirittura $-1 < r < 0$ in quanto finanziariamente inconsueti.

3.6 Annualità periodiche differite

Nel caso in cui intercorra un certo tempo *m* dal momento della valutazione all'inizio della sequenza delle annualità, non sarà difficile riconoscere le espressioni seguenti, valide per annualità posticipate.



(3.6.1) $$A_n = a \cdot \frac{q^{n-m} - 1}{r}$$

(3.6.2) $$A_m = a \cdot \frac{1 - \nu^{n-m}}{r} = a \cdot \frac{q^{n-m} - 1}{r \cdot q^{n-m}} = \frac{A_n}{q^{n-m}}$$

(3.6.3) $$A_0 = A_n \cdot \nu^n = A_m \cdot \nu^m$$

e nel caso di annualità illimitate

(3.6.4) $$A_0 = \frac{a}{r} \cdot \nu^m$$

Nel caso di annualità anticipate vale quanto già detto al capitolo precedente.

3.7 Annualità frazionate e continue

Abbiamo già più volte chiarito che gli intervalli di tempo cui si riferiscono i valori che abbiamo chiamato annualità non sono necessariamente di un anno; il periodo può essere qualunque, minore o maggiore, purché venga associato ad un suo tasso unitario. Pertanto, anche se frazioniamo l'anno in k sottoperiodi uguali, ed associamo a ciascuno di essi un valore $\frac{a}{k}$ nonché un tasso r_k, e operiamo sempre in regime di interesse composto, potremo utilizzare le 3.4.1 e 3.4.2 riferentesi a n periodi annuali, per determinare il montante o accumulazione finale dell'operazione, oppure il suo valore iniziale.

(3.7.1) $$A'_n = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1 + r_k)^{nk} - 1}{r_k}$$

(3.7.2) $$A'_0 = \frac{a}{k} \cdot \frac{1 - \nu_k^{nk}}{r_k} = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1 + r_k)^{nk} - 1}{r_k \cdot (1 + r_k)^{nk}} = \frac{A'_n}{q_k^{nk}}$$

dove $\quad q_k = 1 + r_k \quad$ e $\quad \nu_k = q_k^{-1}$

Con considerazioni analoghe a quelle del paragrafo 3.5 si potrà scrivere, nel caso $n \to \infty$, che il valore capitale di un bene capace di dare *k* volte in un anno un reddito $\frac{a}{k}$, posticipato ed al tasso r_k, sarà

(3.7.3) $\quad C' = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{r_k}$

Sono di facile deduzione tutti gli altri casi, di annualità anticipate e/o differite. Abbiamo marcato con l'apostrofo le due somme economiche A_n' e A_0' per porle a confronto con le espressioni corrispondenti delle annualità intere 3.4.1 e 3.4.2 . Infatti, prefissato il tasso r_k riferito ad ogni sottoperiodo, possiamo calcolare il tasso equivalente annuale r' (o del periodo intero) dalla 2.10.3 .

$$r' = (1 + r_k)^k - 1$$

ed inoltre, notando che se poniamo $r'' = k \cdot r_k$, essendo r'' il tasso annuale frazionabile *k* volte

(3.7.1')
$$A_n' = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1+r_k)^{nk} - 1}{r_k} = \frac{a}{k} \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r''/k} = a \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r'} \cdot \frac{r'}{r''} = A_{n,r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

ed analogamente

(3.7.2')
$$A_0' = a \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r' \cdot (1+r')^n} \cdot \frac{r'}{r''} = a \cdot \frac{1 - \nu'^n}{r'} \cdot \frac{r'}{r''} = A_{0,r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

(3.7.3')
$$C' = \frac{a}{r'} \cdot \frac{r'}{r''}$$

Cioè le espressioni del montante e del valore attuale di una serie di annualità frazionate possono ottenersi da quelle fondamentali, calcolate con il tasso annuale equivalente

r', moltiplicate per il fattore di correzione $\frac{r'}{r''}$. Il fattore di correzione diventa $\frac{r'}{r''} \cdot (1 + r')^{1/k}$ nel caso di disponibilità anticipata di una frazione *1/k* della $\frac{a}{k}$.

Va ancora chiarito che la funzione $\frac{1}{k}$, generalmente inferiore all'unità, potrebbe essere anche superiore, anche se il caso è finanziariamente inconsueto. Non sarà difficile anche in questo caso calcolare le accumulazioni volute.

Ad esempio, per una annualità di valore 100, corrisposta trimestralmente con il relativo interesse r_k del *2%*, e quindi con un interesse annuale equivalente *r'* del *8,24 %* (contro un $r'' = 4 \cdot r_k = 0{,}08$), su di un impegno di 10 anni, si otterrà una accumulazione

$$A_n = \frac{100}{4} \cdot \frac{1{,}02^{40} - 1}{0{,}02} = 100 \cdot \frac{1{,}0824^{10} - 1}{0{,}0824} \cdot \frac{0{,}0824}{0{,}08} = 1510{,}050$$

Oppure, fissato un tasso annuale r' = 8,00% non superabile, per cui

$$r'' = \left[(1 + r')^{1/4} \right] \cdot k = 0{,}0777$$

e r_k = 0,0194, sarà, sempre per l'esempio precedente

$$A_n = \frac{100}{4} \cdot \frac{1{,}0194^{40} - 1}{0{,}0194} = 100 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} \cdot \frac{0{,}08}{0{,}0777} = 1491{,}422$$

Ovviamente si possono dedurre anche le funzioni inverse, di cui si dirà al prossimo paragrafo, applicando l'inverso del fattore di correzione.

Ed inoltre, ricordando che in regime esponenziale di capitalizzazione continua, cioè con $k \to \infty$, il tasso annuale convertibile $r''(\infty) = \delta = ln(1 + r)$, il fattore di capitalizzazione è e^{δ} e quello di sconto $e^{-\delta}$, si potranno scrivere le seguenti espressioni per una serie limitata di annualità in cui il flusso del reddito $\varphi(t)$ è costante e continuo (*rendita continua*), e tale che

$$\int_0^1 \varphi(t) \cdot dt = \int_m^{m+1} \varphi(t) \cdot dt = \varphi$$

(3.7.4) $$\overline{A}'_n = A_n \cdot \frac{r'}{\delta} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$

(3.7.5) $$\overline{A}'_0 = A_0 \cdot \frac{r'}{\delta} = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$$

e per le annualità illimitate

(3.7.6) $\overline{A}'_0 = \overline{C}' = \dfrac{\varphi}{\delta}$

Nell’esempio di cui sopra, ma con reddito disponibile con continuità, con valore complessivo e costante 1 ogni anno ed il tasso del 8%, si ha un valore attuale 6,975, che diventa 12,994 se anche $n \to \infty$.

Si tratta quindi di un flusso continuo di reddito, positivo o negativo nonché costante o variabile, indicato finanziariamente anche come “*rendita continua*” nel quale la funzione $\varphi(t)$ rappresenta *l’intensità* o *densità* del flusso per ogni unità di tempo (giorno, mese, anno, ecc.), per il quale si può calcolare il montante o il valore attuale (oppure il valore in un momento intermedio) con l’applicazione dei regimi finanziari che conosciamo, anche con quello finanziario istantaneo.

Nel caso di questo paragrafo, cioè dell’applicazione del regime ad interesse composto, le espressioni 3.7.4 e 3.7.5 sono ricavabili anche dalle 3.1.1 e 3.1.2 per un flusso continuo $\varphi(t)$, portando la sommatoria in integrale.

(3.7.7) $\overline{A}_n = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{\int_t^{t_n} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$ e per δ = cost. e φ = cost.

$$= \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\delta \cdot (t_n - t)} \cdot dt = \varphi \cdot e^{\delta \cdot t_n} \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta \cdot t_n} - 1}{\delta}$$

che per n periodi di capitalizzazione diventa la 3.7.4.

(3.7.8) $\overline{A}_0 = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^{t} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$ e come sopra

$$= \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\delta \cdot t} \cdot dt = \varphi \cdot \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot t_n}}{\delta}$$

che per $t_n = n$ diventa la 3.7.5.

3.8 Le funzioni inverse

Ci riferiamo alle espressioni principali 3.4.1, 3.4.2, e 3.5.1, essendo le successive deducibili da quelle. Nessuna difficoltà per trovare il valore dell'annualità *a* a servizio dell'ammortamento di un debito iniziale $C = A_0$, o della costituzione di un capitale A_n, in funzione del numero n delle rate e con un tasso r.

$$(3.8.1) \quad a = A_n \cdot \frac{r}{q^n - 1} = A_0 \frac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = A_0 \cdot \frac{r}{1 - \nu^n}$$

$$(3.8.2) \quad \text{per annualità illimitate} \qquad a = A_0 \cdot r = C \cdot r$$

Nessuna difficoltà neppure per il numero n in funzione degli altri termini dati.

$$(3.8.3) \quad n = \frac{lg(a + A_n \cdot r) - lg\, a}{lg\, q} = \frac{lg\, a - lg(a - A_0 \cdot r)}{lg\, q} \qquad (\text{ove } a > A_0 \cdot r)$$

Ovviamente nel caso delle annualità illimitate $n = \infty$

Il numero n è però generalmente non intero, bensì decimale, per cui occorre provvedere o variando l'importo dell'annualità per difetto o per eccesso, oppure aggiungendo o togliendo all'ultima rata un importo complementare.

Ad es. per l'ammortamento di un debito iniziale *C = 1.000* in rate annuali di importo *100* al tasso del *5%* si ha:

$$n = \frac{\lg 100 - \lg(100 - 1.000 \cdot 0{,}05)}{\lg 1{,}05} = 14{,}207$$

Con 14 annualità si porta in ammortamento un capitale attuale $C' = 100 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-14}}{0{,}05} = 989{,}86$; la rimanenza, di valore attuale $C - C' = 10{,}14$, portata a montante dopo *14* anni, rappresenta un importo di *20,08* da aggiungersi all'ultima rata.

La variazione della rata annuale, con *n = 14*, porterebbe invece ad una nuova rata

$$a' = 1.000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}1 - 1{,}05^{-14}} = 101{,}02$$

Gli aggiustamenti possono venir fatti anche altrimenti, secondo usanze di vari Istituti di Credito, ma senza difficoltà. Analogamente, con le conoscenze fin qui acquisite, si tratta il problema della costituzione di un capitale dopo n anni.

La ricerca del saggio r, alla base di un'operazione finanziaria d'ammortamento a capitale iniziale $C = A_0$ a rate a costanti e posticipate, su anni n, porta ad analizzare la 3.4.2

$$\frac{A_0}{a} = \nu + \nu^2 + ...\nu^n$$

dove , con $r = 0 \rightarrow \nu = 1 \rightarrow \frac{A_0}{a} = n$, e dove $\lim_{r \to \infty} \frac{1-\nu^n}{r} = 0$

La grafica della $r = f\left(\frac{A_0}{a}\right)$ per un n prefissato è quella di figura 15 che, per quanto si dirà, viene usualmente utilizzata inversamente (figura 16), e che ci dice trattarsi di funzione monotòna decrescente e quindi con un solo valore di r per ogni ascissa A_0/a. Operando come segue

$$\frac{A_0}{a} = \frac{1-\nu^n}{r} = \frac{\left\lfloor 1-(1+r)^{-n} \right\rfloor \cdot (1+r)^n}{r \cdot (1+r)^n} = \frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n}$$

si giunge all'equazione

$$\frac{A_0}{a} \cdot r \cdot (1+r)^n - (1+r)^n + 1 = 0$$

che dà una soluzione positiva per ogni $n > \frac{A_0}{a}$, ma che nel caso concreto di $n > 3$ non riusciamo a risolvere algebricamente. Si ricorre pertanto a metodi approssimati, di tipo iterativo oppure di interpolazione, come di seguito.

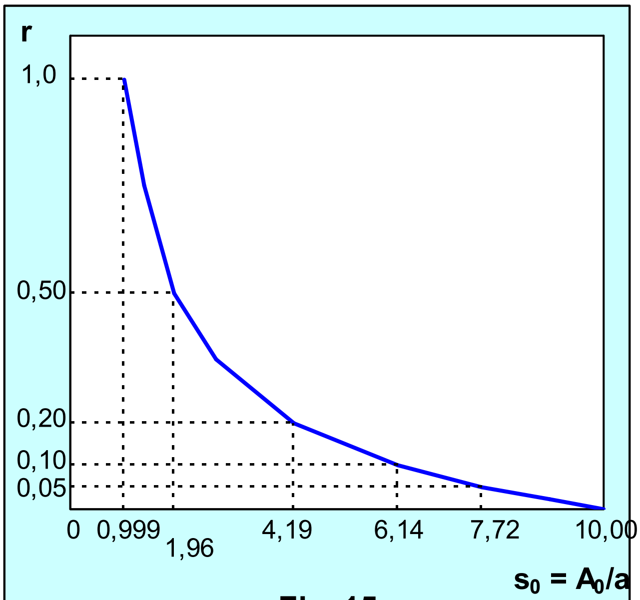


Fig. 15

r = f (A_0 / a) per n = 10

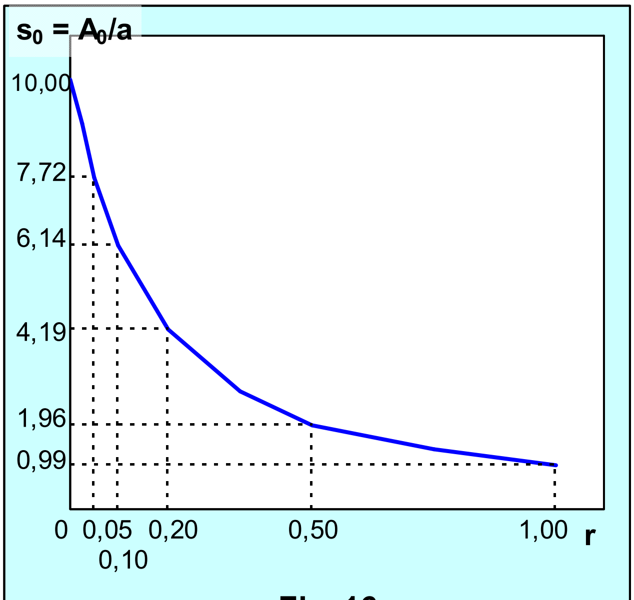


Fig. 16

A_0 / a = f (r) per n = 10

Posto per semplicità $s_0 = \dfrac{A_0}{a} = \dfrac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \dfrac{1 - \nu^n}{r}$, cioè considerata una annualità unitaria, se non si conosce con esattezza il valore della funzione $r = f\left(s_0\right)$ in un punto, si può adottare il procedimento iterativo di progressivo bilanciamento dei due termini dell'uguaglianza

$$r = \frac{1 - \nu^n}{s_0}$$

partendo dai valori approssimati forniti da espressioni, fra le quali la più conosciuta è

$$(3.8.4) \quad r \cong h \cdot \frac{12 - (n-1) \cdot h}{12 - 2 \cdot (n-1) \cdot h} \qquad \text{con} \qquad h = \left(\frac{n}{s_0}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 \qquad \text{(Baily)}$$

Ad esempio, si vuol calcolare il tasso relativo ad una serie di *10* annualità, posticipate e costanti, costituenti un capitale di valore attuale *1.000*, con annualità di valore *125*, per cui

$$s_0 = \frac{A_0}{a} = \frac{1.000}{125} = 8$$

Con l'espressione di Baily si ottiene $r \cong 0{,}04277$, per cui possiamo iniziare l'iterazione con $r = 0{,}04$. Segue

$$r_1 = \frac{1-1{,}04^{-10}}{8} = 0{,}040554\,; \qquad r_2 = \frac{1-(1+r_1)^{-10}}{8} = 0{,}041003\,;$$

$$r_3 = \frac{1-(1+r_2)^{-10}}{8} = 0{,}041364$$

e così via, ad esempio fino $\quad r_{10} = \dfrac{1-(1+r_9)^{-10}}{8} = 0{,}042444$

che ci consente di ottenere, in definitiva, $r = 0{,}0425$ che ci porta a

$$C = A_0 = 125 \cdot \frac{1-1{,}0425^{-10}}{8} = 1.000{,}36$$

Dalle iterazioni osserviamo che $r < r_1 < r_2 < r_3 \ldots$ (ma potrebbe essere $r > r_1 > r_2 \ldots$) e che le differenze $|r_m - r_{m-1}|$ vanno ovviamente diminuendo progressivamente. L'approssimazione successiva è però lenta. Possiamo invece ricorrere ad altri metodi, quali i metodi di interpolazione, per i quali occorre però conoscere il valore della funzione in almeno un punto, non distante da quello per il quale si vuole conoscere il tasso.

Ripresa la funzione

$$s_0 = f(r) = \frac{1-\mathrm{v}^n}{r} = \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} \qquad \text{con} \qquad f'(r) = \frac{r \cdot n \cdot q^{-n-1} - 1 + q^{-n}}{r^2}$$

se conosciamo con esattezza il valore della funzione in un punto *a*, possiamo (metodo di Newton) tracciare la tangente alla curva in quel punto (fig. 17), che avrà l'equazione

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = f'(a)$$

e da questa trarre il valore della *y*, data la *x*. oppure, inversamente, della *x* data la *y*.

Riprendendo l'esempio già discusso per il procedimento iterativo, e quindi con A_0 = 1.000, a = 125, n = 10, ed avvalendosi di una y_a certa = 7,913 corrispondente ad un r = 0,045, nonché con f'(a) = -38,905, otteniamo per y = s_0 = 8,00 una x' = r' = 0,04276, graficamente in difetto rispetto il valore cercato

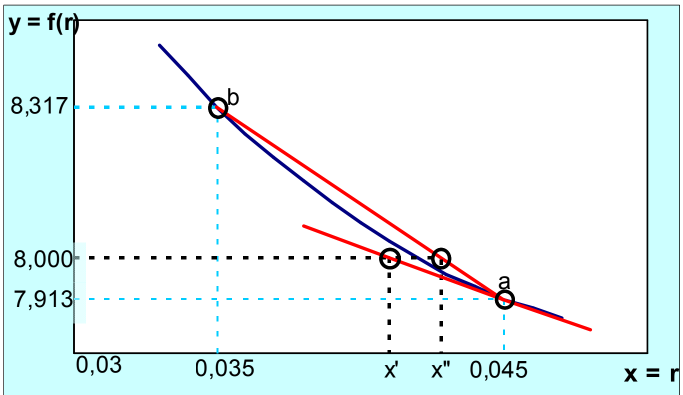


Fig. 17
y = f (r) per n = 10

Se conosciamo con esattezza il valore della funzione anche in un altro punto b, tale che $x_b < x < x_a$, con y_b = 8,317 corrispondente a x_b = 0,035, possiamo ricorrere all'interpolazione lineare (fig. 17)

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

dalla quale x" = r" = 0,04285, valore chiaramente in eccesso rispetto quello cercato, ma che potrebbe venir affinato mediante la valutazione dell'errore dell'approssimazione, cosa che però esula dalle finalità nostre. Osserviamo invece che la media aritmetica delle due interpolazioni, una in difetto ed una in eccesso, cioè il valore

$$r = \frac{0{,}04276 + 0{,}04285}{2} = 0{,}042805$$

ci dà un valore capitale $C_0 = 125 \cdot \dfrac{1 - 1{,}042805^{-10}}{0{,}042805} = 999{,}85$

che è più vicino a quello atteso C = A_0 = 1.000 rispetto quello ottenuto con le *10* iterazioni.

Se si cerca invece il tasso r conoscendo il montante A_n all'anno n di una accumulazione di annualità costanti e posticipate a (caso non più complicato del precedente) si potrà analizzare questa volta la 3.4.1

$\dfrac{A_n}{a} = 1 + q + q^2 + ...q^{n-2} + q^{n-1}$ dove, ancora, con $r = 0 \rightarrow \dfrac{A_n}{n} = n$, e dove $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{q^n - 1}{r} = 0$

L'andamento della $r = f\left(\dfrac{A_n}{a}\right)$ è pure quello della fig. 15. L'equazione che se ne trae è questa volta di grado *n+1*, ma sempre di difficile soluzione algebrica per *n > 3*. Conviene ancora ricorrere ai metodi approssimati.

- o iterando progressivamente i termini dell'uguaglianza $r = \frac{q^n - 1}{s_n}$ (con $s_n = \frac{A_n}{a}$), partendo da valori forniti da espressioni quali $r \cong \frac{1}{n} - \frac{a}{A_n}$;

- oppure, se si conoscono con esattezza i valori della funzione $s_n = f(r) = \frac{q^n - 1}{r}$ in uno o due punti (comprendenti nel loro intervallo il valore r cercato), ricorrendo al metodo di Newton o all'interpolazione lineare, ed eventualmente mediando i due valori trovati.

Nel caso delle annualità costanti ed illimitate di cui alla 3.5.1 la ricerca del tasso è banale. Negli altri casi esposti delle annualità anticipate, oppure differite o frazionate, la ricerca del tasso r porta ad espressioni complicate e quindi, a maggior ragione, al ricorso ai metodi approssimati descritti in questo paragrafo.

3.9 L'impiego dei regimi a interesse semplice e dello sconto commerciale

Fin dal primo paragrafo di questo capitolo abbiamo giustificato le ragioni per le quali abbiamo impiegato il regime esponenziale dell'interesse composto per i movimenti di posticipazione e di anticipazione dei termini costituenti le serie numeriche delle espressioni fondamentali 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1 . Pur tuttavia, per operazioni di breve durata, vale anche l'uso di mercato dell'impiego degli altri due regimi descritti nel cap. 2, in particolare di quello lineare dell'interesse semplice per posticipare, e di quello lineare dello sconto commerciale per anticipare.

L'accumulazione di n annualità periodiche costanti e posticipate, in regime di *interesse semplice* porta alla successione

$$(3.9.1) \quad A_{n,i,s} = a + (a + a \cdot r) + (a + a \cdot 2r) + ... + [a + a \cdot (n-1) \cdot r] = a \cdot n \cdot \left[1 + \frac{r}{2} \cdot (n-1)\right]$$

Si tratta di una serie divergente, che può venir quindi impiegata solo per piccoli valori di n. Ad esempio, l'accumulazione di *8* rate, del valore di *125* ciascuna, trimestrali posticipate al saggio del *1,5%*, porta ad un valore di *1.052,50* contro il valore vicino di *1.054,10* all'interesse composto. Ma se le rate sono *40* (*10* anni) il valore di *6.462,50* si discosta notevolmente dal *6.783,49* calcolato con la 3.4.1.

L'impiego del regime non lineare dello *sconto commerciale* per montare, con la limitazione già precisata al par. 2.8, porta alla serie divergente.

$$(3.9.2)\quad \begin{aligned} A_{n,s,c} &= a + \frac{a}{1-d} + \frac{a}{1-2d} + \frac{a}{1-3d} + \ldots + \frac{a}{1-(n-1)\cdot d} = \\ &= a \cdot \left(1 + \frac{1}{1-d} + \frac{1}{1-2d} + \ldots + \frac{1}{1-(n-1)\cdot d}\right) \end{aligned}$$

Nell'esempio sopra proposto con d = 0,015 il valore dell'accumulazione è *1.056,80* per le *8* rate, ma è improponibile per tempi lunghi.

Analoghe considerazioni possono venir fatte per i *regimi di sconto*. L'impiego del regime non lineare dello *sconto razionale* conduce alla

$$(3.9.3)\quad A_{0,i,s} = a \cdot \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \ldots + \frac{1}{1+nr}\right)$$

serie convergente con limite *0.*

Ad esempio, il valore attuale di un bene con prezzo di vendita 1.000, che viene ceduto contro 8 cambiali da 125 l'una a scadenza posticipata ogni 3 mesi (la prima scadenza dopo 3 mesi dalla cessione e l'ultima al termine dei 2 anni) ed al tasso di sconto del 1,5% per rata, risulta di 937,74 contro il valore vicino di 935,74 all'interesse composto.

Col regime lineare dello *sconto commerciale* il valore attuale si ottiene dalla serie divergente

$$(3.9.4)\quad A_{0,s,c} = a \cdot (1-d) + a \cdot (1-2d) + \ldots + a \cdot (1-nd) = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot d\right)$$

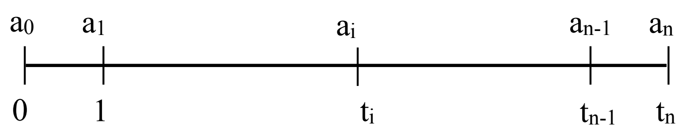
che per l'esempio di cui sopra porta ad un valore scontato di 932,50.

Nel caso di annualità anticipate, seguendo la stessa metodologia, si giunge alle seguenti espressioni per i due regimi lineari di maggior uso bancario

$$(3.9.1')\quad A^{x}_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot r\right)$$

$$(3.9.4')\quad A^{x}_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$$

Ed ancora, nel caso di annualità ancora periodiche ma variabili, così come nel seguente schema



le espressioni precedenti si generalizzano nelle seguenti

(3.9.5) $$A_{n,i,s} = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \left[1 + r \cdot \left(t_n - t_i\right)\right]$$

(3.9.6) $$A_{n,s,c} = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \frac{1}{1 - d \cdot \left(t_n - t_i\right)}$$

(3.9.7) $$A_{0,i,s} = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \frac{1}{1 + r \cdot t_i}$$

(3.9.8) $$A_{0,s,c} = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot \left(1 - d \cdot t_i\right)$$

Come già detto, negli usi bancari e per tempi brevi viene pure applicato un regime misto, lineare sia per montare che per scontare, con tassi annuali di interesse *r* e di sconto *d* uguali, oppure differenti, oppure ancora con tasso di sconto pari al saggio d'interesse scontato. Per tali regimi, anche nel caso di *k* sottoperiodi dell'anno, ma per *n* rate costanti e posticipate, sarà

(3.9.9) $$A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{r}{k}\right)$$

(3.9.10) $$A_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{d}{k}\right)$$

Inoltre, in analogia con quanto dedotto al par. 3.7 per il regime esponenziale, nel caso di un flusso di reddito costante e continuo, tale che

$$\int_{0}^{1} \varphi(t) \cdot dt = \int_{m}^{m+1} \varphi(t) \cdot dt = \varphi$$

e per una serie limitata di termini (non consideriamo il caso della perpetuità per le ragioni più volte dette sui regimi lineari, e senza logicamente distinguere fra anticipazione e posticipazione) nonché avendo posto $t_n = n$, sarà per il regime a interesse semplice

$$(3.9.11)\quad \overline{A}_{n,i,s} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot [1 + (t_n - t) \cdot r] \cdot dt = \varphi \cdot \left| t + t_n \cdot r \cdot t - \frac{t^2}{2} \cdot r \right|_0^{t_n} =$$

$$= \varphi \cdot n \cdot \left(1 + n \cdot r - \frac{n}{2} \cdot r \right) = \varphi \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n}{2} \cdot r \right)$$

Nell'esempio già proposto per la 3.9.1 degli 8 termini, nei quali però il reddito si rende disponibile con continuità, con valore complessivo e costante 125 ogni trimestre ed al tasso dello 0,015, sarà $\overline{A}_{n,i,s} = 1.060{,}00$, valore ovviamente maggiore di quello determinato con la 3.9.1. Osserviamo che, essendo il regime lineare ed il flusso costante, calcolare il montante attraverso un trimestre oppure su un altro periodo (purché col tasso equivalente), non cambia il risultato.

Analogamente, per il montante in regime di sconto commerciale

$$(3.9.12)\quad \overline{A}_{n,s,c} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 - d \cdot (t_n - t)} \cdot dt = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 - d \cdot t_n + d \cdot t} \cdot dt$$

e osservando che per $f(t) = 1 - d \cdot n + d \cdot t \rightarrow f'(t) = d$

$$= \frac{\varphi}{d} \cdot \left| \ln(1 - d \cdot n + d \cdot t) \right|_0^{t_n} = -\frac{\varphi}{d} \cdot \ln(1 - d \cdot n)$$

Nell'esempio considerato $\overline{A}_{n,s,c} = 1.065{,}28$

Per i procedimenti di anticipazione sarà

$$(3.9.13)\quad \overline{A}_{0,i,s} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot \frac{1}{1 + r \cdot t} \cdot dt = \frac{\varphi}{r} \int_0^{t_n} \frac{r}{1 + r \cdot t} \cdot dt = \frac{\varphi}{r} \cdot \left| \ln(1 + r \cdot t) \right|_0^{t_n} =$$

$$= \frac{\varphi}{r} \cdot \ln(1 + r \cdot t_n) = \frac{\varphi}{r} \cdot \ln(1 + r \cdot n)$$

$$(3.9.14)\quad \overline{A}_{0,s,c} = \int_0^{t_n} \varphi \cdot (1 - d \cdot t) \cdot dt = \varphi \cdot \left| t - \frac{t^2}{2} \cdot d \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{2} \cdot d \right)$$

Nell'esempio di cui sopra $\overline{A}_{0,i,s} = 944{,}41$ e $\overline{A}_{0,s,c} = 940{,}00$.

3.10 L'impiego del regime finanziario istantaneo

Già al paragrafo 2.11 abbiamo esaminato le variazioni, positive e negative, che subisce un capitale che si muove sulla retta del tempo per frazioni infinitesime, variazioni proporzionali al montante del capitale in ogni istante e ad un *tasso istantaneo* δ, che abbiamo chiamato anche *intensità istantanea di interesse* e che abbiamo definito come *derivata logaritmica del montante al tempo t*.

Abbiamo ricavato le espressioni per la posticipazione e l'anticipazione di un capitale singolo, espressioni che con i simboli di questo capitolo sono

(3.10.1) $C_n = C_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t_n} \delta(t)dt}$ (3.10.2) $C_0 = C_n \cdot e^{\int_{t_n}^{t_0} \delta(t)dt} = C_n \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_n} \delta(t)dt}$

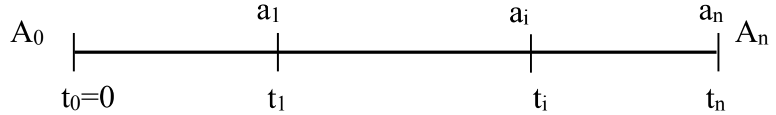
e che per δ = costante e $t_n - t_0 = n$ si riducono alle

(3.10.1') $C_n = C_0 \cdot e^{\delta n}$ (3.10.2') $C_0 = C_n \cdot e^{-\delta n}$

espressioni che abbiamo ricavato pure nel regime ad interesse composto, frazionando *k* volte il tasso annuo *r* e portando $k \to \infty$. Abbiamo pure dedotto che in questo caso $\delta = lg_e(1+r)$, essendo quindi δ il tasso istantaneo equivalente a quello annuo *r*. La stretta analogia fra i due regimi, già rilevata al par. 2.12, non ci deve però far pensare ad una equivalenza concettuale, in quanto nell'interesse composto il frazionamento esiste in quanto esiste un periodo da frazionare, cui riferiamo il tasso *r*, mentre nel finanziario istantaneo i periodi finiti nascono dall'accumularsi di tempi infinitesimi.

Va ancora ricordato che il finanziario istantaneo è un regime scindibile in quanto esponenziale, ma purché il tasso istantaneo sia costante oppure variabile in funzione solo del tempo, cioè purché la δ sia funzione ad una sola variabile. Inoltre, al paragrafo 2.12 abbiamo pure individuato l'equazione del tasso istantaneo, variabile in funzione del tempo, nei regimi ad interesse semplice ed a sconto commerciale, nonché indicato le modalità per la verifica dell'esistenza di altri regimi finanziari e del loro tasso istantaneo.

Non sarà quindi difficile riconoscere le seguenti espressioni per le accumulazioni, finale o iniziale, di *n* annualità discrete e posticipate, sia per $\delta = f(t)$ che per δ = cost.



(3.10.3) $A_n = \sum_{1}^{n} {}_i a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \delta(t) \cdot dt}$ (3.10.4) $A_0 = \sum_{1}^{n} {}_i a_i \cdot e^{-\int_{0}^{t_i} \delta(t) \cdot dt}$

(3.10.3') $A_n = \sum_{1}^{n} {}_i a_i \cdot e^{\delta \cdot (t_n - t_i)}$ (3.10.4') $A_0 = \sum_{1}^{n} {}_i a_i \cdot e^{-\delta \cdot t_i}$

Se, sempre per δ = cost., le annualità sono d'uguale valore ed intervallate pure in maniera costante

(3.10.5) $A_n = a \cdot \sum_1^n {}_i e^{\delta \cdot (t_n - t_i)} = a \cdot \left(1 + e^{\delta} + e^{2\delta} + ... + e^{(n-1)\cdot\delta}\right) = a \cdot \dfrac{e^{n\delta} - 1}{e^{\delta} - 1}$

(3.10.6) $A_0 = a \cdot \sum_1^n {}_i e^{-\delta \cdot t_i} = A_n \cdot e^{-n \cdot \delta} = a \cdot \dfrac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\delta} - 1}$

espressioni che per δ = ln(1+r), e quindi per $e^{ln(1+r)} = 1 + r = q$, si ritrovano nelle 3.4.1 e 3.4.2

(3.10.5') $A_n = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{r}$ (3.10.6') $A_0 = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = a \cdot \dfrac{1 - \nu^n}{r}$

Se invece assumiamo $\delta = \dfrac{r}{1 + r \cdot t} = f(t)$

(3.10.7) $A_n = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t} \cdot dt} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{\left|ln(1+rt)\right|_{t_i}^{t_n}} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot \dfrac{1 + r \cdot t_n}{1 + r \cdot t_i}$

(3.10.8) $A_n = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{-\int_0^{t_i} \frac{r}{1+r\cdot t} \cdot dt} = A_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t} \cdot dt} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot \dfrac{1}{1 + r \cdot t_i}$

Espressioni che, per annualità periodiche e di uguale valore, diventano

(3.10.7') $A_n = a \cdot (1 + r_n) \cdot \sum_1^n {}_i \dfrac{1}{1 + r_i}$

(3.10.8') $A_0 = a \cdot \sum_1^n {}_i \dfrac{1}{1 + r_i} = A_n \cdot \dfrac{1}{1 + r_n}$

E se invece assumiamo $\delta = \dfrac{r}{1 - r \cdot t} = f(t)$

(3.10.9) $A_n = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t} dt} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{-\left|ln(1-rt)\right|_{t_i}^{t_n}} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot \dfrac{1 - r \cdot t_i}{1 - r \cdot t_n}$

(3.10.10) $A_0 = \sum_1^n {}_i a_i \cdot e^{-\int_0^{t_i} \frac{r}{1-r\cdot t} \cdot dt} = A_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t} \cdot dt} = \sum_1^n {}_i a_i \cdot (1 - r \cdot t_i)$

(3.10.9') $A_n = \dfrac{a}{1 - r \cdot t_n} \cdot \sum_1^n {}_i (1 - r \cdot t_i)$

(3.10.10') $A_0 = a \cdot \sum_1^n {}_i (1 - r \cdot t_i) = A_n \cdot (1 - r \cdot t_n)$

Gli altri casi, per annualità anticipate o differite, o per valori in momenti intermedi, sono ricavabili con le cognizioni finora acquisite. Va pure ricordato che le leggi finanziarie, e quindi il tasso istantaneo δ, possono avere anche altre espressioni, purché rispondenti a certi requisiti, come precisato al par. 2.14 e proposto negli esercizi relativi.

L'applicazione del regime finanziario istantaneo ai flussi di reddito continui di intensità variabile $\varphi(t)$ porta alle espressioni

$$(3.10.11) \qquad \overline{A}_n = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{\int_t^{t_n} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$$

$$(3.10.12) \qquad \overline{A}_0 = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^{t} \delta(t) \cdot dt} \cdot dt$$

che per φ = cost. e δ = cost. diventano

$$(3.10.11') \qquad \overline{A}_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\delta \cdot (t_n - t)} \cdot dt = \varphi \cdot e^{\delta \cdot t_n} \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{e^{\delta \cdot t_n} - 1}{\delta}$$

$$(3.10.12') \qquad \overline{A}_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\delta \cdot t} \cdot dt = \varphi \left| -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot t} \right|_0^{t_n} = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot t_n}}{\delta}$$

espressione già ricavata al par. 3.7 per annualità frazionate con $k \to \infty$.

Se φ = cost. ma $\delta = f(t) = \dfrac{r}{1 + r \cdot t}$

$$(3.10.13) \qquad \overline{A}_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n} \frac{r}{1+r \cdot t} \cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\left| ln(1+r \cdot t) \right|_t^{t_n}} \cdot dt =$$

$$= \varphi \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{r} \cdot \int_0^{t_n} \frac{r}{1 + r \cdot t} \cdot dt = \varphi \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{r} \cdot ln(1 + r \cdot t_n)$$

$$(3.10.14) \qquad \overline{A}_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t} \frac{r}{1+r \cdot t} \cdot dt} \cdot dt = \overline{A}_n \cdot e^{-\int_0^{t_n} \frac{r}{1+r \cdot t} \cdot dt} = \frac{\varphi}{r} \cdot ln(1 + r \cdot t_n)$$

e se φ = cost. ma $\delta = f(t) = \dfrac{r}{1 - r \cdot t}$

$$\overline{A}_n = \varphi\cdot\int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n}\frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt}\cdot dt = \varphi\cdot\int_0^{t_n} e^{-\left|ln(1-r\cdot t)\right|_t^{t_n}}\cdot dt = \tag{3.10.15}$$

$$= \frac{\varphi}{1-r\cdot t_n}\cdot\int_0^{t_n}(1-r\cdot t)\cdot dt = \varphi\cdot\frac{t_n}{1-r\cdot t_n}\cdot\left(1-r\cdot\frac{t_n}{2}\right)$$

$$\overline{A}_0 = \varphi\cdot\int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t}\frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt}\cdot dt = \overline{A}_n\cdot e^{-\int_0^{t_n}\frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} = \varphi\cdot t_n\cdot\left(1-r\cdot\frac{t_n}{2}\right) \tag{3.10.16}$$

3.11 Annualità variabili in progressione aritmetica

Il caso di una serie di annualità periodiche posticipate nella quale la differenza *d* (positiva o negativa) fra un termine ed il precedente è costante, può venir rappresentata come di seguito, anche come somma di serie disaggregate

	a	a+d	a+2d		a+(n-2)d	a+(n-1)d
0	1	2	3		n-1	n
	a	a	a	……………	a	a
		d	d	……………	d	d
			d	……………	d	d
					d	d
						d

Limitando il problema al caso usuale di annualità di non breve durata, cioè impiegando solamente il regime a interesse composto sia per montare che per scontare, potremo scrivere per l'accumulazione all'anno *n*

$$A_n = a\cdot\frac{q^n-1}{r}+d\cdot\frac{q^{n-1}-1}{r}+d\cdot\frac{q^{n-2}-1}{r}+\ldots+d\cdot\frac{q^2-1}{r}+d\cdot\frac{q^1-1}{r}= \tag{3.11.1}$$

$$= a\cdot\frac{q^n-1}{r}+\frac{d}{r}\cdot\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2+q^1+q^0-n\right)=$$

$$= a\cdot\frac{q^n-1}{r}+\frac{d}{r}\cdot\frac{q^{n-1}\cdot q-1}{q-1}-\frac{n\cdot d}{r}=\left(a+\frac{d}{r}\right)\cdot\frac{q^n-1}{r}-n\cdot\frac{d}{r}$$

E per il valore della serie all'anno *0*

$$A_0 = \frac{A_n}{q^n}=\left(a+\frac{d}{r}\right)\cdot\frac{q^n-1}{r\cdot q^n}-\frac{n\cdot d}{r\cdot q^n} \tag{3.11.2}$$

Notiamo che per d = 0 ritroviamo ovviamente le 3.4.1 e 3.4.2, che per *d* negativo la progressione decresce fino ad annullare l'annualità per $n = \frac{a}{d} + 1$, che per le annualità anticipate basterà moltiplicare i valori trovati per il fattore di capitalizzazione *q*, e che per a =1 e d = 1 si può scrivere la 3.11.2 nella forma chiamata "Increasing Annuity"

$$(3.11.2')\quad (I_a)_n = \frac{s_0^x - n \cdot \nu^n}{r} \qquad \text{con} \qquad s_0^x = \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} \cdot q$$

espressione che dà il valore attuale di una serie di annualità crescenti secondo i numeri naturali 1, 2, 3, …n, e che si presta a molte applicazioni.

Per il valore della serie all'anno intermedio *m* basterà applicare la 3.4.3. Inoltre se la serie progredisce illimitatamente, non sarà difficile riconoscere che

$$(3.11.3)\quad C = A_0 = \lim_{n \to \infty} \left[\left(a + \frac{d}{r} \right) \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} - \frac{n \cdot d}{r \cdot q^n} \right] = \frac{a}{r} + \frac{d}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \left(a + \frac{d}{r} \right)$$

$$(3.11.3')\quad (I_a)_\infty = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = \frac{q}{r^2}$$

essendo in questo caso come già ricordato al par. 3.5, improponibile economicamente il valore infinito di A_n.

Ad esempio, una serie di *8* annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (prima annualità uguale all'unità) e con un saggio d'interesse del *5%* annuo, porta ai seguenti valori

$$A_n = 40{,}531 \qquad A_0 = C = (I_a)_\infty = 27{,}433 \qquad A_4 = 33{,}345$$

e se la progressione è illimitata $A_0 = C = (I_a)_\infty = 420{,}00$

Nel caso delle annualità variabili, in genere, la ricerca delle funzioni inverse porta a calcoli algebrici complessi e poco agevoli. Conviene procedere con iterazioni e interpolazioni, utilizzando eventualmente prontuari di tavole finanziarie.

L'applicazione dei due regimi lineari per montare e per scontare, di cui al paragrafo precedente, porta al calcolo della sommatoria delle *n* serie di rate in cui si articola il quadro dell'operazione, o meglio al calcolo del montante (o del valore attuale) delle annualità costanti di *n* termini e della sommatoria dei montanti delle (n-1) colonne delle differenze

$$A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i \cdot d \cdot \left[1 + (n-1-i) \cdot r\right] =$$

$$= a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[1 + (n-1) \cdot r\right] \cdot \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i - r \cdot \sum_{1}^{n-1}{}_i\, i^2$$

e ricordando, dagli sviluppi del binomio, che la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali è $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, in definitiva

$$(3.11.4) \quad A_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left\{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left[1 + (n-1) \cdot r\right] - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right\}$$

che, con a = 1 e d = 1 si riduce a

$$(3.11.4') \quad A_{n,i,s} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{6}$$

Con analogo procedimento, per le rate anticipate e per il regime lineare di sconto sia con rate posticipate che anticipate (trascuriamo lo sconto razionale e la capitalizzazione in regime di sconto)

$$(3.11.5) \quad A^{x}_{n,i,s} = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot (1 + n \cdot r) - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

$$(3.11.5') \quad A^{x}_{n,i,s} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} \qquad \text{(per a = d = 1)}$$

$$(3.11.6) \quad A_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot (1 - r) - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

$$(3.11.6') \quad A_{0,s,c} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad \text{(per a = d = 1)}$$

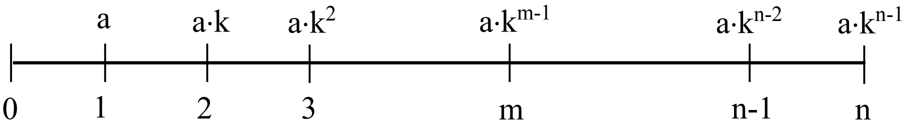
$$(3.11.7) \quad A^{x}_{0,s,c} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2} \cdot r\right) + d \cdot \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}\right]$$

$$(3.11.7') \quad A^{x}_{0,s,c} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - r \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{3} \qquad \text{(per a = d = 1)}$$

dove, nelle 3.11.4-3.11.7 abbiamo indicato il tasso di sconto ancora con r per evitare confusioni al lettore. Con riferimento all'esempio già proposto per l'interesse composto, questi valori sono rispettivamente $A_{n,i,s} = 40{,}2$, $A^{*}_{n,i,s} = 42{,}0$, $A_{0,s,c} = 25{,}8$, $A^{*}_{0,s,c} = 27{,}6$.

3.12 Annualità variabili in progressione geometrica

Il caso, più che altro teorico, di una serie di annualità periodiche posticipate nella quale il rapporto *k* (maggiore o minore dell'unità) fra un termine ed il suo precedente è costante, può venir così rappresentato (k>0)



In regime di interesse composto potremo scrivere

$$A_n = a \cdot q^{n-1} + a \cdot k \cdot q^{n-2} + a \cdot k^2 \cdot q^{n-3} + \ldots + a \cdot k^{n-2} \cdot q + a \cdot k^{n-1} = a \cdot \sum_{m=1}^{n} k^{m-1} \cdot q^{n-m}$$

progressione geometrica di ragione *k/q*, e pertanto

$$A_n = a \cdot \frac{k^{n-1} \cdot k \cdot q^{-1} - q^{n-1}}{k \cdot q^{-1} - 1}$$ e moltiplicando numeratore e denominatore per *q*

$$(3.12.1)\quad A_n = a \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q}$$

e per il valore all'anno *0* oppure all'anno intermedio *m*

$$(3.12.2)\quad A_0 = \frac{A_n}{q^n} = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q} = a \cdot \nu \cdot \frac{1 - (k \cdot \nu)^n}{1 - k \cdot \nu} = a \cdot \frac{1 - (k \cdot \nu)^n}{q - k}$$

$$(3.12.3)\quad A_m = \frac{A_n}{q^{n-m}} = A_n \cdot q^{m-n} = A_0 \cdot q^m$$

Notiamo che per k = 1 ritroviamo ancora le 3.4.1 - 3.4.2 - 3.4.3, che per k < 1 la progressione decresce e tende a *0* per $n \to \infty$, e che per k = q le espressioni precedenti perdono significato, ma che in tal caso

$$(3.12.1')\quad A_n = n \cdot a \cdot q^{n-1} = n \cdot a \cdot k^{n-1} \qquad (3.12.2')\quad A_0 = n \cdot a \cdot \nu = \frac{n \cdot a}{k}$$

Se le annualità sono anticipate le espressioni precedenti vanno moltiplicate per il fattore di capitalizzazione.

Inoltre se la serie progredisce illimitatamente, ed essendo sempre positivi sia *k* che ν, dalle 3.12.2 e 3.12.2' avremo tre casi

(3.12.4') per $k \cdot \nu < 1 \; (k < q)$ $$\lim_{n\to\infty} a \cdot \nu \cdot \frac{1-(k \cdot \nu)^n}{1-k \cdot \nu} = \frac{a \cdot \nu}{1-k \cdot \nu} = \frac{a}{q-k}$$

essendo in questo caso $\lim_{n\to\infty} (k \cdot \nu)^n = 0$

(3.12.4'') per $k \cdot \nu = 1 \quad (k = q)$ $$\lim_{n\to\infty} n \cdot a \cdot \nu = \infty$$

(3.12.4''') per $k \cdot \nu > 1 \quad (k > q)$ $$\lim_{n\to\infty} a \cdot \nu \cdot \frac{1-(k \cdot \nu)^n}{1-k \cdot \nu} = \infty$$

in quanto il numeratore è un infinito di ordine superiore a qualsiasi numero razionale, e quindi al denominatore.

Ad esempio, una serie di *8* annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all'unità, con k = 1,1 e con saggio d'interesse del *20%* annuo, porta ai seguenti valori

A_n = 21,562 A_0 = 5,014 A_4 = 10,398

e se la progressione è illimitata

A_0 = 10,000

Se invece k = 1,1 ma r = 10%

A_n = 15,589 A_0 = 7,272 A_4 = 10,648 $A_0 \; per \, n \to \infty = \infty$

ed ancora, se k = 1,1 ma r = 5%

A_n = 13,322 A_0 = 9,017 A_4 = 10,960 $A_0 \; per \, n \to \infty = \infty$

L'applicazione dei due regimi lineari di cui al par. 3.9 porta, nel caso di rate periodiche e posticipate, alle sommatorie

$$A_{n,i,s} = \sum_1^n {}_i a \cdot k^{i-1} \cdot [1 + (n-i) \cdot r] \qquad A_{0,s,c} = \sum_1^n {}_i a \cdot k^{i-1} \cdot (1 - i \cdot r)$$

che, dopo laboriosi sviluppi, si esplicitano in

(3.12.5) $$A_{n,i,s} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 - r \cdot \left(n - \frac{k^n - 1}{k-1} \right) \right]$$

$$(3.12.5')\ A^x_{n,i,s} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 - r \cdot \left(n - k \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} \right) \right]$$

$$(3.12.6)\ \ A_{0,s,c} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 + r \cdot \left(\frac{k^n - 1}{k-1} - n \cdot k^n \right) \right]$$

$$(3.12.6')\ A^x_{0,s,c} = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 + r \cdot \left(k \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} - n \cdot k^n \right) \right]$$

dove, in analogia alle 3.11.4 e 3.11.5 abbiamo indicato il tasso di sconto con *r*. Con riferimento all'esempio delle 8 annualità, con a = 1, k = 1,1, r = 0,05 si ottengono i valori 13,154 – 13,726 – 8,579 – 9,151.

3.13 Annualità variabili senza legge matematica

Non sempre è possibile calcolare il valore capitale di un bene attraverso la valutazione di una successione di redditi che si presentino con annualità costanti o variabili come nei paragrafi precedenti. In particolare nell'estimo rurale, soprattutto nella stima delle colture da frutto e da legno, ma anche nell'estimo industriale, il bene presenta spese concentrate d'impianto e redditi iniziali negativi decrescenti (avviamento), poi positivi crescenti, poi crescenti costanti, ed infine positivi decrescenti fino ad annullarsi per vetustà od obsolescenza, oppure fino a quella che viene chiamata *età del tornaconto* di cui si dirà ai paragrafi successivi.

L'andamento dei redditi, riferiti solitamente a scadenze annuali posticipate (bilanci) può quindi rappresentarsi come in Fig. 18, in cui il grafico è in realtà costituito da una successione di punti corrispondenti alle scadenze annuali, che abbiamo idealmente congiunto con una linea continua nella quale si possono riconoscere le quattro fasi anzidette che nell'estimo rurale vengono chiamate *fase d'infanzia, di adolescenza, di maturità e di vecchiaia*.

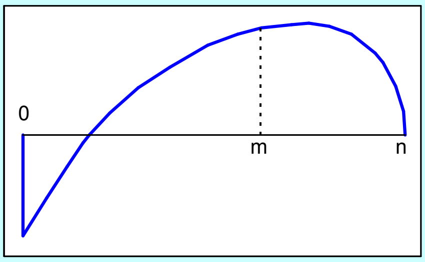


Fig. 18

Si tratta di annualità dette *variabili con legge naturale*, mentre in altri tipi di beni, tipicamente i fabbricati o altre opere analoghe, i redditi variano generalmente di non molto intorno a valori medi economici di cui diremo ai paragrafi successivi.

Nessuna difficoltà, con le conoscenze fin qui acquisite, per trovare l'accumulazione economica della progressione delle annualità, e quindi il valore del bene in stima analitica, all'inizio o al termine del ciclo, oppure in un momento intermedio. Basterà stabilire intelligentemente il tasso di capitalizzazione ed usare le espressioni 3.1.1 - 3.1.2 - 3.1.3, utilizzando il regime ad interesse composto per le ragioni più volte dette.

Purtuttavia, con la considerazione che per la capitalizzazione dei redditi occorre guardare alla produttività futura del bene, certamente basata sulle statistiche del passato o sull'andamento di beni consimili, ma sempre guardando in avanti nel tempo, sarà talvolta possibile individuare periodi nei quali, mediamente, i valori annuali si presentano costanti oppure variabili con legge matematica; in tal caso si potranno utilizzare anche le altre espressioni trovate.

Ad esempio, indicata schematicamente una successione di valori annuali posticipati come di seguito, relativa ad un ciclo di ventotto anni, oltre alla spesa iniziale d'impianto ed al capitale di realizzo alla fine del ciclo, ed ipotizzato che il ciclo termini con reddito nullo (se ne parlerà al par. 3.14)

-25	-12	-9	-6	-3	0	2	4	8	16	32	....	32	30	28	26	24	20	16	12	8	4	0	+10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	

nonché tenuto conto di un saggio d'interesse del *3%*, si potrà scrivere

$$A_{28} = -25 \cdot 1{,}03^{28} - \left[\left(12 - \frac{3}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 3}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^{23} + 2 \cdot \frac{2^5 - 1{,}03^5}{2 - 1{,}03} \cdot 1{,}03^{18} +$$

$$+ 32 \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot 1{,}03^{11} + \left[\left(32 - \frac{2}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 2}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^6 + \left[\left(20 - \frac{4}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} + \frac{6 \cdot 4}{0{,}03} \right] + 10 =$$

$$= 580{,}910$$

$$A_0 = 580{,}910 \cdot 1{,}03^{-28} = 253{,}902$$

$$A_{10} = 580{,}910 \cdot 1{,}03^{-18} = 341{,}224$$

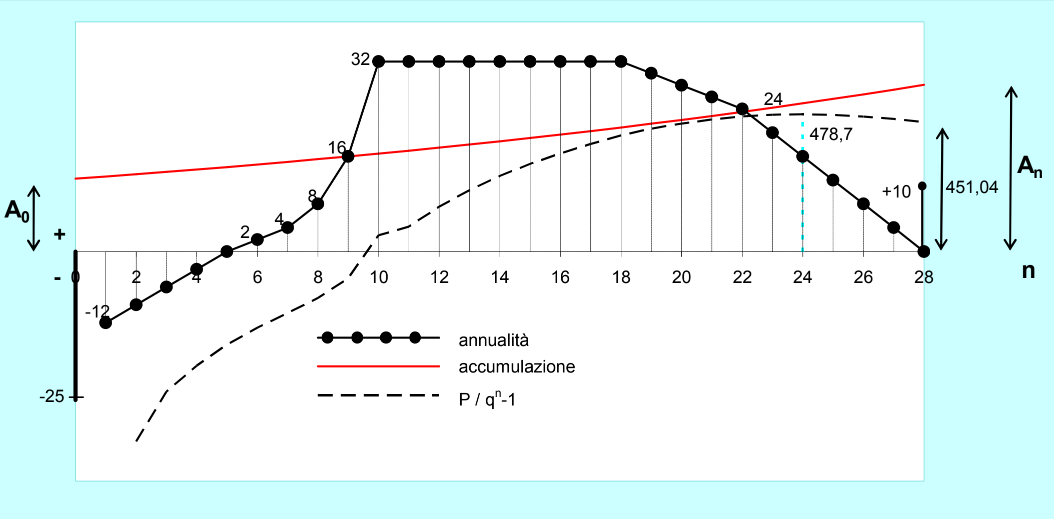


Fig. 19

Nella figura 19, oltre all'andamento delle annualità (in linea con pallini) ed a quello del valore dell'intero ciclo (in linea continua), viene indicata (in linea tratteggiata) la progressione del termine $\frac{P}{q^n - 1}$ con n variabile, di cui si dirà ai paragrafi seguenti.

3.14 Le periodicità (o poliannualità)

Un problema tipico nell'estimo rurale, ma anche in altre tipologie estimative, è il dover cercare il valore capitale di un bene capace di dare una successione di redditi variabili che si ripetono poi periodicamente in modo che la redditività si possa ritenere illimitata. Si tratta di *t* cicli (o turni) di *n* annualità posticipate che sono variabili secondo i tipi studiati nei paragrafi precedenti (se fossero annualità costanti il problema non si porrebbe), con l'eventualità che si possa pensare ad un primo ciclo più lungo per ovvie ragioni di impianto. Il problema può venir presentato come nella figura seguente, nella quale con *P* abbiamo inteso il valore dell'accumulazione finale delle *n* annualità di ogni turno.

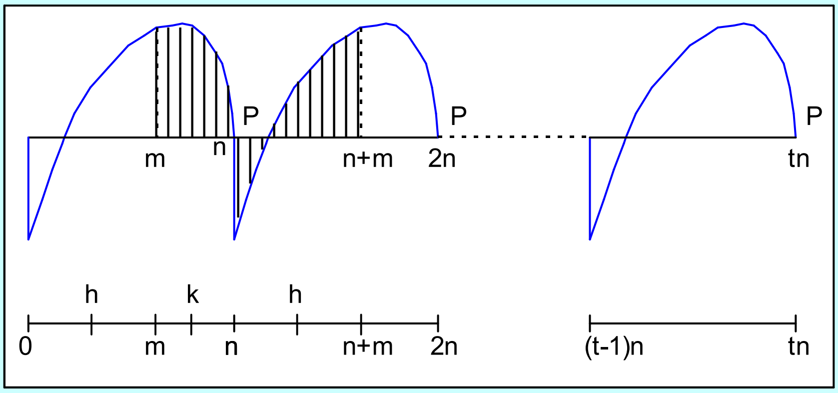


Fig. 20

Tale valore P può essere considerato come accumulazione finale (A_n) di n annualità della tipologia di quelle già studiate come costanti e limitate. Pertanto dalla 3.4.1

$$(3.14.1)\quad P = a_m \cdot \frac{q^n - 1}{r} \rightarrow a_m = P \cdot \frac{r}{q^n - 1} \rightarrow A_{tn} = a_m \cdot \frac{q^{tn} - 1}{r} = P \cdot \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

$$(3.14.2)\quad A_0 = \frac{A_{tn}}{q^{tn}} = \frac{P}{q^{tn}} \cdot \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

avendo utilizzato con a_m una annualità posticipata virtuale che chiameremo "*media economica di n annualità variabili*" e che definiremo meglio al paragrafo 3.16. Se il valore periodico P dovesse ritenersi anticipato nel suo turno, basterà moltiplicare le espressioni precedenti per q^n. Se il turno è unico si ricade ovviamente nelle formule dei paragrafi precedenti.

Da quanto precede, e dalla 3.5.1, si trae anche che, se le periodicità debbono ritenersi, illimitate, il valor capitale del bene capace di queste redditività sarà

$$(3.14.3)\quad C = A_0 = \frac{a_m}{r} = \frac{1}{r} \cdot P \cdot \frac{r}{q^n - 1} = \frac{P}{q^n - 1}$$

Sarà difficile individuare beni capaci di produrre redditi con cicli periodici variabili con leggi matematiche. Comunque, al solo fine di completezza dell'argomento, osserviamo che le espressioni delle periodicità si ricavano da quelle delle annualità ponendo al posto dell'annualità il valore P della periodicità, al posto del fattore q quello di q^n, ed al posto del saggio d'interesse r quello di $q^n - 1$.

Nell'esempio presentato al paragrafo precedente, se si dovesse poter presumere che quel ciclo possa ripetersi in modo illimitato, il valore capitale del bene sarebbe

$$C = A_0 = 580{,}91 \cdot \left(1{,}03^{28} - 1\right)^{-1} = 451{,}042 \qquad \text{contro 253,902 per turno isolato}$$

Rimane ancora da analizzare il valore del bene in un momento *m* intermedio di un turno produttivo nel caso della serie illimitata di poliannualità. Osserviamo anzitutto che il valore capitale della 3.14.3 compete all'inizio di un turno qualsiasi, cioè di tutti i turni. Calcolato questo valore, possiamo seguire tre vie (Medici, opera citata par. 1.2)

a) accumulando i redditi da *m* all'inizio del prossimo turno e scontando poi in *m* questo valore assieme al valore capitale competente (metodo a valore futuro)

$$(3.14.4)\quad V_m = \frac{\sum_m^n a_k \cdot q^{(n-k)} + C}{q^{n-m}}$$

Nell'esempio del paragrafo 3.13 avremo all'anno *10* di un turno qualsiasi

$$V_{10} = \frac{\sum_{10}^{28} a_k \cdot 1{,}03^{(28-k)} + 451{,}042}{1{,}03^{18}} = 614{,}192$$ (contro 341,224 per turno isolato)

b) montando in *m* il valor capitale delle poliannualità, considerato all'inizio di quel turno, e detraendo l'accumulo (pure in *m*) dei redditi percepiti da *0* a *m*, già considerati nel valor capitale (metodo a valor passato)

$$(3.13.5)\quad V_m = C \cdot q^m - \sum_0^m a_h \cdot q^{(m-h)}$$

$$V_{10} = 451{,}042 \cdot 1{,}03^{10} - \sum_0^{10} a_h \cdot 1{,}03^{(10-h)} = 614{,}191$$

c) simulando che la serie di annualità inizi da *m*, con turno da *m* a *n+m* (metodo a cicli fittizi - parte ombreggiata in fig. 20)

$$(3.13.6)\quad V_m = \frac{\sum_m^n a_k \cdot q^{(n-k+m)} + \sum_0^m a_h \cdot q^{(m-h)}}{q^{n-1}}$$

$$V_{10} = \frac{\sum_{10}^{28} a_k \cdot 1{,}03^{(28-k+10)}}{1{,}03^{28} - 1} = 614{,}192$$

3.15 L'età del tornaconto

Riprendendo il concetto espresso all'inizio del par. 3.13, si può osservare come il valore all'anno *0*, cioè il valore capitale di un bene a redditi variabili come quelli di cui all'esempio del paragrafo citato, è pure esso variabile se limitiamo progressivamente la durata del turno. Osserviamo che nella 3.14.3

$$C = \frac{P}{q^n - 1}$$

dove P è l'accumulazione all'anno n delle annualità positive e negative del turno, sia il numeratore che il denominatore variano con il variare della lunghezza temporale del turno. L'accumulazione P aumenta con il progredire degli anni del turno fintantoché i redditi sono positivi, ma contemporaneamente si presenta l'effetto diminutivo del denominatore sulla frazione. Nella figura 19 abbiamo rappresentato con la linea tratteggiata l'andamento del valore dell'espressione per i numeri dell'esempio, dal quale rileviamo che il valor capitale massimo dell'insieme delle periodicità illimitate lo si ha non attendendo lo spegnersi dei redditi, bensì interrompendo i turni ad un'età che nell'esempio è di anni *24*, in cui il valore capitale C = 478,696 contro l'analogo valore 451,042 ricavato per l'anno *28*, allo spegnersi dei redditi. Ne consegue un andamento corretto della figura 20 come nella 21, nella quale abbiamo pure indicato l'eventualità di un primo turno di maggiore ampiezza per ragioni di avviamento.

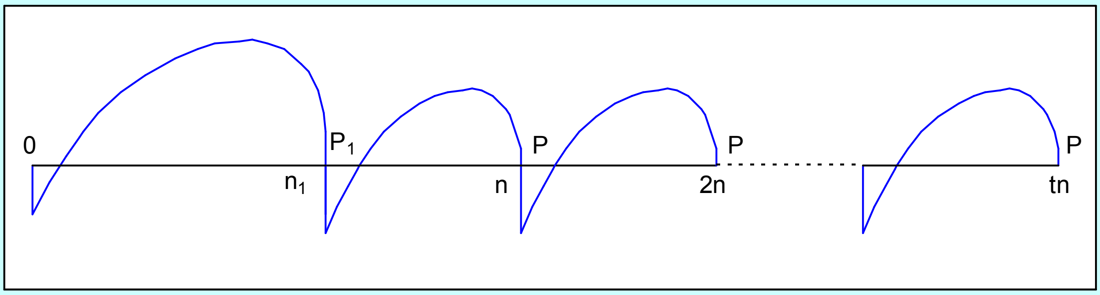


Fig. 21

Con le conoscenze acquisite non sarà difficile trovare nei vari casi la durata migliore del turno, che nell'estimo rurale viene chiamata *"età del tornaconto"*, sul cui significato estimativo rimandiamo alla lettura di testi specifici (ad es. G. Antonelli, Estimo rurale, civile e catastale, ed. Ofiria, Firenze).

Va ancora detto che la ricerca del massimo della 3.14.3 sarebbe possibile matematicamente se l'espressione rappresentasse una funzione continua e derivabile nell'intervallo di turno, ciò che generalmente non lo è. Sarà pertanto necessario cercare il massimo per tentativi.

3.16 Valori medi

Abbiamo introdotto al paragrafo 3.14 il concetto di *media economica*, cioè di quella annualità virtuale e costante che produce gli stessi effetti economici (accumulazione iniziale e finale) di una serie di annualità comunque variabili, ovviamente per un saggio d'interesse prefissato.

Sarà quindi in regime d'interesse composto e nel caso di annualità variabili in progressione aritmetica

$$a_m = a + \frac{d}{r} - n \cdot \frac{d}{q^n - 1} \tag{3.16.1}$$

e per la progressione geometrica

$$a_m = a \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q} \cdot \frac{r}{q^n - 1} \tag{3.16.2}$$

e per k = q

$$a_m = n \cdot a \cdot k^{n-1} \cdot \frac{r}{q^n - 1} \tag{3.16.2'}$$

Non sarà difficile trovare la media economica negli altri casi. Nell'esempio del par. 3.13 tale valore risulta

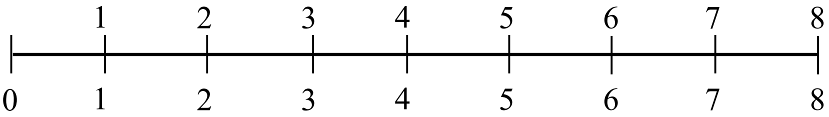
$$a_m = A_{28} \cdot \frac{r}{q^{28} - 1} = 13{,}531$$

annualità che accumulata come costante e illimitata fornisce il valore capitale trovato al paragrafo 3.14

$$C = \frac{13{,}531}{0{,}03} = 451{,}042$$

Il confronto di questo valore con gli altri valori medi generalmente usati per rappresentare con un solo numero un gran numero di dati (altrimenti difficilmente valutabili nel loro complesso) ci porta a far notare che, mentre la media economica è influenzata dal saggio d'interesse, le altre medie ne sono indipendenti.

Ad esempio, se riprendiamo la serie di *8* annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (vedi par 3.11), notiamo che



con il saggio	r = 5%	$a_m = 1 + \frac{1}{0{,}05} - 8 \cdot \frac{1}{1{,}05^8 - 1}$	= 4,244
" "	r = 3%	$a_m =$	= 4,345
" "	r = 1%	$a_m =$	= 4,448
" "	r = 0,1%	$a_m =$	= 4,495

In merito alla media aritmetica ricordiamo anzitutto che se una serie di valori x_1, x_2, …, x_n si presentano con frequenze (o pesi) p_1, p_2,… p_n la loro media è

$$M_A = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n}{\sum p_i} \qquad (3.16.3)$$

che se i pesi (o frequenze) sono tutti uguali, diventa semplicemente

$$M_{A,S} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad (3.16.3')$$

Nel nostro esempio M_A = 4,5, e notiamo come la diminuzione del saggio d'interesse porti la media economica vicina, ma sempre in difetto, a quella aritmetica.

Il confronto con la media geometrica porta a valori più distanti. In merito alla successione di cui sopra ricordiamo che la media geometrica, pesata o semplice, è

$$M_G = \left(x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}} \qquad M_{G,S} = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot ... x_n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (3.16.4)$$

e ricordiamo pure che il logaritmo della media geometrica è la media aritmetica (pesata o semplice) dei logaritmi dei dati

$$log\, M_G = \frac{1}{\sum p_i} \cdot \left(p_1 \cdot log\, x_1 + p_2 \cdot log\, x_2 + ... p_n \cdot log\, x_n\right)$$

$$log\, M_{G,S} = \frac{1}{n} \cdot \left(log\, x_1 + log\, x_2 + ... log\, x_n\right)$$

Nel nostro caso $M_G = 3{,}764$, ben distante dalle due medie già esaminate.

Per completezza didattica citiamo ancora la media armonica, uguale all'inverso della media aritmetica dell'inverso dei dati, cioè

$$(3.16.5)\quad M_H = \left[\frac{1}{\sum p_i}\cdot\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}+\dots\frac{p_n}{x_n}\right)\right]^{-1} \qquad M_{H,S} = \left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots\frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

Nel nostro caso $M_H = 2{,}943$, ancor più distante dalle altre.

Analogamente a quanto sopra, per l'esempio di cui al par. 3.12, cioè per la seguente serie di annualità in progressione geometrica

	1	$1{,}1$	$1{,}1^2$	$1{,}1^3$	$1{,}1^4$	$1{,}1^5$	$1{,}1^6$	$1{,}1^7$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Con il saggio r = 5% $\qquad a_m = 1\cdot\frac{1{,}1^8-1{,}05^8}{1{,}1-1{,}05}\cdot\frac{0{,}05}{1{,}05^8-1} = 1{,}395$

" " r = 3% $\qquad a_m = \qquad = 1{,}409$
" " r = 1% $\qquad a_m = \qquad = 1{,}422$
" " r = 0,1% $\qquad a_m = \qquad = 1{,}428$

$M_A = 1{,}429$ $\qquad M_G = 1{,}396$ $\qquad M_H = 1{,}363$

Concludiamo osservando che per dati positivi

$$M_H \le M_G \le a_m \le M_A$$

3.17 Scarti dalla media

La distribuzione di un complesso di valori, quali quelli studiati nei paragrafi precedenti, intorno ad un loro valore medio, viene chiamata “*dispersione*”, e “*scarto*” la distanza di ogni valore da quello medio. È importante, anche in campo economico, la valutazione di questa dispersione in un insieme di valori, attraverso il calcolo di indicatori, fra i quali citeremo sinteticamente i più usati.

Riprendendo l’insieme dei valori x_i di peso p_i del paragrafo precedente, e nel quale abbiamo individuato un valore medio M, nonché prendendo come origine questo M e computando in valore assoluto la distanza da esso di ogni altro valore dell’insieme, potremo definire lo “*scarto medio*” cioè la media degli scarti dalla media, con la

$$(3.17.1)\quad e_m = \frac{\sum_1^n {}_i |x_i - M| \cdot p_i}{\sum_1^n {}_i\, p_i}$$

espressione che, se i pesi sono tutti uguali, si riduce a

$$(3.17.2)\quad e_m = \frac{\sum_1^n {}_i |x_i - M|}{n}$$

Nella successione degli otto valori in progressione aritmetica già presi ad esempio nel paragrafo precedente, e nei quali $M_A = 4{,}5$, lo scarto medio è 2,0.

Ad ulteriore indicazione della dispersione viene proposto in "*Statistica*" il calcolo della "*Varianza*", cioè della media dei quadrati degli scarti dalla media, cioè

$$(3.17.3)\quad V = \frac{\sum_1^n {}_i (x_i - M)^2 \cdot p_i}{\sum_1^n {}_i\, p_i}$$

che per $p_i = 1$ diventa

$$(3.17.4)\quad V = \frac{\sum_1^n {}_i (x_i - M)^2}{n}$$

e che nel nostro esempio sarà V = 5,25.

Ed infine ricordiamo, come di forte significato per questa valutazione dell'andamento dei valori intorno ad un loro valore medio la "*Deviazione standard*" o "*Scarto quadratico medio*", cioè la radice quadrata della Varianza

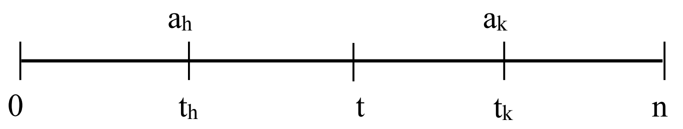
$$(3.17.5)\qquad \sigma = \sqrt{V}$$

che nel nostro esempio vale $\sigma = 2{,}291$.

3.18 Scadenza media

Fra le varie operazioni che possono doversi fare nell'ambito di una successione di *n* annualità, va considerata in particolare quella della determinazione di un unico momento temporale *t* in cui il valore di detta successione possa venir scambiato con un unico capitale predeterminato, in regime di equivalenza finanziaria. Il capitale di scambio è solitamente la somma algebrica delle annualità ancora nell'operazione (tutte, se si è all'inizio della successione) ed il momento t cercato viene chiamato "*scadenza media*" ed è ovviamente collocato fra *0* e n, oppure fra m e n se il momento m della valutazione è successivo all'inizio dell'intera operazione, che termina in n.

Sarà quindi, per annualità discrete ed in regime d'interesse composto



(3.18.1) $V_{t,i,c} = \sum_0^t {}_h a_h \cdot q^{(t-t_h)} + \sum_t^n {}_k a_k \cdot \mathrm{v}^{(t_k - t)} = \sum_0^n a_i$

dove i sta sia per h che per k

od anche, accumulando tutte le annualità in n, oppure in *0*, e poi scontando oppure montando tutto in t

(3.18.1') $V_{t,i,c} = \mathrm{v}^{(n-t)} \cdot \sum_0^n {}_i a_i \cdot q^{(n-i)} = q^t \cdot \sum_0^n a_i \cdot \mathrm{v}^{t_i} = \sum_0^n a_i$

da cui $\quad t = \dfrac{log \sum_0^n a_i - log \sum_0^n a_i \cdot \mathrm{v}^{t_i}}{log\, q}$

Ad esempio, per una serie di *8* annualità del valore di *125* ciascuna, impegnate al *5%*, e per le quali $V_{0,i,c} = 807{,}902$

$$t = \frac{log\, 1000 - log\, 807{,}902}{log\, 1{,}05} = 4{,}372$$

ed osserviamo che abbassando il tasso al *2%*, e quindi con $V_{0,i,c} = 915{,}685$, segue t = 4,448, mentre se lo aumentiamo al *8%* e quindi con $V_{0,i,c} = 718{,}330$, segue t = 4,299; cioè aumentando il tasso la scadenza media diminuisce, e viceversa. Quando il tasso tende a 0 la scadenza media tende alla media aritmetica pesata delle varie annualità.

Va ancora detto che, ovviamente, se le annualità sono illimitate pure la scadenza media tende a $+\infty$.

Nel caso di serie di annualità periodiche posticipate in progressione aritmetica, non sarà difficile riconoscere, con riferimento al par 3.11, che

(3.18.1'') $$t = \frac{log\left[\left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d\right) \cdot n\right] - log\, A_0}{log\, q}$$

Nel caso di serie di annualità di progressione geometrica (par. 3.12)

(3.18.1''') $$t = \frac{log \frac{k^n - 1}{k-1} - log\, \nu \cdot \frac{1-(k \cdot \nu)^n}{1 - k \cdot \nu}}{log\, q}$$

L'impiego, in questa operazione, degli altri regimi di cui al par 3.9 porta alle espressioni

(3.18.2) $$V_{t,i,s} = \sum_0^t {}_h a_h \cdot \left[1 + (t - t_h) \cdot r\right] + \sum_t^n {}_k a_k \cdot \frac{1}{1 + (t_k - t) \cdot r} = \sum_0^n a_i$$

(3.18.3) $$V_{t,S,c} = \sum_0^t {}_h a_h \cdot \frac{1}{1 - (t - t_h) \cdot d} + \sum_t^n {}_k a_k \cdot \left[1 - (t_k - t) \cdot d\right] = \sum_o^n a_i$$

Risolvibili nell'incognita t solo per tentativi.

Va detto invece che negli usi bancari viene spesso utilizzato un *regime misto, lineare* sia per montare che per scontare, cioè

(3.18.4) $$V_t = \sum_0^t {}_h a_h \cdot \left[1 + (t - t_h) \cdot r\right] + \sum_t^n {}_k a_k \cdot \left[1 - (t_k - t) \cdot d\right] = \sum_0^n a_i$$

che per saggio unico r e dopo alcuni passaggi porta alle

(3.18.4') $$\sum_0^n {}_i a_i \cdot t_i = \sum_0^t {}_h a_h \cdot t_h + \sum_t^n {}_k a_k \cdot t_k$$

(3.18.4'') $$t = \frac{\sum_0^n {}_i a_i \cdot t_i}{\sum_0^n {}_i a_i}$$

Nel caso di un flusso continuo di reddito $\varphi(t)$ il tempo di scadenza medio in regime di interesse composto, semplice e di sconto commerciale nasce dalle

(3.18.5) $$\int_0^t \varphi(t) \cdot e^{\delta \cdot (t - t_h)} \cdot dt + \int_t^{t_n} \varphi(t) \cdot e^{-\delta \cdot (t_n - t_k)} \cdot dt = \int_0^{t_n} \varphi(t) dt$$

(3.18.6) $$\int_0^t \varphi(t) \cdot \left[1 + (t - t_h) \cdot h\right] \cdot dt + \int_t^{t_n} \varphi(t) \cdot \frac{1}{1 + (t_k - t)} \cdot dt = \int_0^{t_n} \varphi(t) \cdot dt$$

$$(3.18.7)\quad \int_0^t \varphi(t)\cdot\frac{1}{1-d\cdot(t-t_h)}\cdot dt+\int_t^{t_n}\varphi(t)\cdot[1-d\cdot(t_k-t)]\cdot dt=\int_0^{t_n}\varphi(t)\cdot dt$$

che, con l'espressione del regime finanziario istantaneo convergono nella

$$(3.18.8)\quad \int_0^t \varphi(t)\cdot e^{\int_{t_h}^{t}\delta(t)\cdot dt}\cdot dt+\int_t^{t_n}\varphi(t)\cdot e^{-\int_t^{t_n}\delta(t)\cdot dt}\cdot dt=\int_0^{t_n}\varphi(t)\cdot dt$$

Con le ormai note semplificazioni per φ = cost., δ = cost. oppure $\delta = f(t)$ per i casi più conosciuti.

3.19 Riparti

Sia da dividere un importo C in parti proporzionali ai gruppi omogenei di valori numericamente espressi

$a_1, a_2, a_3, \dots ; b_1, b_2, b_3, \dots ; c_1, c_2, c_3, \dots ; \dots$

Detta S la somma

$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots ; + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots + c_1, c_2 \cdot c_3 \cdot \dots + \dots$

le quote saranno

$$x_a=\frac{C}{S}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\dots;\qquad x_b=\frac{C}{S}\cdot b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\dots;\qquad x_c=\frac{C}{S}\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\dots \text{ ecc.}$$

Ovviamente il calcolo si semplifica se i gruppi di valori si riducono ad un numero solo, a; b; c; …

Il problema è tipico nei riparti di spese dei consorzi (di bonifica, di difesa, di irrigazione, stradali) oppure di complessi condominiali.

I valori a_i, b_i, c_i, ecc., possono essere pure rappresentati da espressioni numeriche, purché riferentesi omogeneamente a elementi presi a base del riparto (superfici, lunghezze, pendenze, velocità, altimetrie, redditi catastali, ecc.), nonché valutati in ragione diretta o inversa.

Ad esempio, sia da ripartire percentualmente un importo C in quattro quote proporzionali ai seguenti gruppi omogenei di valori numerici

$a_1 = 37{,}5$	$b_1 = 31{,}7$	$c_1 = 56{,}0$	$d_1 = 47{,}8$
$a_2 = 0{,}41^{0,5}$	$b_2 = 0{,}43^{0,5}$	$c_2 = 0{,}23^{0,5}$	$d_2 = 0{,}15^{0,5}$
$a_3 = 4{,}2^{-1}$	$b_3 = 2{,}8^{-1}$	$c_3 = 6{,}5^{-1}$	$d_3 = 1{,}9^{-1}$
5,717	7,424	4,132	9,743

$S = 27{,}016$

$$x_a = \frac{100}{S}\cdot 5{,}717 = 21{,}16\% \qquad x_b = \frac{100}{S}\cdot 7{,}424 = 27{,}48\%$$

$$x_c = \frac{100}{S}\cdot 4{,}132 = 15{,}29\% \qquad x_d = \frac{100}{S}\cdot 9{,}743 = 36{,}07\%$$

3.20 Avvertenze

In questo capitolo 3° abbiamo usato in modo equivalente il termine *saggio* e *tasso* per indicare l'interesse per unità di capitale e unità di tempo in una operazione finanziaria; lo abbiamo fatto per abituare il lettore alla pratica bancaria corrente di confusione dei due termini, con prevalenza alla parola *tasso*. Ricordiamo però che al par. 1.1 di questo lavoro abbiamo precisato la differenza concettuale fra le due parole.

Va inoltre detto che per quanto riguarda la simbologia, si è cercato di adottare simboli semplici, storicamente tradizionali; il lettore rimanga però avvertito che su altri testi di questi argomenti potrà trovare altri simboli per le nostre stesse espressioni, ed in particolare i seguenti di uso più comune nel regime ad interesse composto:

$s_{n\neg i} = \dfrac{q^n - 1}{r}$ = (3.4.1) = accumulazione finanziaria, o montante, in t_n di n annualità unitarie, periodiche, costanti, posticipate, al tasso i = r

$\sigma_{n\neg i} = \dfrac{1}{s_{n\neg i}} = \dfrac{r}{q^n - 1}$ = (3.8.1), (4.3.2) = quota costitutiva di un capitale unitario secondo quanto precede.

$\ddot{s}_{n\neg i} = \dfrac{q^n - 1}{r}\cdot q$ = (3.4.4) = accumulazione finanziaria, o montante, in t_n di n annualità unitarie, periodiche costanti, anticipate, al tasso i = r.

$\ddot{\sigma}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{r \cdot \nu}{q^n - 1}$ = quota costitutiva di un capitale unitario secondo quanto precede

$a_{\overline{n}|i} = \dfrac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \dfrac{1 - \nu^n}{r}$ = (3.4.2) = valore attuale in t_0 di n annualità unitarie, periodiche, costanti, posticipate, al tasso i = r.

$\alpha_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \dfrac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = \dfrac{r}{1 - \nu^n}$ = (3.8.1), (5.8.1) = quota di ammortamento di un debito unitario, secondo quanto precede.

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{q^n - 1}{r \cdot q^{n-1}} = \dfrac{1 - \nu^n}{r \cdot \nu}$ = (3.4.5) = valore attuale in t_0 di n annualità unitarie, periodiche, costanti, anticipate, al tasso i = r.

$\ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{r \cdot q^{n-1}}{q^n - 1} = \dfrac{r \cdot \nu}{1 - \nu^n}$ = (5.10.1) = quota di ammortamento di un debito unitario, secondo quanto precede

<u>Capitolo 3°</u>

ESERCIZI E QUESITI RISOLTI

1 - Qual è il valore dell'accumulazione finale di una serie di 12 annualità anticipate, di valore costante 100, impiegate in regime di interesse composto con saggio del 4% ? Ed il valore iniziale dell'accumulazione ? Ed il valore dopo trascorsi 6 anni dall'inizio ?

$$A_{12}^{x}(i,c) = 100 \cdot \frac{1{,}04^{12} - 1}{0{,}04} \cdot 1{,}04 = 1.562{,}684$$

$$A_{0}^{x}(i,c) = A_{12}^{x} \cdot 1{,}04^{-12} = 976{,}048$$

$$A_{6}^{x}(i,c) = A_{12}^{x} \cdot 1{,}04^{-6} = A_{0}^{x} \cdot 1{,}04^{6} = 1.235{,}012$$

2 - Qual è il valore capitale di un bene capace di un reddito di valore 100, annuo posticipato e illimitato, ma differito di 6 anni, in regime d'interesse composto al saggio del 3% ?

$$C = \frac{100}{0{,}03} \cdot 1{,}03^{-6} = 2.791{,}614$$

3 - Qual è il valore attuale (iniziale) di una serie di 24 redditi quadrimestrali posticipati di valore 100, in regime di interesse composto, all'interesse annuo equivalente del 8% ?

$$r' = 1{,}08^{1/3} - 1 = 0{,}02598$$

$$A_{0}(i,c) = 100 \cdot \frac{1{,}02598^{24} - 1}{0{,}02598} \cdot 1{,}02598^{-24} = 1.769{,}179$$

4 - Qual è il valor capitale di un bene capace di un reddito di valore 100, trimestrale posticipato e illimitato, in regime di interesse composto, all'interesse annuo equivalente del 8% ?

$$r' = 1{,}08^{1/4} - 1 = 0{,}01942$$

$$C = \frac{100}{0{,}01942} = 5.147{,}595$$

5 - Un capitale del valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di 12 rate semestrali posticipate costanti, differite di due anni, al tasso del 3% semestrale, in regime di interesse composto. Qual è l'importo delle rate semestrali ?

$$a(\text{sem.}) = 10.000 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 1{,}03^{16}}{1{,}03^{12} - 1} = 1.130{,}710$$

6 - Un capitale del valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di rate semestrali anticipate del valore di 1.000 ciascuna, in regime di interesse composto, al tasso annuo del 8%. Qual è il numero delle rate, calcolato in difetto, e qual è l'importo dell'ultima rata ?

$r_2 = 1{,}08^{1/2} - 1 = 0{,}03923$ dalla $A_0^x = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{r \cdot q^n} \cdot q$ si ricava

$n = \dfrac{\log a \cdot q - \log(a \cdot q - A_0^x \cdot r)}{\log q} = 12{,}318$ con $n = 12 \rightarrow A_0^x = 9.796{,}947$

$C - A_0^x = 203{,}053$

L'ultima rata sarà quindi $a_{11} = 1.000{,}00 + 203{,}053 \cdot q^{11} = 1.310{,}054$

E difatti $C = \left(1.000 \cdot \dfrac{1{,}03923^{12} - 1}{0{,}03923} + 310{,}054\right) : 1{,}03923^{11} = 10.000{,}023$

7 - Un capitale di valore attuale C = 10.000 viene scambiato con una serie di 24 rate trimestrali posticipate dal valore di 500 ciascuna, in regime di interesse composto. Qual è il tasso annuale di interesse dell'operazione, con metodo iterativo (5 iterazioni) partendo dall'espressione di Baily, oppure con il metodo di Newton partendo da un tasso trimestrale r = 0,016, oppure con il metodo di interpolazione lineare partendo da tassi trimestrali del 0,014 e 0,016 ? Cosa si osserva ?

Con metodo iterativo

$$S_0 = \frac{10.000}{500} = 20 \qquad h = \left(\frac{24}{20}\right)^{\frac{2}{25}} - 1 = 0{,}01469 \qquad r = h \cdot \frac{12 - 23 \cdot h}{12 - 46 \cdot h} = 0{,}01513$$

Iniziamo l'iterazione con r = 0,015

$$r_1 = \frac{1 - 1{,}015^{-24}}{20} = 0{,}01502 \qquad r_2 = \frac{1 - (1 + r_1)^{-24}}{20} = 0{,}01504$$

$$r_3 = \frac{1 - (1 + r_2)^{-24}}{20} = 0{,}01505 \qquad r_4 = \frac{1 - (1 + r_3)^{-24}}{20} = 0{,}01507$$

$$r_5 = \frac{1 - (1 + r_4)^{-24}}{20} = 0{,}01508$$

$$C = 500 \cdot \frac{1 - (1 + r_5)^{-24}}{r^5} = 10.005{,}903$$

$$r(\text{ann.}) = (1 + 0{,}01508)^4 - 1 = 0{,}061698 = 0{,}06170$$

Con il metodo della tangente

Per $r = 0{,}016$ e $n = 24$

$$y_a = f(r) = \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} = \frac{1{,}016^{24} - 1}{0{,}016 \cdot 1{,}016^{24}} = 19{,}7996$$

$$f'(r) \text{ in } a = \frac{r \cdot n \cdot q^{-n-1} - 1 + q^{-n}}{r^2} = -228{,}8118$$

e dalla $f'(r) = \dfrac{y - y_a}{x - x_a}$ per $y = S_0 = 20$

$$\frac{20 - 19{,}7996}{x' - 0{,}016} = -228{,}8118 \qquad \text{da cui } x' = r' = 0{,}01512$$

$$C = 500 \cdot \frac{1 - (1 + r')^{-24}}{r'} = 10.001{,}258$$

$$r(\text{ann.}) = (1 + 0{,}01512)^4 - 1 = 0{,}06186$$

Con interpolazione lineare

Per $x_a = 0,016$ $\quad x_b = 0,014$ $\quad n = 24$

$y_a = 19,7996$ $\quad y_b = \dfrac{1,014^{24} - 1}{0,014 \cdot 1,014^{24}} = 20,2649$

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{20,2649 - 19,7996}{0,014 - 0,016} = -232,6436$$

$$x'' = r'' = 0,016 - \frac{20 - 19,7996}{232,6436} = 0,01514$$

$$C = 500 \cdot \frac{1 - (1 + r'')^{-24}}{r''} = 9.998,938$$

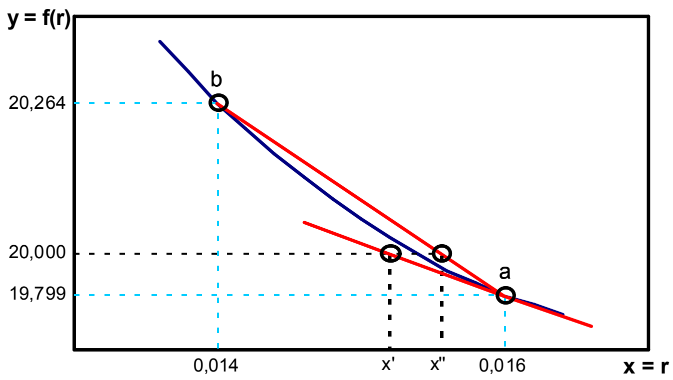
$$r(\text{ann.}) = (1 + 0,01514)^4 - 1 = 0,06195$$

Si osserva che, mediando i valori delle due interpolazioni, si ottiene il tasso trimestrale del 0,01513, con il quale

$$C = 500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,01513)^{-24}}{0,01513} = 10.000,048$$

pari al valore del capitale iniziale dell'operazione.

La figura, non in scala, indica la posizione relativa dei valori trovati.



y = f (r) per n = 24

8 - Un bene del valore 1.000 viene venduto al prezzo di 200 in contanti ed in 8 rate trimestrali posticipate uguali, in regime di sconto commerciale al tasso annuale del 8%. Qual è il valore di ogni rata ?

In regime lineare di sconto commerciale

$$d(\text{trim.}) = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$$

Dalla $\quad A_{0,s.c.} = a \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot d\right) = 1.000 - 200 = 800$

si deduce $\quad a = \frac{800}{8} \cdot \frac{1}{1 - 9 \cdot 0{,}01} = 109{,}890$

9 - Una serie di importi pari a 1.000, 2.000, 3.000, 2.000, 1.000 sono esigibili rispettivamente fra 6 mesi, 1 anno, 18 mesi, 2 anni, 30 mesi. Qual è il valore equivalente di scambio attuale, in regime lineare di sconto, al tasso del 10% annuo ?

$$V = 1.000 \cdot \left(1 - 6 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right) + 2.000 \cdot (1 - 0{,}1) + 3.000 \cdot \left(1 - 18 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right) +$$
$$+ 2.000 \cdot (1 - 2 \cdot 0{,}1) + 1.000 \cdot \left(1 - 30 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right) = 7.650{,}00$$

10 - Qual è il montante di una serie di 8 versamenti trimestrali posticipati di importo 100 ciascuno, in regime di interesse semplice al saggio annuo del 5% ? Ed il valore attuale di questa serie in regime pure lineare con tasso di sconto pari al saggio d'interesse annuo scontato ?

In regime lineare di posticipazione $\quad r(\text{trim.}) = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$

$$M = 100 \cdot 8 \cdot \left(1 + \frac{8-1}{2} \cdot 0{,}0125\right) = 835{,}00$$

In regime lineare di anticipazione, al tasso annuo di interesse scontato $d(\text{trim.}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05}$

$$V = 100 \cdot 8 \cdot \left(1 - \frac{8+1}{2} \cdot \frac{0{,}05}{4 \cdot 1{,}05}\right) = 757{,}143$$

11 - Qual è il valore dell'accumulazione finale di 8 annualità posticipate in progressione aritmetica crescente secondo la serie di numeri naturali (prima annualità uguale all'unità), con saggio d'interesse del 5% annuo, in regime di interesse semplice ? Ed in regime di sconto commerciale, sempre con tasso del 5% ?

Per $a_i = 1 \div 8$, $n = 8$, $t_n = 8$, $t_i = 1 \div 8$, $r = d = 0,05$

In regime di interesse semplice

$$A_{n,i.s.} = \sum_{1}^{n}{}_i a_i \cdot [1 + r \cdot (t_n - t_i)] = \sum_{1}^{8}{}_i a_i \cdot [1 + 0,05 \cdot (8 - t_i)] = 40,200$$

In regime di sconto commerciale

$$A_{n,s.c.} = \sum_{1}^{n}{}_i a_i \cdot \frac{1}{1 - d \cdot (t_n - t_i)} = \sum_{1}^{8}{}_i a_i \cdot \frac{1}{1 - 0,05 \cdot (8 - t_i)} = 41,313$$

12 - Qual è il valore attuale (iniziale) della serie delle 8 annualità di cui all'esercizio precedente, in regime di sconto razionale al saggio del 5%, ed in regime di sconto commerciale al tasso pari al saggio di cui prima scontato?

Per $a_i = 1 \div 8$, $t_i = 1 \div 8$, $n = 8$, $r = 0,05$, $d = r/1+r$

In regime di sconto razionale

$$A_{0,i.s.} = \sum_{1}^{n}{}_i \cdot \frac{a_i}{1 + r \cdot t_i} = \sum_{1}^{8}{}_i \cdot \frac{a_i}{1 + 0.05 \cdot t_i} = 28,227$$

In regime di sconto commerciale

$$A_{0,s.c.} = \sum_{1}^{n}{}_i a_i \cdot (1 - t_i \cdot d) = \sum_{1}^{8}{}_i a_i \cdot \left(1 - t_i \cdot \frac{0,05}{1,05}\right) = 26,285$$

13 - Qual è il valore dell'accumulazione finale di 8 annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all'unità, con k = 1,1 e con saggio d'interesse del 5% annuo, in regime di interesse semplice ? Ed in regime di sconto commerciale, sempre con tasso del 5% ?

	$a = 1$	k	k^2	k^3	k^4	k^5	k^6	k^7
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Per $a = 1$, $n = 8$, $i = 1 \div 8$, $k = 1{,}1$, $r = d = 0{,}05$

In regime di interesse semplice

$$A_{n,i.s.} = \sum_{1}^{n} {}_i\, a \cdot k^{i-1} \cdot [1 + r \cdot (n - i)] = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 - r \cdot \left(n - \frac{k^n - 1}{k - 1} \right) \right] = 13{,}154$$

In regime si sconto commerciale

$$A_{n,s.c.} = \sum_{1}^{n} {}_i\, a \cdot k^{i-1} \cdot \frac{1}{1 - d \cdot (n - 1)} = 13{,}712$$

14 – Qual è il valore attuale (iniziale) della serie di 8 annualità di cui all'esercizio presedente, in regime di sconto razionale al saggio del 5% ed in regime di sconto commerciale con tasso di sconto pari al saggio di interesse scontato ?

Per $a = 1$, $n = 8$, $i = 1 \div 8$, $k = 1{,}1$, $r = 0{,}05$, $d = r/1+r$

In regime di sconto razionale

$$A_{0,i.s.} = \sum_{1}^{n} {}_i\, a \cdot k^{i-1} \cdot \frac{1}{1 + r \cdot i} = 9{,}228$$

In regime di sconto commerciale

$$A_{0,s.c.} = \sum_{1}^{n} {}_i\, a \cdot k^{i-1} \cdot (1 - i \cdot d) = \frac{a}{k-1} \cdot \left[k^n - 1 + d \cdot \left(\frac{k^n - 1}{k - 1} - n \cdot k^n \right) \right] = 8{,}715$$

15 - Un'operazione finanziaria prevede 8 rate semestrali posticipate di valore 125 ciascuna al tasso istantaneo costante $\delta = 0{,}05$.   Qual è il montante al termine dell'operazione ed il valore attuale?

Si tratta di annualità costanti e discrete, che maturano in regime finanziario continuo, con tasso istantaneo costante δ, per cui

$$A_n = a \cdot \sum_1^n {}_i e^{\delta\cdot(n-i)} = 125 \cdot \left(e^{0,05\cdot 7} + e^{0,05\cdot 6} + ... + e^{0,05\cdot 1} + e^{0,05\cdot 0}\right) = 1.199,079$$

A complemento e verifica del valore trovato osserviamo che la successione dei montanti di ogni rata è una progressione geometrica con k = $e^{-0.05}$, con primo termine $125 \cdot e^{0,05\cdot 7}$ e ultimo termine $125 \cdot e^0 = 125 \cdot 1$, per cui

$$A_n = 125 \cdot \frac{1 \cdot e^{-0,05} - e^{0,05\cdot 7}}{e^{-0,05} - 1} = 1.199,079$$

In merito al valore iniziale dell'operazione, con lo stesso procedimento

$$A_0 = a_1 \cdot \sum_1^n {}_i e^{-\delta\cdot i} = 125 \cdot \left(e^{-0,05\cdot 1} + e^{-0,05\cdot 2} + ... + e^{-0,05\cdot 7} + e^{-0,05\cdot 8}\right) = 803,767$$

La progressione dei termini è ancora geometrica con k = $e^{-0.05}$, per cui

$$A_0 = 125 \cdot \frac{e^{-0,05\cdot 8} \cdot e^{-0,05} - e^{-0,05}}{e^{-0,05} - 1} = 803,767$$

Più semplicemente, scontando all'attualità l'accumulazione finale

$$A_0 = A_n \cdot e^{-0,05\cdot 8} = 803,767$$

Osserviamo ancora che il tasso istantaneo δ = 0,05 equivale ad un tasso fisso semestrale

$$r(\text{sem.}) = e^{0,05} - 1 = 0,05127$$

o ad un tasso annuale

$$r(\text{ann.}) = e^{0,05\cdot 2} - 1 = 0,10517$$

16 - All'operazione di cui all'esercizio precedente viene applicato il tasso istantaneo variabile $\delta = \dfrac{0,05}{1 + 0,05 \cdot t}$. Calcolare il montante ed il valore attuale.

Si tratta di annualità costanti e discrete, che maturano in regime finanziario continuo, con tasso istantaneo decrescente δ = f(t), e pertanto con valori di accumulazione inferiori a quelli dell'esercizio precedente.

$$A_n = a \cdot \sum_1^n {}_i e^{\int_{t_i}^{t_n} \delta(t)\cdot dt} \quad \text{con}$$

$$\int_{t_i}^{t_n} \delta(t)\cdot dt = \int_{t_i}^{t_n} \frac{0{,}05}{1+0{,}05\cdot t}\cdot dt = \ln|1+0{,}05\cdot t|_{t_i}^{t_n} = \ln\frac{1{,}40}{1+0{,}05\cdot t_i}$$

e con $\quad e^{\ln\frac{1{,}40}{1+0{,}05\cdot t_i}} = \dfrac{1{,}40}{1+0{,}05\cdot t_i} \qquad t_i = 1 \div 8$

ed in definitiva

$$A_n = 125\cdot 1{,}40\cdot\left(\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}10}+...+\frac{1}{1{,}35}+\frac{1}{1{,}40}\right) = 1.153{,}010$$

Con analogo procedimento

$$A_0 = a\cdot\sum_1^n {}_i e^{-\int_{t_0}^{t_i}\delta(t)\cdot dt} \qquad \text{con}$$

$$\int_{t_0}^{t_i} \delta(t)\cdot dt = \int_{t_0}^{t_i} \frac{0{,}05}{1+0{,}05\cdot t}\cdot dt = \ln|1+0{,}05\cdot t|_{t_0}^{t_i} = \ln(1+0{,}05\cdot t_i) - \ln 1 = \ln(1+0{,}05\cdot t_i)$$

e con $\quad e^{-\ln(1+0{,}05\cdot t_i)} = \dfrac{1}{1+0{,}05\cdot t_i} \qquad$ per $t_i = 1 \div 8$

ed in definitiva

$$A_0 = 125\cdot\left(\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}10}+...+\frac{1}{1{,}35}+\frac{1}{1{,}40}\right) = 823{,}578$$

Più semplicemente

$$A_0 = A_n\cdot e^{-\int_{t_0}^{t_n}\delta(t)\cdot dt} = A_n\cdot e^{-\ln|1+0{,}05\cdot t|_{t_0}^{t_n}} = A_n\cdot e^{-\ln 1{,}40} = A_n\cdot\frac{1}{1{,}40} = 823{,}578$$

17 - All'operazione di cui all'esercizio 15 viene applicato il tasso istantaneo variabile $\delta = \dfrac{0{,}05}{1-0{,}05\cdot t}$. Calcolare il montante ed il valore attuale.

Seguendo la procedura degli esercizi precedenti

$$A_n = a\cdot\sum_1^n {}_i e^{\int_{t_i}^{t_n}\delta(t)\cdot dt} \quad \text{con}$$

$$\int_{t_i}^{t_n} \delta(t) \cdot dt = \int_{t_i}^{t_n} \frac{0,05}{1-0,05 \cdot t} \cdot dt = -\ln\left|1-0,05 \cdot t\right|_{t_i}^{t_n} = \ln \frac{1-0,05 \cdot t_i}{0,60}$$

e con $\quad e^{\ln\frac{1-0,05\cdot t_i}{0,60}} = \dfrac{1-0,05 \cdot t_i}{0,60} \qquad$ per $t_i = 1 \div 8$

ed in definitiva

$$A_n = 125 \cdot \frac{1}{0,60} \cdot (0,95 + 0,90 + ... + 0,65 + 0,60) = 1.291,667$$

$$A_0 = a \cdot \sum_1^n {}_i e^{-\int_{t_0}^{t_i} \delta(t) \cdot dt} \qquad \text{con}$$

$$-\int_{t_0}^{t_i} \delta(t) \cdot dt = -\int_{t_0}^{t_i} \frac{0,05}{1-0,05 \cdot t} \cdot dt = \ln\left|1-0,05 \cdot t\right|_{t_0}^{t_i} = \ln(1-0,05 \cdot t_i) - \ln 1 = \ln(1-0,05 \cdot t_i)$$

e con $\quad e^{\ln(1-0,05\cdot t_i)} = 1-0,05 \cdot t_i \qquad$ per $t_i = 1 \div 8$

ed in definitiva

$$A_0 = 125 \cdot (0,95 + 0,90 + ... + 0,65 + 0,60) = 775,000 = A_n \cdot 0,60$$

Più semplicemente

$$A_0 = A_n \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_n} \delta(t) \cdot dt} = A_n \cdot e^{\ln\left|1-0,05\cdot t\right|_{t_0}^{t_n}} = A_n \cdot e^{\ln 0,60} = A_n \cdot 0,60 = 775,000$$

18 - Un reddito giornaliero di valore 100 viene operativamente previsto per la durata di due anni di 365 giorni ciascuno, in regime di interesse composto, al tasso del 5% annuo. Calcolare il montante al termine dell'operazione ed il valore attuale.

Fattore di capitalizzazione equivalente giornaliero

$$1 + r_k = (1+r)^{1/365} = 1,05^{1/365} = 1,000133681$$

Tasso giornaliero equivalente $\; r_k = 0,000133681$

$$A_n = 100 \cdot \frac{(1+r_k)^{2\cdot 365} - 1}{r_k} = 76.675,300$$

$$A_0 = A_n \cdot (1+r_k)^{-2\cdot 365} = 69.546,738$$

19 - L'operazione di cui all'esercizio precedente viene eseguita in regime di interesse semplice, alle stesse condizioni. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

Tasso d'interesse giornaliero equivalente $r_k = \frac{0{,}05}{365}$

$$A_n = 100 \cdot \sum_{0}^{730-1}{}_i 1 + r_k \cdot i = 100 \cdot 2 \cdot 365 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{365} \cdot \frac{730-1}{2}\right) = 76.645{,}000$$

$$A_0 = 100 \cdot \sum_{1}^{730}{}_i \frac{1}{1 + r_k \cdot i} = 69.571{,}886$$

20 - L'operazione di cui all'esercizio precedente viene eseguita in regime di sconto commerciale, alle stesse condizioni. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

Tasso di sconto giornaliero equivalente $r_k = \frac{0{,}05}{365}$

$$A_n = 100 \cdot \sum_{0}^{730-1}{}_i \frac{1}{1 - r_k \cdot i} = 76.907{,}621$$

$$A_0 = 100 \cdot \sum_{1}^{730}{}_i 1 - d_k \cdot i = 100 \cdot 2 \cdot 365 \cdot \left(1 - \frac{0{,}05}{365} \cdot \frac{730-1}{2}\right) = 69.345{,}000$$

21 - Un flusso continuo di reddito dell'intensità giornaliera di valore 100 viene previsto per la durata di due anni di 365 giorni ciascuno, in regime finanziario istantaneo, al tasso giornaliero costante equivalente al tasso annuale del 5%. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

Si tratta di una serie limitata di giorni, in cui il reddito $\varphi(t)$ è costante e tale che

$$\int_{m}^{m+1} \varphi(t) \cdot dt = \varphi = 100$$

Il reddito monta pure in regime di capitalizzazione continua ad un tasso istantaneo equivalente al tasso annuale del 5%. Sarà pertanto

$$r_k = (1 + r)^{1/365} - 1 = 0{,}133681 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta = \ln(1 + r_k) = 0{,}133672 \cdot 10^{-3} < r_k$$

Con un fattore di capitalizzazione e^{δ} e fattore di sconto $e^{-\delta}$

$$A_n = \varphi \cdot \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{\delta} = 100 \cdot \frac{e^{\delta \cdot 730} - 1}{\delta} = 76.680{,}423$$

$$A_0 = \varphi \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{\delta} = \frac{A_n}{e^{\delta \cdot n}} = 69.551{,}388$$

Osservazione

Dall'esame dei risultati dei tre esercizi precedenti a questo, unitamente a questo, troviamo conferma di quanto dedotto al par. 2.9 del testo didattico.

Per frazioni di tempo n > 1 il regime di sconto commerciale monta più velocemente degli altri (ovviamente con il limite indicato); in seconda posizione si colloca il regime finanziario istantaneo, poi il regime a interesse composto e poi ancora quello lineare a interesse semplice.

22 - L'operazione di cui all'esercizio precedente viene eseguita in regime finanziario istantaneo al tasso giornaliero variabile $\delta = \dfrac{r}{1 + r \cdot t}$ con r = 0,05/365. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

$$A_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n} \frac{r}{1+r\cdot t} \cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot \frac{1 + r \cdot t_n}{r} \cdot \ln(1 + r \cdot t_n) =$$

$$= 100 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0{,}05}{0{,}05} \cdot 365 \cdot \ln(1 + 2 \cdot 0{,}05) = 76.534{,}074$$

$$A_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t} \frac{r}{1+r\cdot t} \cdot dt} \cdot dt = \frac{\varphi}{r} \cdot \ln(1 + r \cdot t_n) =$$

$$= 100 \cdot \frac{365}{0{,}05} \cdot \ln(1 + 2 \cdot 0{,}05) = 69.576{,}431 = \frac{A_n}{1 + r \cdot t_n}$$

23 - L'operazione di cui all'esercizio 21 viene eseguita in regime finanziario istantaneo al tasso giornaliero $\delta = \dfrac{r}{1 - r \cdot t}$ con r = 0,05/365. Si calcoli il montante ed il valore attuale.

$$A_n = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{\int_t^{t_n} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot \frac{t_n}{1-r\cdot t_n} \cdot \left(1 - r \cdot \frac{t_n}{2}\right) =$$

$$= 100 \cdot \frac{730}{1-2\cdot 0{,}05} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{0{,}05}{2}\right) = 77.055{,}556$$

$$A_0 = \varphi \cdot \int_0^{t_n} e^{-\int_0^{t} \frac{r}{1-r\cdot t}\cdot dt} \cdot dt = \varphi \cdot t_n \cdot \left(1 - r \cdot \frac{t_n}{2}\right) =$$

$$= 100 \cdot 730 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{0{,}05}{2}\right) = 69.350{,}000 = A_n \cdot (1 - r \cdot t_n)$$

24 – Con riferimento alla seguente successione di redditi annuali posticipati, relativi ad un ciclo di 28 anni, oltre alla spesa iniziale di impianto ed al capitale di realizzo alla fine del ciclo, qual è il valore della accumulazione di tali redditi all'anno 18 oppure all'anno 22 assumendo un saggio di interessi del 3%? Se la successione si pensa ripetibile periodicamente e illimitatamente, ma troncata all'anno 18 oppure all'anno 22 con il realizzo di fine, qual è il valore capitale del bene capace di tale redditività?

-25	-12	-9	-6	-3	0	2	4	8	16	32	....	32	30	28	26	24	20	16	12	8	4	0 +10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

$$A_{18} = -25 \cdot 1{,}03^{18} - \left[\left(12 - \frac{3}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 3}{0{,}03}\right] \cdot 1{,}03^{13} + 2 \cdot \frac{2^5 - 1{,}03^5}{2 - 1{,}03} \cdot 1{,}03^8 +$$

$$+ 32 \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} + \left[\left(30 - \frac{2}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^4 - 1}{0{,}03} + \frac{4 \cdot 2}{0{,}03}\right] \cdot 1{,}03^{-4} +$$

$$+ \left[\left(20 - \frac{4}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} + \frac{6 \cdot 4}{0{,}03}\right] \cdot 1{,}03^{-10} + 10 \cdot 1{,}03^{-10} =$$

$$= -25{,}000 \cdot 1{,}03^{18} - 32{,}79605 \cdot 1{,}03^{13} + 63{,}58913 \cdot 1{,}03^8 + 284{,}55475 +$$

$$+ 113{,}26701 \cdot 1{,}03^{-4} + 66{,}91354 \cdot 1{,}03^{-10} + 10 \cdot 1{,}03^{-10} = 432{,}25179 = 432{,}252$$

$$A_{22} = A_{18} \cdot 1{,}03^4 = 486{,}50320 = 486{,}503$$

$$P_{18} = -25{,}0 \cdot 1{,}03^{18} - 32{,}79605 \cdot 1{,}03^{13} + 63{,}58913 \cdot 1{,}03^8 +$$

$$+ 284{,}55475 + 10{,}0 = 284{,}38461$$

$$C_{18} = \frac{P_{18}}{1{,}03^{18} - 1} = 404{,}856$$

$$P_{22} = (P_{18} - 10) \cdot 1{,}03^4 + 113{,}26701 + 10 = 432{,}08931$$

$$C_{22} = \frac{P_{22}}{1{,}03^{22} - 1} = 471{,}660$$

25 - Qual è il valore attuale, potenziale, di un bene che con un progetto d'investimento produttivo viene ritenuto capace di un reddito poliannuale, che al termine del primo turno di avviamento di 10 anni ha un valore di accumulazione di 1.000, e che successivamente e per tre turni di 8 anni ciascuno ha una previsione di 1.500 sempre per l'accumulazione dei prodotti e spese al termine di ogni turno, in regime di interesse composto al tasso del 4% annuo. Qual è il valore attuale se i turni successivi al primo sono da ritenersi illimitati ?

$$C = \frac{1.000}{1{,}04^{10}} + 1.500 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04^{18}} + \frac{1}{1{,}04^{26}} + \frac{1}{1{,}04^{34}} \right) = 2.352{,}368$$

$$C = \frac{1}{1{,}04^{10}} \cdot \left(1.000 + \frac{1.500}{1{,}04^{8}} \right) = 3.424{,}971$$

26 - Qual è il tempo di scadenza medio valutato all'inizio di una serie di 8 annualità posticipate, in progressione aritmetica crescente secondo la serie dei numeri naturali (prima annualità uguale all'unità) e con saggio di interesse del 5% annuo, in regime di interesse composto ?

$$\sum_0^n {}_i a_i = \left(1 + \frac{8-1}{2} \cdot 1 \right) \cdot 8 = 36$$

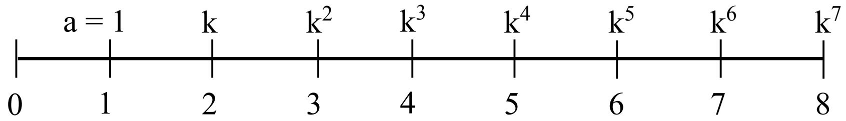
$$\sum_0^n {}_i a_i \cdot \nu^{t_i} = \left[\left(1 + \frac{1}{0{,}05} \right) \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} - 8 \cdot \frac{1}{0{,}05} \right] \cdot \frac{1}{1{,}05^8} = 27{,}433$$

$$t = \frac{\log \sum_0^n a_i - \log \sum_0^n a_i \cdot \nu^{t_i}}{\log q} = 5{,}570$$

27 - Qual è il tempo di scadenza medio nell'esercizio precedente, in regime misto lineare con saggio unico ?

$$t = \frac{\sum_0^n {}_i a_i \cdot t_i}{\sum_0^n {}_i a_i} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + ... + 8\cdot 8}{36} = 5{,}667$$

28 - Qual è il tempo di scadenza medio valutato all'inizio di una serie di 8 annualità posticipate, in progressione geometrica crescente, con la prima annualità uguale all'unità, con k = 1,1 e con saggio d'interesse del 20% - 10% - 5% annui, in regime di interesse composto ? Cosa si osserva ?



Con r = 20%

$$\sum_0^n {}_i a_i = \frac{k^7 \cdot k - 1}{k-1} = 11{,}435$$

$$\sum_0^n {}_i a_i \cdot \nu^{t_i} = \frac{1}{1{,}2^8} \cdot \frac{1{,}1^8 - 1{,}2^8}{1{,}1 - 1{,}2} = 5{,}014$$

$$t = \frac{\log \sum_0^n a_i - \log \sum_0^n a_i \cdot \nu^{t_i}}{\log q} = \frac{\log 11{,}435 - \log 5{,}014}{\log 1{,}2} = 4{,}522$$

Con r = 10%

$$\sum_0^n {}_i a_i \cdot \nu^{t_i} = \frac{8}{1{,}1} = 7{,}272$$

$$t = \frac{\log 11{,}435 - \log 7{,}272}{\log 1{,}1} = 4{,}750$$

Con r = 5%

$$\sum_0^n {}_i a_i \cdot \nu^{t_i} = \frac{1}{1{,}05^8} \cdot \frac{1{,}1^8 - 1{,}05^8}{1{,}1 - 1{,}05} = 9{,}017$$

$$t = \frac{\log 11{,}435 - \log 9{,}017}{\log 1{,}05} = 4{,}871$$

Da quanto sopra si osserva che in una progressione crescente di redditi, ad un aumento del tasso dell'operazione corrisponde una diminuzione del tempo della scadenza media.

29 - Qual è il tempo di scadenza medio nell'esercizio precedente in regime lineare con saggio unico ?

$$t = \frac{\sum_{0}^{n} {}_i a_i \cdot t_i}{\sum_{0}^{n} {}_i a_i} = \frac{1 \cdot 1 + k \cdot 2 + k^2 \cdot 3 ... + k^7 \cdot 8}{11{,}435} = 4{,}996$$

30 - Qual' è il tempo di scadenza medio valutato all'inizio dell'operazione di cui all'esempio seguente, in regime di interesse composto al tasso del 3% ?

-25	-12	-9	-6	-3	0	2	4	8	16	32	....	32	30	28	26	24	20	16	12	8	4	0 +10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

$$A_{28} = -25 \cdot 1{,}03^{28} - \left[\left(12 - \frac{3}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 3}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^{23} + 2 \cdot \frac{2^5 - 1{,}03^5}{2 - 1{,}03} \cdot 1{,}03^{18} +$$
$$+ 32 \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot 1{,}03^{11} + \left[\left(32 - \frac{2}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} + \frac{5 \cdot 2}{0{,}03} \right] \cdot 1{,}03^6 +$$
$$+ \left[\left(20 - \frac{4}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} + \frac{6 \cdot 4}{0{,}03} \right] + 10 = 580{,}910$$

$$\sum_{0}^{n} {}_i a_i = -25{,}0 - 32{,}79605 + 63{,}58913 + 245{,}19879 + 149{,}28329 + 66{,}91354 + 10{,}0 = 477{,}18870$$

$$\sum_{0}^{n} {}_i a_i \cdot \nu^{t_i} = A_0 = 580{,}910 \cdot 1{,}03^{-28} = 253{,}902$$

$$t = \frac{\log \sum_{0}^{n} a_i - \log \sum_{0}^{n} a_i \cdot \nu^{t_i}}{\log q} = 21{,}346$$

31 - Qual' è il tempo di scadenza medio nell'esercizio precedente se l'operazione è già giunta all'anno 18 oppure all'anno 22 ?

Dall'anno 18 al 28

$$\sum_0^n {}_i a_i = \frac{4}{2}\cdot(2\cdot 30-3\cdot 2)+\frac{6}{2}\cdot(2\cdot 20-5\cdot 4)+10=178$$

$$\sum_0^n {}_i a_i\cdot\nu^{t_i} = \left[\left(30-\frac{2}{0{,}03}\right)\cdot\frac{1{,}03^4-1}{0{,}03}+\frac{4\cdot 2}{0{,}03}\right]\cdot 1{,}03^{-4}+\left[\left(20-\frac{4}{0{,}03}\right)\cdot\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03}+\frac{6{,}4}{0{,}03}\right]\cdot 1{,}03^{-10}+$$
$$+10{,}0\cdot 1{,}03^{-10}=113{,}26701\cdot 1{,}03^{-4}+66{,}91354\cdot 1{,}03^{-10}+10{,}0\cdot 1.03^{-10}=157{,}86717$$

$$t=18+\frac{\log\sum_0^n a_i-\log\sum_0^n a_i\cdot\nu^{t_i}}{\log q}=22{,}061$$

Dall'anno 22 al 28

$$\sum_0^n {}_i a_i = \frac{6}{2}\cdot(2\cdot 20-5\cdot 4)+10=70$$

$$\sum_0^n {}_i a_i\cdot\nu^{t_i} = \left[\left(20-\frac{4}{0{,}03}\right)\cdot\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03}+\frac{6{,}4}{0{,}03}\right]\cdot 1{,}03^{-6}+10{,}0\cdot 1{,}03^{-6}=$$
$$=(66{,}91354+10{,}0)\cdot 1.03^{-6}=64{,}41388$$

$$t=22+\frac{\log\sum_0^n a_i-\log\sum_0^n a_i\cdot\nu^{t_i}}{\log q}=24{,}814$$

Capitolo 4°

LA COSTITUZIONE DI UN CAPITALE

4.1 L'operazione finanziaria

Si tratta di una delle più comuni operazioni finanziarie, attraverso la quale, con il versamento di una serie discreta di n importi o rate R, generalmente costanti ed a successione temporale pure costante, viene a costituirsi un capitale di valore V, che non è altro che l'accumulazione A_n di cui si è ampiamente trattato al Capitolo 3. Ovviamente gli importi, chiamati anche *quote costitutive del capitale*, possono essere versati posticipatamente o anticipatamente rispetto l'unità temporale prefissata, e l'operazione può svolgersi in uno dei regimi finanziari studiati, considerato un tasso d'interesse r che agisce discretamente o istantaneamente sui capitali.

Limiteremo la trattazione ai tre regimi di maggior interesse, nonché alle rate costanti, rimandando a quanto già esplicitato al Capitolo 3 per gli altri casi di rate comunque variabili.

Va ancora detto che in alcuni testi questo problema viene chiamato di *reintegro di un capitale* intendendosi che l'obiettivo dell'operazione è quello del rinnovo del valor capitale di un bene che per ragioni di consumo produttivo subisce una diminuzione parziale o totale della sua utilità, che pertanto va reintegrata.

4.2 In regime di interesse semplice

Per n rate costanti R, periodiche e posticipate, che si versano discretamente alla fine di ogni periodo, la formazione del capitale avviene secondo la 3.9.1 e pertanto (Fig. 22)

$$(4.2.1) \quad V_n = R \cdot n \cdot \left[1 + \frac{r}{2} \cdot (n-1)\right]$$

La quota di capitale che si forma alla fine di ogni turno, e la sua partizione in rata R e quota interessi I è (Fig. 23)

$$C_{m+1} = V_{m+1} - V_m = R + I_{m+1} = R + m \cdot R \cdot r = R \cdot (1 + mr)$$

dove si nota come, in questo regime, gli interessi maturino soltanto sulle rate versate e non sui montanti V.

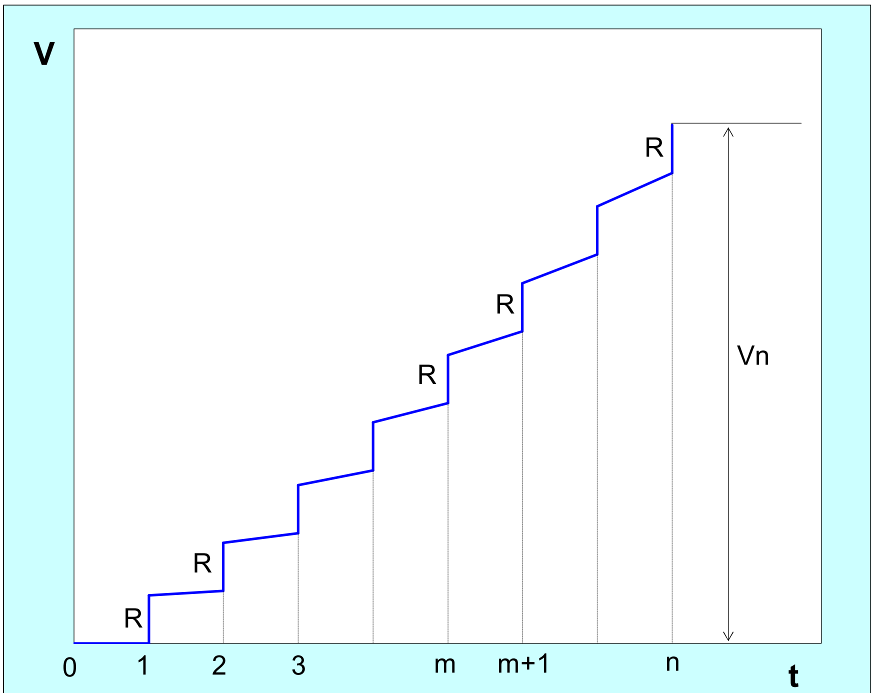


Fig. 22

V = f(t) in regime di interesse semplice con rate R posticipate

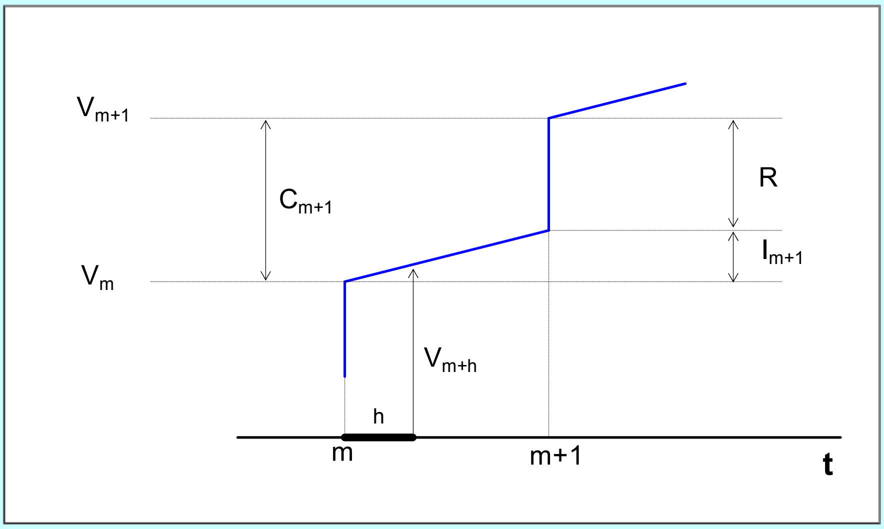


Fig. 23

Quote capitale e quote interesse

Si può pure notare come sia le quote capitali che le quote interessi crescano in progressione aritmetica con $d = R \cdot r$ e come, in un momento intermedio di turno distante temporalmente h dall'inizio dello stesso turno (con $h \leq 1$) sia

$$V_{m+h} = V_m + m \cdot R \cdot r \cdot h$$

Ad esempio, per un'operazione su 8 turni annuali, con il versamento di quote costitutive (rate) costanti e posticipate dal valore di 125 ciascuna, al tasso fisso del 5%, si sarà formato un capitale di valore $V_8 = 1.175$ con $\sum R = 1.000$ ed una accumulazione di interessi $\sum \mathrm{I} = 175$. Il valore dell'operazione in un momento intermedio di 4 anni e 127 giorni sarà:

$$V_{m+h} = 125 \cdot 4\left(1 + \frac{0,05}{2} \cdot 3\right) + 4 \cdot 125 \cdot 0,05 \cdot \frac{127}{365} = 546,20$$

Prefissato il capitale da formare, di valore V, la formula inversa darà la quota costitutiva

$$(4.2.2) \quad R = \frac{V_n}{n \cdot \left(1 + r \cdot \frac{n-1}{2}\right)}$$

oppure il numero delle rate R, che dalla soluzione positiva dell'equazione di 2° grado che nasce dalla 4.2.1 sarà

$$(4.2.3) \quad n = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2V}{R \cdot r}}$$

In genere il numero *n* non è intero, bensì decimale, per cui occorrerà costruire opportunamente l'operazione. Qualora non si possa semplicemente rideterminare la rata *R* con la 4.2.2 assumendo *n* pari al numero intero immediatamente inferiore o superiore, occorrerà calcolare il valore dell'operazione alla fine del turno intero inferiore e completare la costituzione del capitale prefissato alla fine del turno successivo, tenendo però conto che l'operatore finanziario dovrà corrispondere gli interessi sul complesso delle rate finora versate.

Ad esempio, per la formazione di un capitale di valore V = 1.000 con rate posticipate R = 100 al tasso del 5% per turno, sarà n = 8,433. Pertanto si possono fare 8 turni con R = 106,38, oppure 9 turni con R = 92,59, oppure ancora si faranno 8 turni con R = 100 e V_8 = 940 ed alla fine del turno successivo (il 9°) si verserà una rata ridotta, pari alla differenza mancante, al netto degli interessi maturati nell'ultimo periodo dalle 8 rate già versate, cioè (Fig. 24):

$$R' = 1.000 - (940 + 8 \cdot 100 \cdot 0,05) = 20$$

Nel caso di rate R anticipate, secondo la 3.9.1' si avrà:

(4.2.4) $V_n^x = R^x \cdot n \cdot \left[1 + \frac{r}{2} \cdot (n+1)\right]$

$$V_{m+h}^x = V_m^x + R^x + (m+1) \cdot R \cdot r \cdot h$$

(4.2.5) $R^x = \dfrac{V_n^x}{n \cdot \left(1 + r \cdot \dfrac{n+1}{2}\right)}$

(4.2.6) $n^x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{r} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2V^x}{R^x \cdot r}}$

Semplice la determinazione di r in funzione degli altri valori, sia nel caso di rate posticipate che anticipate, ma di applicazione inconsueta in quanto i tassi vengono stabiliti in base ad altre considerazioni.

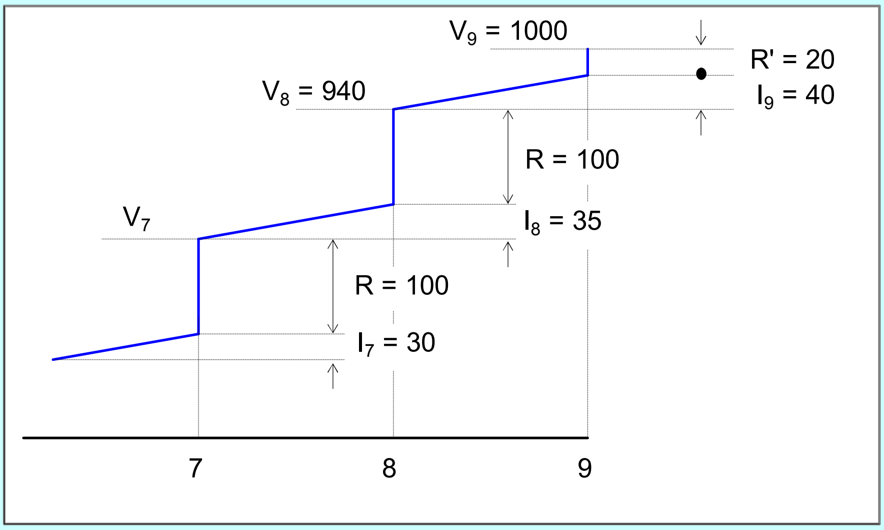


Fig. 24

4.3 In regime di interesse composto

Seguendo la procedura del capitolo precedente, per n rate R periodiche e posticipate, la formazione del capitale avviene secondo la 3.4.1 e pertanto (Fig. 25)

(4.3.1) $\mathrm{V_n} = \mathrm{R} \cdot \dfrac{\mathrm{q^n} - 1}{\mathrm{r}}$

In merito alla quota capitale che si forma alla fine di ogni turno va ricordato che in questo regime gli interessi maturano su tutto il capitale costituitosi fino all'inizio del turno stesso, e pertanto (Fig. 26)

$$C_{m+1} = V_{m+1} - V_m = R + I_{m+1} = R + V_m \cdot r$$

Queste quote capitale crescono in progressione geometrica con ragione q, ma ciò non avviene per gli interessi e per i valori totali V_m. A proposito di questi valori V_m non sarà inutile far notare didatticamente la loro ovvia differenza con il valore A_m della 3.4.3 riferentesi alla accumulazione finanziaria in m di tutte le rate, anche di quelle successive alla fine del turno n.

In un momento intermedio di turno, distante temporalmente h dall'inizio del turno stesso (con $h \leq 1$) sarà:

$$V_{m+h} = V_m \cdot q^h$$

Nell'esempio già proposto per l'interesse semplice, cioè di 8 turni con rate R = 125 posticipate al tasso fisso del 5%, sarà $V_8 = 1.193{,}64$ (contro 1.175,00 dell'interesse semplice), con $\sum R = 1.000$ e $\sum \mathrm{I} = 193{,}64$ (contro 175,00 dell'interesse semplice). Il valore dell'operazione nel momento di 4 anni e 127 giorni sarà

$$V_{m+h} = 125 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} \cdot 1{,}05^{127/365} = 547{,}49$$

La funzione inversa per la determinazione del valore della rata sarà

$$(4.3.2) \qquad R = V_n \frac{r}{q^n - 1}$$

e per il numero delle rate

$$(4.3.3) \qquad n = \frac{\log(R + V_n \cdot r) - \log R}{\log q}$$

Come già detto per l'interesse semplice, questo numero n è generalmente decimale, per cui o lo si riporta al numero intero antecedente o successivo e vi si adegua la rata R, oppure si calcola il valore dell'operazione all'intero inferiore e si completa il capitale in un turno successivo tenendo però conto degli interessi sul capitale già costituito.

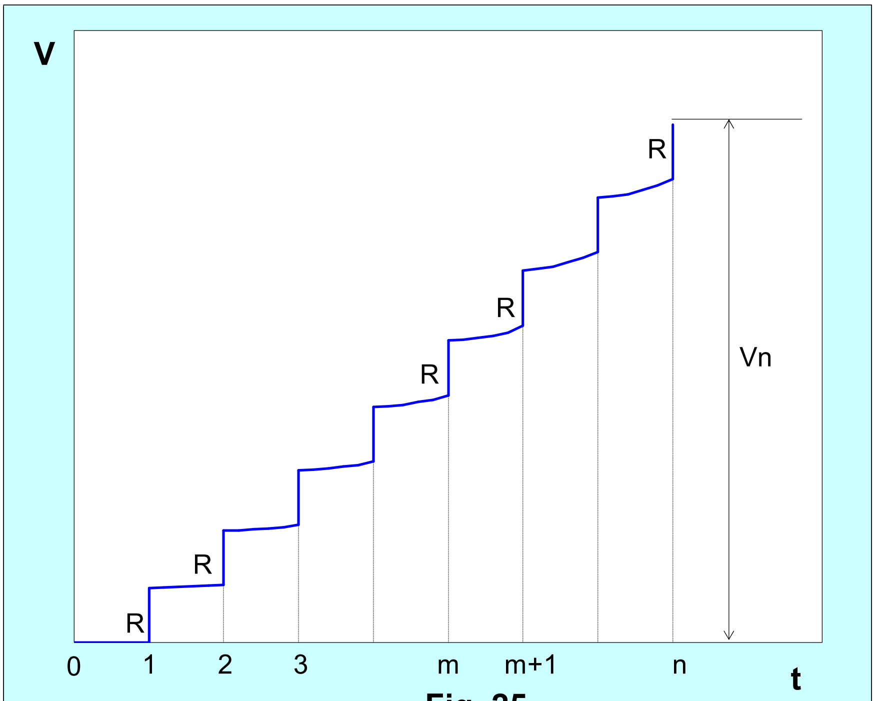


Fig. 25

V = f(t) in regime di interesse composto con rate R posticipate

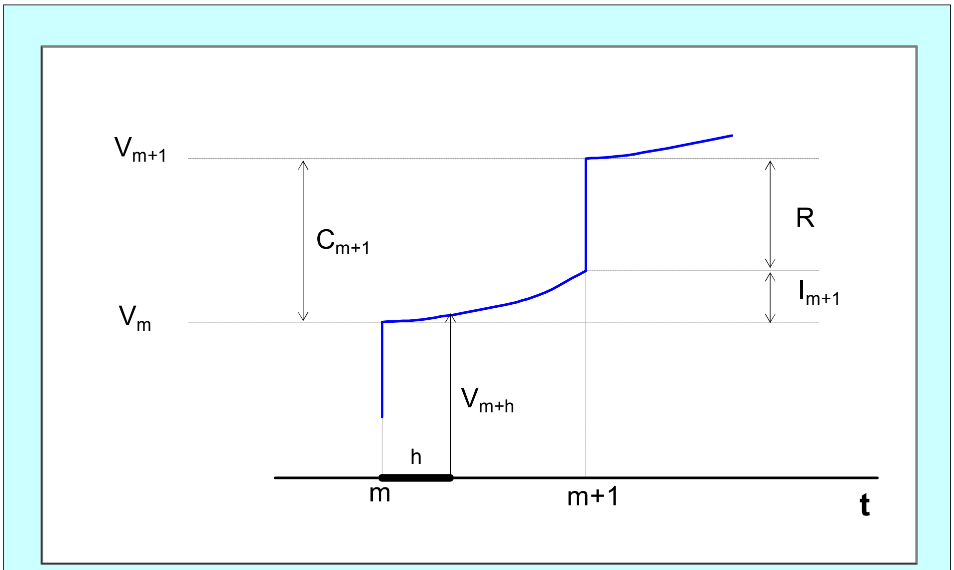


Fig. 26

Quote capitale e quote interesse

Riprendendo L'esempio già proposto al capitolo precedente, con V = 1.000, R = 100 e r = 5%, sarà n = 8,310 (contro 8,433 all'interesse semplice), per cui si possono fare 8 turni con R = 104,72 oppure 9 turni con R = 90,69, oppure ancora si faranno 8 turni con R = 100 e V_8 = 954,911 e rimarrà da costituire in un turno successivo la differenza 1.000 – 954,911 = 45,089. Se i turni sono annuali, questa differenza viene formata dal montante del capitale già costituito alla fine del 8° turno, in quanto

$$954{,}911 \cdot 1{,}05 = 1.002{,}657$$

Quindi non occorrono altri versamenti, ed anzi il tempo necessario alla formazione è una frazione di turno, cioè

$$n = \frac{\log 1.000 - \log 954{,}911}{\log 1{,}05} = 0{,}9456 = 345\, giorni = 11\ mesi + 11\, giorni$$

Inoltre, se si conviene con l'operatore finanziario che per periodi inferiori all'anno si applichi il regime ad interesse semplice, osserviamo che

$$n = \frac{V_n - V_8}{V_8 \cdot r} = \frac{1.000 - 954{,}911}{954{,}911 \cdot 0{,}05} = 0{,}9444 = 345\ giorni$$

cioè il tempo necessario alla formazione nei due regimi è pressoché uguale, essendo tale valore vicino all'unità temporale di riferimento, in cui i montanti sono uguali (par. 2.9).

Nel caso di rate *R* anticipate sarà

$$(4.3.4) \quad V_n^x = R^x \cdot \frac{q^n - 1}{r} \cdot q$$

$$\mathrm{V}_{\mathrm{m+h}}^{\mathrm{x}} = \left(\mathrm{V}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{x}} + \mathrm{R}^{\mathrm{x}}\right) \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{h}} \qquad (\mathrm{h} \le 1)$$

$$(4.3.5) \quad R^x = V_n^x \cdot \frac{r}{q^n - 1} \cdot \frac{1}{q}$$

$$(4.3.6) \quad \mathrm{n}^{\mathrm{x}} = \frac{\log\left(\mathrm{R}^{\mathrm{x}}\mathrm{q} + \mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{r}\right) - \log \mathrm{R}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}}{\log \mathrm{q}}$$

Per la ricerca del tasso r in funzione degli altri elementi si rimanda a quanto esposto al par. 3.8.

4.4 In regime finanziario istantaneo

Seguendo le procedure precedenti e con le stesse ipotesi, nel caso di rate posticipate sarà (vedere anche par. 3.10)

$$(4.4.1) \quad V_n = R \cdot \frac{e^{n\delta} - 1}{e^{\delta} - 1}$$

essendo δ il tasso istantaneo, equivalente ad un tasso annuo con la $\delta = \ln(1 + r)$

Sarà pure, per la scomposizione della quota capitale che si forma ad ogni turno in rata *R* ed interessi *I*

$$C_{m+1} = V_{m+1} - V_m = R + I_{m+1} = R + V_m \cdot e^{\delta}$$

L'andamento dell'operazione è ancora quello delle figure 25 e 26. Le quote capitale crescono in progressione geometrica con ragione e^{δ}; non così gli altri termini. Sarà pure

$$V_{m+h} = V_m \cdot e^{\delta h} \quad (con\ h \leq 1)$$

Nell'esempio già proposto per i due regimi precedenti, con 8 turni, R = 125 posticipate e δ = 0,05 si ha V_8 = 1.199,08 (contro 1.175 e 1.193,64 degli altri due regimi), con ΣR = 1.000 e ΣI = 199,08.

Al momento t = 4 anni e 127 giorni il valore dell'operazione sarà

$$V_{m+h} = 125 \cdot \frac{e^{\delta \cdot 4} - 1}{e^{\delta} - 1} \cdot e^{\delta \cdot 127/365} = 549{,}26$$

Inoltre, se poniamo δ = ln(1 + 0,05) = 0,04879 possiamo verificare l'equivalenza con il montante V_8 all'interesse composto.

Per le funzioni inverse

$$(4.4.2) \quad R = V_n \cdot \frac{e^{\delta} - 1}{e^{n\delta} - 1}$$

$$(4.4.3) \quad n = \frac{ln\left(R + V_n \cdot e^{\delta} - V_n\right) - ln\, R}{\delta}$$

dove, per la *n* valgono le esplicazioni fatte al paragrafo precedente e per la *r* quelle del par. 3.8.

Per rate R anticipate

$$(4.4.4) \quad V_n^x = R^x \cdot \frac{e^{n\delta} - 1}{e^{\delta} - 1} \cdot e^{\delta}$$

$$V_{m+h}^{x} = \left(V_{m}^{x} + R^{x}\right) \cdot e^{\delta h}$$

(4.4.5) $$R^{x} = V^{x} \cdot \frac{e^{\delta} - 1}{e^{n\delta} - 1} \cdot \frac{1}{e^{\delta}}$$

(4.4.6) $$n^{x} = \frac{ln\left(R^{x} \cdot e^{\delta} + V_{n}^{x} \cdot e^{\delta} - V_{n}^{x}\right) - ln\, R^{x} \cdot e^{\delta}}{\delta}$$

Nella fig. 27 viene rappresentato l'andamento della formazione del capitale V_n in regime finanziario istantaneo con rate anticipate.

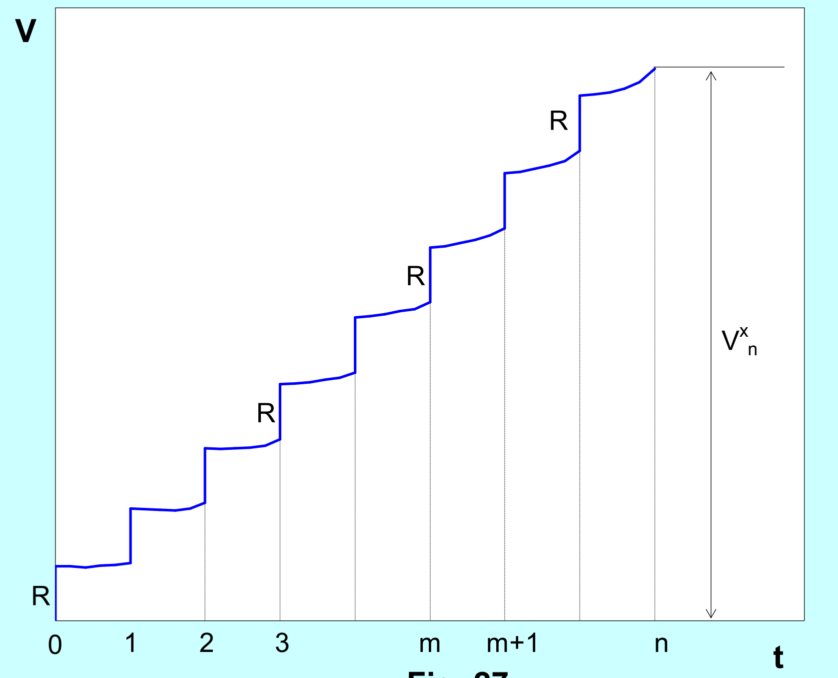


Fig. 27

V = f(t) in regime finanziario istantaneo con rate R anticipate

Capitolo 4°

ESERCIZI E QUESITI RISOLTI

1 - Si vuol costituire un capitale di valore 10.000 in cinque anni mediante un versamento immediato di valore 1.000 e cinque versamenti annuali posticipati. L'istituto finanziario propone un tasso del 6% per l'operazione. Trovare il valore della rata R in regime di interesse semplice, composto, finanziario istantaneo con tasso istantaneo pari al tasso discreto.

a interesse semplice

$$1.000 \cdot (1 + r \cdot n) + R \cdot n \cdot \left[1 + \frac{r}{2} \cdot (n-1)\right] = 10.000{,}00$$

$$R = \frac{10.000 - 1.000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}06)}{5 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 4)} = 1.553{,}57$$

a interesse composto

$$1.000 \cdot q^5 + R \cdot \frac{q^5 - 1}{r} = 10.000{,}00$$

$$R = \left(10.000 - 1.000 \cdot 1{,}06^5\right) \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^5 - 1} = 1.536{,}57$$

a interesse istantaneo

$$1.000 \cdot e^{\delta \cdot n} + R \cdot \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{e^{\delta} - 1} = 10.000{,}00$$

$$R = \left(10.000 - 1.000 \cdot e^{5 \cdot 0{,}06}\right) \cdot \frac{e^{0{,}06} - 1}{e^{0{,}30} - 1} = 1528{,}89$$

2 - In relazione all'esercizio precedente si determini il valore del capitale costituito alla fine del 3° anno, nei tre regimi considerati.

a interesse semplice

$$A_3 = 1.000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}06) + 1.553{,}57 \cdot 3 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 2) = 6.120{,}35$$

a interesse composto

$$A_3 = 1.000 \cdot 1{,}06^3 + 1.536{,}57 \cdot \frac{1{,}06^3 - 1}{0{,}06} = 6.082{,}84$$

a interesse istantaneo

$$A_3 = 1.000 \cdot e^{3 \cdot 0{,}06} + 1.528{,}89 \cdot \frac{e^{3 \cdot 0{,}06} - 1}{e^{0{,}06} - 1} = 6.073{,}36$$

3 - In relazione all'esercizio precedente si determini il valore del capitale costituito dopo 3 anni e 8 mesi, nei tre regimi considerati.

a interesse semplice (non scindibile)

$$V = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{11}{3} \cdot r\right) + 1.553{,}57 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{r}{2} \cdot 2\right) + 1.553{,}57 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot r = 6.346{,}78$$

a interesse composto (scindibile)

$$V = 6.082{,}84 \cdot 1{,}06^{2/3} = 6.323{,}78$$

a interesse istantaneo (scindibile)

$$V = 6.073{,}36 \cdot e^{2/3 \cdot 0{,}06} = 6.321{,}22$$

4 - Si vuol costituire un capitale di valore 10.000 in cinque anni con versamenti semestrali anticipati impiegati al saggio equivalente annuale del 6% uguale per tutti i regimi. Trovare il valore delle 10 rate in regime di interesse semplice, composto e finanziario istantaneo.

a interesse semplice

$$r(\text{sem.}) = \frac{r}{2} = 0{,}03$$

$$R = \frac{V}{n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot r\right)} = \frac{10.000}{10 \cdot \left(1 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}03\right)} = 858{,}369$$

a interesse composto

$$r(\text{sem.}) = (1+r)^{1/2} - 1 = (1+0{,}06)^{1/2} - 1 = 0{,}029563$$

$$R = V \cdot \frac{r}{q^n - 1} \cdot \frac{1}{q} = 10.000 \cdot \frac{0{,}029563}{1{,}029563^{10} - 1} \cdot \frac{1}{1{,}029563} = 848{,}964$$

<u>a interesse istantaneo</u>

$$\delta(\text{sem.}) = \frac{r}{2} = 0{,}03$$

$$R = V \cdot \frac{e^{\delta} - 1}{e^{n \cdot \delta} - 1} \cdot \frac{1}{\delta} = 10.000 \cdot \frac{e^{0{,}03} - 1}{e^{10 \cdot 0{,}03} - 1} \cdot \frac{1}{e^{0{,}03}} = 844{,}754$$

5 - In relazione all'esercizio precedente si determini il valore del capitale costituito alla fine del 3° anno, nei tre regimi considerati.

<u>a interesse semplice</u>

$$A_3 = 858{,}37 \cdot 6 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 \cdot 7) = 5.690{,}99$$

<u>a interesse composto</u>

$$A_3 = 848{,}96 \cdot \frac{1{,}029563^6 - 1}{0{,}029563} \cdot 1{,}029563 = 5.647{,}56$$

<u>a interesse istantaneo</u>

$$A_3 = 844{,}76 \cdot \frac{e^{6 \cdot 0{,}03} - 1}{e^{0{,}03} - 1} \cdot e^{0{,}03} = 5.637{,}06$$

6 - In relazione all'esercizio precedente si determini il valore del capitale costituito dopo 3 anni e 4 mesi, nei tre regimi considerati.

<u>a interesse semplice</u>

$$V = 5.690{,}990 + 858{,}369 + 7.858{,}369 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{2}{3} = 6.669{,}53$$

<u>a interesse composto</u>

$$V = (5.647{,}560 + 848{,}964) \cdot 1{,}029563^{2/3} = 6.623{,}94$$

<u>a interesse istantaneo</u>

$$V = (5.637{,}060 + 844{,}754) \cdot e^{0{,}03 \cdot 2/3} = 6.612{,}75$$

7 - Prevedendo di dover ristrutturare un fabbricato tra 10 anni, sostenendo una spesa di valore 100.000 si vuol conoscere la somma annua posticipata da accantonare, in regime di interesse semplice, composto, istantaneo, al saggio annuale del 5% uguale per tutti i regimi.

a interesse semplice

$$R = \frac{100.000}{10 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{9}{2}\right)} = 8.163{,}27$$

a interesse composto

$$R = 100.000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^{10} - 1} = 7.950{,}46$$

a interesse istantaneo

$$R = 100.000 \cdot \frac{e^{0{,}05} - 1}{e^{10 \cdot 0{,}05} - 1} = 7.903{,}41$$

8 - Un immobile di civile abitazione richiede, per poter fornire un reddito costante, le seguenti spese periodiche:

a) spese per la tinteggiatura ogni 5 anni (15 /m^2);

b) spese per rinnovo impianti ogni 25 anni (150 /m^2);

c) spese per ristrutturazione interna ogni 80 anni (1.000 /m^2)

Calcolare la quota annua per m^2 relativa alle suddette spese, nei tre regimi di cui all'esercizio precedente, al tasso annuo del 5% uguale per tutti i regimi.

a interesse semplice

$$R = \frac{15}{5 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{4}{2}\right)} + \frac{150}{25 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{24}{2}\right)} + \frac{1.000}{80 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{79}{2}\right)} =$$
$$= 2{,}727 + 3{,}750 + 4{,}202 = 10{,}679$$

a interesse composto

$$R = 15 \cdot \frac{0,05}{1,05^5 - 1} + 150 \cdot \frac{0,05}{1,05^{25} - 1} + 1.000 \cdot \frac{0,05}{1,05^{80} - 1} =$$
$$= 2,715 + 3,143 + 1,029 = 6,887$$

a interesse istantaneo

$$R = 15 \cdot \frac{e^{0,05} - 1}{e^{5 \cdot 0,05} - 1} + 150 \cdot \frac{e^{0,05} - 1}{e^{25 \cdot 0,05} - 1} + 1.000 \cdot \frac{e^{0,05} - 1}{e^{80 \cdot 0,05} - 1} =$$
$$= 2,707 + 3,089 + 0,956 = 6,752$$

L'analisi dei risultati, in particolare di quelli parziali, conferma l'inapplicabilità del regime a interesse semplice su periodi di tempo lunghi.

9 - Si vuol costituire un capitale di valore 50.000 in cinque anni, con rate semestrali posticipate. Con l'istituto finanziario viene convenuto un tasso creditorio effettivo del 6% annuo, in regime di interesse composto. Passati i primi tre anni, con l'inizio del quarto anno il tasso varia e scende al 5%. Si determini la rata riferentesi ai primi 6 semestri, il capitale costituito al termine del 3° anno ed il valore della rata dei quattro semestri successivi.

$r''(\text{sem.})$ per i primi tre anni $= 1,06^{1/2} - 1 = 0,029563$

$$R = 50.000 \cdot \frac{r''}{(1 + r'')^{10} - 1} = 4.370,310$$

$$C_3 = 4.370,310 \cdot \frac{(1 + r'')^6 - 1}{r''} = 28.237,956$$

$r''(\text{sem.})$ per gli ulteriori due anni $= 1,05^{1/2} - 1 = 0,024695$

$$C_5 - C_3 \cdot 1,05^2 = 18.867,653$$

R per gli ultimi quattro semestri $= 18.867,653 \cdot \dfrac{0,024695}{1,024695^4 - 1} = 4.545,738$

Si osserva come l'abbassamento del tasso creditorio riconosciuto dall'Istituto di credito ai depositi, porti ad un aumento dell'importo delle rate ancora da versare.

10 - L'operazione di cui all'esercizio precedente viene progettata a rate semestrali anticipate; immutate le altre condizioni. Si determinino i tre valori già sopra richiesti. Cosa si osserva?

R(sem.ant.) per i primi tre anni $= 4.370{,}310 \cdot 1{,}029563^{-1} = 4.244{,}820$

$$C_3 = 4.244{,}820 \cdot \frac{1{,}029563^6 - 1}{0{,}029563} \cdot 1{,}029563 = 28.237{,}956$$

come nel caso precedente.

$$C_5 - C_3 \cdot 1{,}05^2 = 18.867{,}653$$

R per gli ultimi quattro semestri anticipati $= 4.545{,}738 \cdot 1{,}024695^{-1} = 4.436{,}186$

11 - Si vuol costituire un capitale di valore 50.000 in cinque anni, con rate semestrali posticipate. Con l'istituto finanziario viene convenuto un tasso semestrale effettivo del 3% in regime d'interesse composto, e l'importo delle rate variabili in progressione aritmetica crescente, con una differenza fra due rate successive pari al 5% della prima rata. Determinare il valore della prima e dell'ultima rata ed il capitale formato alla fine del 3° anno.

$$50.000 = \left(a + \frac{0{,}05 \cdot a}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} - 10 \cdot \frac{0{,}05 \cdot a}{0{,}03} = a \cdot \left[\left(1 + \frac{0{,}05}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} - 10 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}03}\right]$$

$$a = R_1 = 3.596{,}17071 = 3.596{,}171$$

$$R_{10} = R_1 \cdot (1 + 9 \cdot 0{,}05) = 5.214{,}448$$

$$C_3 = 3.596{,}17071 \cdot \left[\left(1 + \frac{0{,}05}{0{,}03}\right) \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} - 6 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}03}\right] = 26.068{,}976$$

12 - L'operazione di cui all'esercizio precedente viene progettata sempre con 10 rate semestrali posticipate, al tasso semestrale del 3% ed in regime di interesse composto, ma a rate variabili in progressione geometrica crescente in ragione del 3%. Si determini il valore della prima e dell'ultima rata ed il capitale formato alla fine del 3° anno.

$$50.000 = n \cdot a \cdot q^{n-1} = n \cdot a \cdot k^{n-1} = 10 \cdot a \cdot 1{,}03^9$$

$$a = R_1 = 3.832{,}08366 = 3.832{,}084$$

$$R_{10} = R_1 \cdot 1{,}03^9 = 5.000{,}000$$

$$C_3 = 6 \cdot 3.832{,}08366 \cdot 1{,}03^5 = 26.654{,}611$$

Capitolo 5°

L'AMMORTAMENTO DI PRESTITI INDIVISI

5.1 L'operazione finanziaria

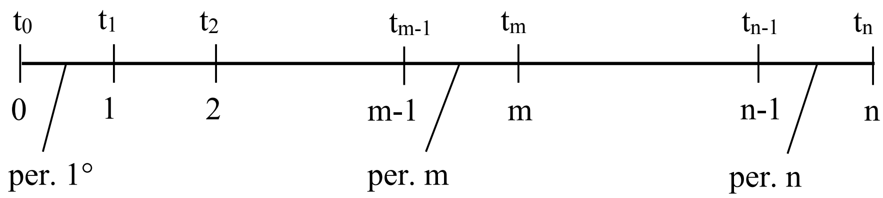
Si tratta di un'operazione che, attraverso un contratto che lega uno o più operatori che mettono a disposizione (prestano) immediatamente un capitale C, con un altro operatore che utilizza il capitale e lo restituisce assieme agli interessi maturati secondo un "*piano d'ammortamento del debito*". Se il prestatore del capitale è unico, viene chiamato *creditore* ed il prestito vien detto *indiviso*; se invece i *creditori* sono diversi, essi si dividono l'onere del prestito che viene appunto detto *diviso*. Tratteremo in questo capitolo dei soli prestiti indivisi, riservando l'altro argomento (obbligazioni) al capitolo successivo.

Il contratto che regola l'operazione del prestito indiviso viene generalmente definito come *contratto di mutuo*, dal termine latino neutro "*mutuum*", che significa reciprocità oppure scambievolezza. Da ciò ne deriva anche il termine di *mutuante* per il creditore e di *mutuatario* per il debitore.

Va subito osservato che l'operazione ha significato differente per il creditore e per il debitore. Chi presta il capitale vede l'investimento come una occasione di rendita; la sua attenzione è rivolta, oltre che agli interessi percepiti, alle modalità del rimborso, al fine della ricostituzione e del reimpiego del capitale stesso. Il valore che egli dà all'operazione in un momento interno della stessa può essere differente dal saldo tecnico in quel momento a termini di contratto, nonché differente dal valore che nello stesso momento il debitore dà all'operazione. Quest'ultimo deve infatti preoccuparsi non tanto del debito estinto quanto del fabbisogno necessario per estinguere il debito residuo. I due punti di vista sono quindi differenti, anche se finanziariamente convergenti.

Il mutuante mette quindi a disposizione il capitale immediatamente, ma il rimborso può avvenire in molti modi, con capitale e interessi a scadenza unica al termine dell'operazione, oppure con rimborso unico del capitale al termine e interessi a scadenza periodica, oppure con rate a scadenza periodica, costanti o progressive, anticipate o posticipate. Esamineremo le modalità di ammortamento più tradizionali, osservando che gli Istituti finanziari offrono anche piani di ammortamento differenti e pure personalizzati.

In merito all'aspetto concettuale dell'operazione va anzitutto richiamato quanto già esposto su questo tema al par. 3.1. Si tratta di un'operazione che mette in relazione finanziaria di scambio un unico importo iniziale con un insieme di altri importi (al limite uno solo) in successione tra loro e di segno opposto a quello iniziale. L'equità dell'operazione comporta che il saldo della stessa sia nullo in ogni momento di essa, nel senso che il montante degli importi alla sinistra temporale di quel momento (algebricamente valutati) e che chiameremo "*montante M dell'operazione*"), sia uguale alla somma di tutti gli importi alla destra, scontati al momento considerato.



Rimanendo nel campo del "*discreto*" ed ipotizzando cioè di operare con capitali e non con flussi di capitale, sarà al momento t_m, chiamando con R_k le rate in scadenza nei momenti t_k e con m e s il loro montante o valore scontato fra due tempi indicati

$$(5.1.1) \quad M(t_m) = C \cdot m(t_0, t_m) - \sum_0^m {}_k R_k \cdot m(t_k, t_m) = \sum_{m+1}^n {}_k R_k \cdot s(t_k, t_m)$$

ed in particolare all'inizio dell'operazione

$$(5.1.2) \quad M(t_0) = C = \sum_0^n {}_k R_k \cdot s(t_k, t_0)$$

ed al termine dell'operazione

$$(5.1.3) \quad M(t_n) = C \cdot m(t_0, t_n) = \sum_0^n {}_k R_k \cdot m(t_k, t_n)$$

e in regime finanziario istantaneo

$$(5.1.4) \quad M(t_m) = C \cdot e^{\delta(t_m - t_0)} - \sum_0^m {}_k R_k \cdot e^{\delta(t_m - t_k)} = \sum_{m+1}^n {}_k R_k \cdot e^{-\delta(t_k - t_m)}$$

$$(5.1.5) \quad M(t_0) = C = \sum_0^n {}_k R_k \cdot e^{-\delta(t_k - t_0)}$$

Va inoltre fatto notare che le espressioni di equivalenza citate hanno valenza generale nei regimi scindibili, ma non negli altri, come preciseremo in seguito, di volta in volta. Ripetiamo ancora che con le espressioni così come formulate l'operazione si svolge in ambito "*discreto*" e non "*continuo*" (par. 3.7), cioè con movimenti di capitali discreti e non con flussi di capitale costanti o variabili, commercialmente non utilizzabili.

Vanno comunque individuati in ogni momento dell'operazione, ed in particolare all'inizio ed al termine di ogni periodo convenuto, i seguenti elementi, valutati al tasso contrattuale e con il regime finanziario scelto:

- la *rata* R_m competente ad ogni periodo m (m = 1,…n), con scadenza anticipata o posticipata, e la sua composizione in quota Q_r di rimborso del capitale e Q_i di interessi;
- il "*debito residuo* D_r" in un qualsiasi momento t_x, pari all'accumulazione di tutte le rate ancora in scadenza dopo quel momento, scontate in t_x. In particolare e per consuetudine, nei momenti di turno, in corrispondenza dei quali avvengono movimenti di quote, il D_r è pure costituito dalla somma di tutte le quote capitale che il debitore dovrà ancora versare, al netto di quelle eventualmente scadute in quel momento. Questo debito rappresenta per il debitore il "*fabbisogno*" dell'operazione, od anche la somma che egli potrebbe versare in quel momento (salvo penalità) per estinguere il suo debito. In seguito distingueremo in questo D_r due quote, che chiameremo *nuda proprietà* e *usufrutto* del prestito. È appena il caso di far ancora notare che, per le ragioni di equivalenza finanziaria dianzi espresse, questo D_r è pure uguale alla differenza fra i montanti in t_x del capitale prestato e delle rate già estinte (5.1.1).
- il *debito estinto* D_r, pari alla differenza fra il capitale prestato ed il debito residuo uguale pure alla somma delle quote capitale versate dal debitore fino a quel momento.

Per quanto riguarda il "*tasso di rimunerazione*" del capitale prestato, cioè il tasso contrattuale, esso può essere fisso oppure variabile; nel secondo caso la variabilità può essere già predeterminata con legge matematica di contratto, oppure ancorata al variare di prefissati indici economici (borse, mercati, inflazione, ecc.). Potrà allora occorrere di contrattare un nuovo piano di ammortamento per il debito residuo in quel momento, oppure estinguere il debito a condizioni che possono pure essere previste contrattualmente.

5.2 In regime di interesse semplice

L'impiego non è molto frequente e riguarda soprattutto prestiti di limitata entità e tempi d'impiego non lunghi. In ragione della assenza di scindibilità di questo regime, l'equivalenza finanziaria espressa dalla 5.1.1 potrà essere applicata solo con riferimento temporale alla scadenza dell'operazione (5.1.3) essendo imperfetta sui tempi intermedi. Pertanto il montante al tempo t_n del capitale prestato C dovrà essere uguale alla somma dei montanti allo stesso momento delle singole rate R dell'ammortamento del debito.

$$(5.2.1) \quad C(1+rn) = \sum_{0}^{n} {}_k R_k \left[1+(t_n - t_k)\cdot r\right]$$

a) <u>con rimborso del montante in quota unica alla scadenza di *n* periodi</u>.

Al tasso r di remunerazione del capitale prestato l'unica rata alla scadenza dell'operazione sarà

$$(5.2.2) \quad R = C(1+rn)$$

Il debito residuo dell'operazione in momenti intermedi (t_m oppure t_{m+h}), se calcolato in base alla 5.2.1, sarà

$$(5.2.3) \quad D_{r,m+h} = C(1+rn)\cdot\left[1+(n-m-h)\cdot r\right]^{-1} \qquad (0 \le h \le 1)$$

Come già osservato nei paragrafi 2.2 e 2.4, questa funzione, crescente sull'ascissa del tempo, da ovviamente durante tutto il tempo interno all'operazione un valore differente dal montante del capitale prestato (fig. 28).

Ciò significa che in caso di interruzione dell'operazione in un momento intermedio t_m, con il rimborso di un'unica rata pari al debito residuo come sopra calcolato, il creditore avrebbe impiegato il suo capitale ad un tasso r'<r, risultante dalla

$$r' = \frac{r}{1+(n-m)\cdot r}$$

Il contratto potrebbe però prevedere che in questo caso la somma da versare da parte del debitore sia pari al montante del capitale prestato al tasso di contratto, od anche a tasso maggiore per compensare spese e tempi morti per il reinvestimento del capitale.

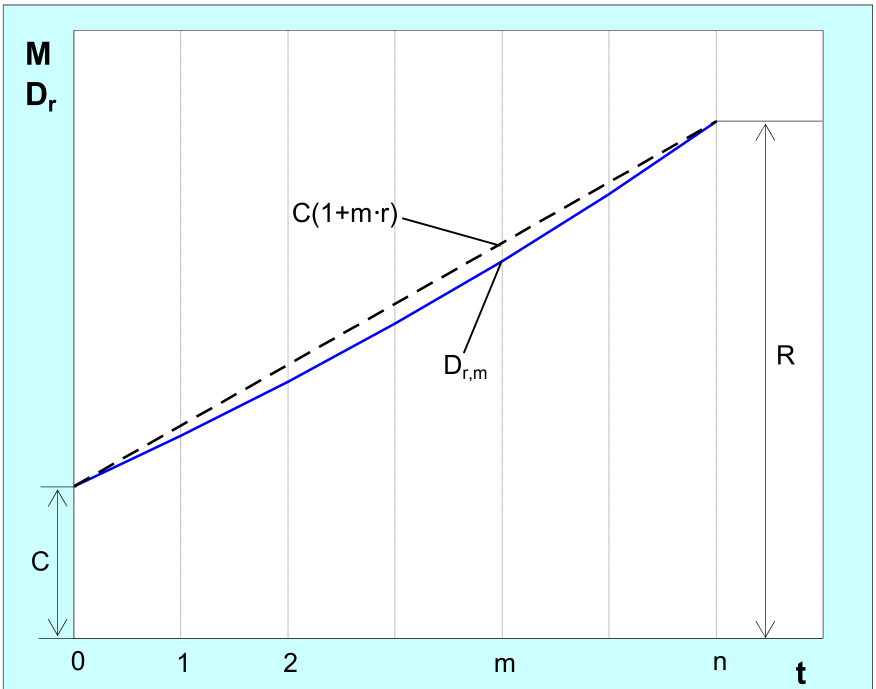


Fig. 28

M = f(t), D_r = f(t) secondo par. 5.2.a

b) <u>Con rimborso unico del capitale alla scadenza e versamento periodico degli interessi.</u>

Per interessi posticipati, al tasso *r*, le rate saranno

$$(5.2.4) \quad R_m = \begin{cases} C \cdot r & per\ m = 1, 2, ..., n-1 \\ C \cdot r + C = C(1+r) & per\ m = n \end{cases}$$

Se, tenendo conto di quanto esposto alle premesse di questo paragrafo, si vuol valutare il debito residuo del prestito in un momento intermedio, sarà

$$(5.2.5) \quad D_{r,m} = C \cdot r \sum_{m+1}^{n} {}_k [1 + r(k-m)]^{-1} + C[1 + r(n-m)]^{-1}$$

oppure, utilizzando la (3.9.1)

$$D_{r,m} = \left\{ C \cdot r(n-m)\left[1 + \frac{r}{2}(n-1-m)\right] + C \right\} \cdot [1 + r(n-m)]^{-1}$$

e con $D_{r,m+h} = D_{r,m}(1 + r \cdot h)$ $\qquad (0 \le h \le 1)$

osservando che dalle due espressioni ricaveremo risultati leggermente differenti per le ragioni anzidette, legate alle caratteristiche di questo regime.

Se gli interessi vengono anticipati e valutati secondo il par. 2.4, sarà

$$(5.2.4')\quad R^x_m = \begin{cases} C \cdot d & per\ m = 0,1,2,...(n-1) \\ C & per\ m = n \end{cases}$$

e per il debito residuo, tenendo conto che va calcolato al netto della rata scaduta in quel momento, nonché utilizzando la (3.9.1')

$$(5.2.5')\quad D^x_{r,m} = C \cdot d \sum_{m+1}^{n-1}{}_k \left[1 + r(k-m)\right]^{-1} + C\left[1 + r(n-m)\right]^{-1}$$

oppure

$$D^x_{r,m} = C \cdot d(n-m)\left(1 + \frac{n-m+1}{2} \cdot r\right) \cdot \left[1 + r(n-m)\right]^{-1} - C \cdot d + C \cdot \left[1 + r(n-m)\right]^{-1}$$

con la ripetizione dell'osservazione fatta per le (5.2.5).

c) <u>con rimborso del prestito con rate di ammortamento periodiche e costanti.</u>

Per quote posticipate, al tasso periodico *r*, dalla (5.2.1) e con l'applicazione della (3.9.1) sarà

$$(5.2.6)\quad C \cdot (1 + rn) = R \cdot n\left(1 + r\frac{n-1}{2}\right)$$

dalla quale

$$(5.2.7)\quad R = C \cdot (1 + rn) \cdot \left[n\left(1 + r\frac{n-1}{2}\right)\right]^{-1}$$

Il debito residuo del prestito in un momento intermedio t_{m+h} e con le solite osservazioni, sarà

$$(5.2.8)\quad D_{r,m} = R\sum_{m+1}^{n}{}_k \left[1 + r(k-m)\right]^{-1}$$

oppure, utilizzando la (3.9.1)

$$D_{r,m} = R(n-m)\left[1 + \frac{r}{2}(n-1-m)\right] \cdot \left[1 + r(n-m)\right]^{-1}$$

e con $D_{r,m+h} = D_{r,m}(1 + r \cdot h) \qquad (0 \le h \le 1)$

Se le rate sono anticipate, sulla base della (3.9.1') sarà

$$(5.2.7')\quad R^x = C \cdot (1 + rn) \cdot \left[n\left(1 + r\frac{n+1}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$(5.2.8')\quad D^{x}_{r,m} = R^{x}\sum_{m+1}^{n-1}{}_{k}\left[1+r(k-m)\right]^{-1}$$

oppure $D^{x}_{r,m} = R^{x}(n-m)\cdot\left(1+\frac{n-m+1}{2}\cdot r\right)\cdot\left[1+r(n-m)\right]^{-1} - R^{x}$

d) <u>Con rimborso del prestito con quote di ammortamento variabili.</u>

$$(5.2.9)\quad C(1+rn) = \sum_{0}^{n}{}_{k}R_{k}\left[1+r(t_{n}-t_{k})\right]$$

con gli altri elementi facilmente ricavabili.

5.3 In regime di sconto commerciale

Regime applicato correntemente nella vendita a rate, garantita da cambiali scontate bancariamente. Per un bene venduto al prezzo *C*, con *n* rate *R* scontate al tasso *d* per ogni periodo rateale, dalle (3.9.4 e 3.9.4') sarà, per scadenze posticipate o anticipate

$$(5.3.1)\quad R = C\left[n\cdot\left(1-\frac{n+1}{2}\cdot d\right)\right]^{-1}$$

$$(5.3.1')\quad R^{*} = C\left[n\cdot\left(1-\frac{n-1}{2}\cdot d\right)\right]^{-1}$$

Valgono pure per questo regime le osservazioni fatte nelle premesse del par. 5.2, in quanto trattasi ancora di regime non scindibile. Inoltre, qualora vengano addebitate le spese bancarie, il prezzo C sarà ovviamente maggiorato.

5.4 In regime di interesse composto

Come già esposto al paragrafo 5.1, è questo il regime generalmente adottato per prestiti di capitali di una certa rilevanza su tempi non brevi. La scindibilità e reciprocità della funzione esponenziale consente agevolmente di disarticolare l'operazione qualora necessario. L'espressione generale di equivalenza, cioè la 5.1.1, con i simboli già adottati nei capitoli precedenti, sarà

$$(5.4.1)\quad C\cdot q^{(t_{m}-t_{0})} - \sum_{0}^{m}{}_{k}R_{k}\cdot q^{(t_{m}-t_{k})} = \sum_{m+1}^{n}{}_{k}R_{k}\cdot \mathrm{v}^{(t_{k}-t_{m})}$$

dove le R_k sono i valori delle rate in scadenza nei momenti t_k di turno, e t_m è il momento della valutazione.

Anche se non esplicitamente e di volta in volta ricordato, segnaliamo che in tutti i paragrafi che seguono in questo capitolo il regime finanziario adottato è quello dell'interesse composto.

5.5 Valore residuo di un prestito. Nuda proprietà. Usufrutto

Abbiamo già sottolineato la necessità del riconoscimento in ogni rata di ammortamento che il debitore deve corrispondere, costante o variabile che essa sia, della quota che si riferisce al capitale che viene restituito e di quella per gli interessi dovuti sul capitale prestato. La distinzione fra le due quote può ritrovarsi anche in quell'elemento di piano che abbiamo chiamato "*debito residuo*" in un momento t_m dell'operazione, e che abbiamo precisato come "*valore attuale delle rate di ammortamento future*".

Se tutto ciò è di particolare interesse e preoccupazione del debitore, va rilevato come di altrettanto interesse da parte del creditore mutuante sia la valutazione dell'operazione in corso ancora attraverso l'attualizzazione di tutte le rate che scadono dopo il momento considerato, ma con l'applicazione di un "*tasso di valutazione*" generalmente differente da quello tecnico contrattuale, e ciò per ragioni di mercato o patrimoniali o per rinegoziazione o cessione del prestito. Preciseremo nei vari casi di mutuo questo valore che viene chiamato "*valore residuo del prestito*" o semplicemente "*valore del prestito*" e che qualora venisse definito a tasso uguale a quello del contratto di mutuo coinciderebbe con il "*debito residuo*" già determinato.

È inoltre utile l'individuazione in questo "*valore residuo*" delle quote capitale ancora da estinguere, valore usualmente definito come "*nuda proprietà del prestito*", nonché il complementare valore attuale complessivo delle quote di interesse ancora da pagarsi, chiamato "*usufrutto del prestito*". Se vogliamo collegare questi due termini finanziari al significato dato loro dal Codice Civile, ricordiamo che "*usufrutto*" è il diritto di godere della cosa di cui altri ha la proprietà, nel modo che ne godrebbe il proprietario, ma con l'obbligo di conservare la sostanza tanto nella maniera quanto nella forma. Il valore della "*nuda proprietà*" (cioè del bene gravato da usufrutto) sarà uguale al valor normale del bene nell'anno in cui sarà libero dal gravame, scontato al momento di stima.

Non sarà difficile, nei paragrafi successivi, dare chiarezza numerica a questi concetti. Ma va detto però che, al di là della semplice didattica della matematica finanziaria, il problema riguarda aspetti specifici di diritto e di economia, che non approfondiremo, limitandoci alle formulazioni essenziali.

5.6 Con rimborso del montante in quota unica alla scadenza di *n* periodi

In regime di interesse composto e con remunerazione del capitale prestato C al tasso r rispetto una unità temporale periodica, l'unica rata alla scadenza dell'operazione sarà.

(5.6.1) $R \cdot C(1+r)^n = C \cdot q^n$

Il debito residuo in un momento intermedio t_{m+h}, tenuto conto di quanto ai paragrafi 2.5 e 2.6

(5.6.2) $D_{r,m+h} = C \cdot q^n \cdot q^{-[n-(m+h)]} = C \cdot (1+r)^{m+h} \qquad (0 \le h \le 1)$

con $D_{r,0} = C$ e $D_{r,n} = 0$ (in quanto calcolato dopo la scadenza di R). La figura 3 del paragrafo 2.5 dà l'andamento del montante dell'operazione.

La valutazione del prestito, sempre in t_{m+h} ma ad un tasso $r' \neq r$, sarà

(5.6.3) $V_{m+h} = C \cdot q^n \cdot (1+r')^{-[m+h]}$

con $V_0 = C \cdot q^n \cdot (1+r')^{-n}$ = valore alla emissione del prestito

$V_n = 0$

$V_m \gtreqless D_{r,m}$ a seconda che $r' \lesseqgtr r$

e con le quote di nuda proprietà e di usufrutto

(5.6.4) $P_{m+h} = C(1+r')^{-[n-(m+h)]} \qquad U_{m+h} = C(q^n - 1) \cdot (1+r')^{-[n-(m+h)]}$

5.7 Con rimborso del capitale alla scadenza e versamento periodico degli interessi

In regime di interesse composto, al tasso r di remunerazione periodica posticipata del capitale, le rate saranno

(5.7.1) $R_m = \begin{cases} C \cdot r & per\ m = 1, 2, ..., n-1 \\ C \cdot r + C = C \cdot (1+r) & per\ m = n \end{cases}$

Il debito residuo in un momento intermedio di turno t_m, tenuto conto che la valutazione viene fatta dopo la scadenza degli interessi, è

(5.7.2) $$D_{r,m} = C \cdot q^{-(n-m)} + C \cdot r \cdot \frac{q^{(n-m)} - 1}{r \cdot q^{(n-m)}} = C$$

con $$D_{r,m+h} = D_{r,m} \cdot q^h = C \cdot q^h \qquad (0 \le h \le 1)$$

$$D_{r,0} = C \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{r,n}} = 0$$

La figura 29 dà l'andamento dell'operazione.

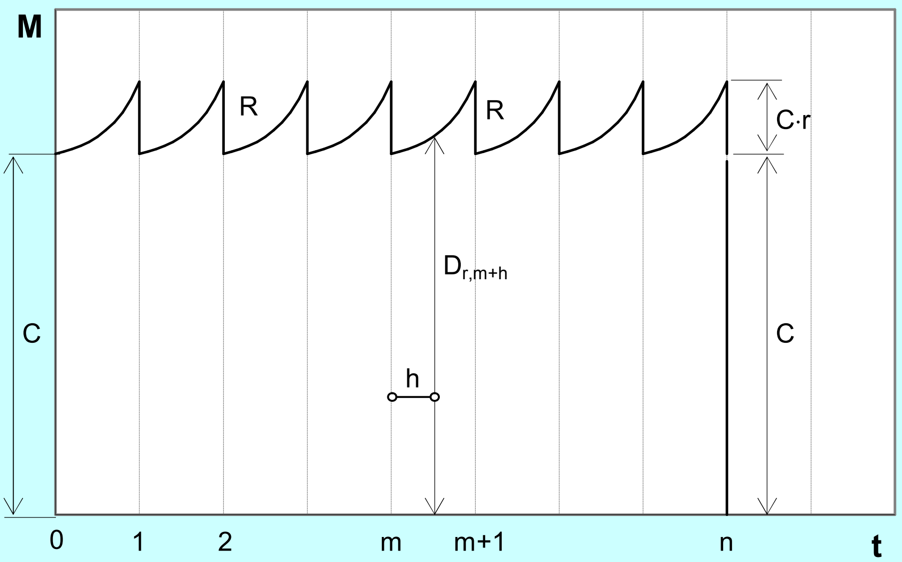


Fig. 29

M = f(t) secondo par. 5.7 post.

La valutazione del prestito in t_m, ma ad un tasso $r' \neq r$ e ponendo per semplicità di termini $\nu' = (1 + r')^{-1}$, sarà

(5.7.3) $$V_m = C \cdot \nu'^{(n-m)} + C \cdot r \frac{1 - \nu'^{(n-m)}}{r'} = P_m + U_m$$

con $$V_{m+h} = V_m (1 + r')^h \qquad (0 \le h \le 1)$$

e $$V_0 = C \cdot \nu'^n + C \cdot r \frac{1 - \nu'^n}{r'}$$ nonché $V_n = P_n^{'} + U_n^{'} = 0$

e con $V_0 \gtreqless C$ per $r' \lesseqgtr r$

Se gli interessi vengono anticipati, tenendo conto del tasso di anticipazione d (par. 2.6)

(5.7.4) $$R_m^x = \begin{cases} C \cdot d & per\ m = 0, 1, 2, \ldots (n-1) \\ C & per\ m = n \end{cases}$$

e, ricordando ancora quanto previsto in merito al calcolo del debito residuo al paragrafo 5.1

(5.7.5) $D^x_{r,m} = C \cdot q^{-(n-m)} + C \cdot d \cdot \dfrac{q^{(n-1-m)} - 1}{r \cdot q^{(n-1-m)}}$

con $D^x_{r,m+h} = D^x_{r,m} \cdot q^h \qquad (0 \le h \le 1)$

$D^x_{r,0}$ dopo il versamento della prima rata di interessi

$$D^x_{r,0} = C \cdot q^{-n} + C \cdot d \frac{q^{n-1} - 1}{rq^{n-1}} = C - C \cdot d$$

e $D^x_{r,0} + C \cdot d = C \cdot q^{-n} + C \cdot d \dfrac{q^n - 1}{rq^{n-1}} = C$

In merito alla valutazione del prestito con $v' \neq v$, sarà in questo caso

(5.7.6) $V^x_m = C \cdot v'^{(n-m)} + C \cdot d \dfrac{1 - v'^{(n-1-m)}}{r'} = P^x_m + U^x_m$

con $V^x_{m+h} = V^x_m (1 + r')^h \qquad (0 \le h \le 1)$

V^{x+}_0 dopo l'emissione $= C \cdot v'^n + C \cdot d \dfrac{1 - v'^{(n-1)}}{r'}$

V^{x-}_0 alla emissione $= C \cdot v'^n + C \cdot d \dfrac{1 - v'^{(n-1)}}{r'} + C \cdot d$

$V^x_n = 0 \qquad P^x_n = 0 \qquad U^x_{n-1} = U^x_n = 0$

5.8 Con rimborso del prestito con rate di ammortamento periodiche, costanti, posticipate

È una delle tipologie di mutuo maggiormente utilizzate, detta anche "*ammortamento progressivo francese*" e che pertanto svilupperemo con maggior dettaglio rispetto le successive. Al tasso contrattuale *r*, per *n* periodi con scadenza posticipata ed in regime di interesse composto, la rata unica per un capitale prestato *C* sarà (dalla 3.8.1)

(5.8.1) $R = C \cdot \dfrac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = C \cdot \dfrac{r}{1 - v^n}$

Sarà pure

(5.8.2) $R = Q_{c,m} + Q_{i,m}$

Cioè ogni rata, pur costante, è formata da una quota di restituzione di parte del capitale prestato (Q_c) e di una quota di interessi sul capitale in prestito nel periodo in scadenza (Q_i). Si tratta per ambedue di quote variabili.

Il montante dell'operazione $M = f(t)$ ha l'andamento di cui alla Fig. 30; si tratta di funzione algebrica crescente, con discontinuità di prima specie e salto eguale a $-R$ ad ogni limite destro. Rappresenta, per il mutuatario, il debito residuo D_r, con l'avvertenza (per convenzione già citata) che alle scadenze tale debito va calcolato un istante dopo il pagamento della rata R, e cioè con il montante che in t_m chiameremo M_m^+, e non un istante prima con il montante M_m^-

Sarà quindi

(5.8.3) $M_m^- = M_{m-1}^+ \cdot (1+r)$ e $M_m^+ = M_m^- - R$

$$M_m^+ = D_{r,m} = f(R) = R \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k \cdot \nu^{(k-m)} = R \frac{q^{n-m} - 1}{r \cdot q^{n-m}} = R \frac{1 - \nu^{(n-m)}}{r} \qquad con\ m = 1, 2, \dots n$$

$$= f(C) = C \cdot q^m - R \frac{q^m - 1}{r} = C \frac{q^n - q^m}{q^n - 1}$$

Con $D_{r,m+h} = D_{r,m} \cdot q^h$ $(0 \le h \le 1)$

$D_{r,0} = C$ $D_{r,n} = 0$

Possiamo ora determinare le quote costitutive di una rata qualunque, in scadenza al tempo t_m, cioè alla fine di un periodo m

(5.8.4) $Q_{i,m} = D_{r,m-1} \cdot r = R \dfrac{1 - \nu^{n-(m-1)}}{r} \cdot r = R\left(1 - \nu^{(n-m+1)}\right)$

(5.8.5) $Q_{c,m} = R - Q_{i,m} = R \cdot \nu^{(n-m+1)}$

Osserviamo che le quote capitale si susseguono in progressione geometrica con ragione $\nu^{-1} = q$; quindi

$Q_{c,0} = 0$ $(R = 0)$

$Q_{c,1} = R \cdot \nu^n = R \cdot q^{-n}$

$Q_{C,2} = R \cdot \nu^{n-1} = Q_{c,1} \cdot \nu^{-1} = Q_{c,1} \cdot q$

……………………………………..

$$Q_{c,n} = R \cdot \nu = Q_{c,1} \cdot \nu^{-(n-1)} = Q_{c,1} \cdot q^{n-1}$$

$$\sum_1^n {}_k Q_{c,k} = Q_{c,1}\left(1+\nu^{-1}+\nu^{-2}+\ldots+\nu^{-(n-1)}\right) = Q_{c,1}\frac{\nu^{-n}-1}{\nu^{-1}-1} = R\frac{1-\nu^n}{r} = C$$

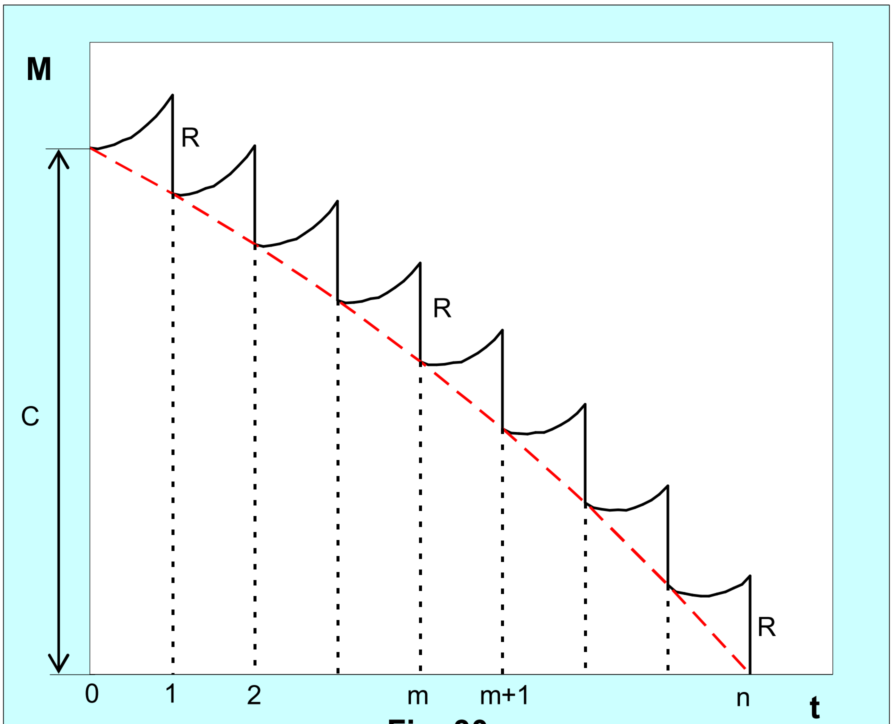
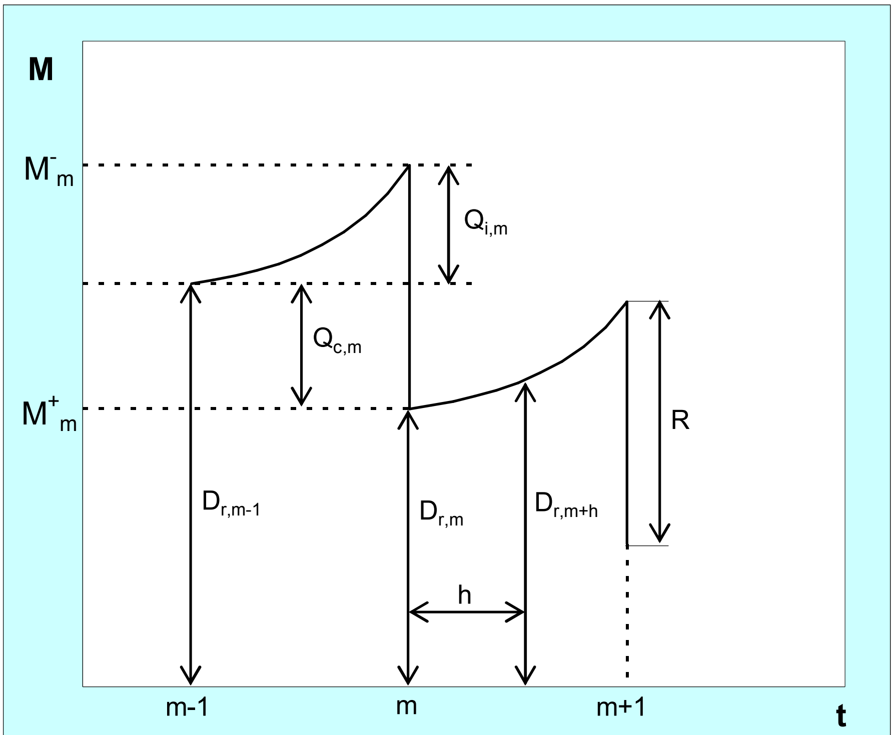


Fig. 30

M = f(t) per par. 5.8



Particolare

E riassumendo

$$Q_{c,0} = 0 \quad ; \quad Q_{c,n} = R \cdot \nu \quad ; \quad Q_{i,0} = 0 \quad ; \quad Q_{i,n} = R(1-\nu)$$

$$Q_{c,n} + Q_{i,n} = R$$

L'andamento puntuale di questi valori nei momenti di scadenza delle rate è rappresentato in Fig. 31. Ovviamente la posizione reciproca delle due quote nelle prime scadenze dipende dal valore del tasso di riferimento.

Possiamo ora definire il debito estinto fino a tutto il periodo *m*, compresa la quota scaduta in t_m

$$(5.8.6) \quad D_{c,m} = \sum_{1}^{m} {}_k Q_{c,k} = R \cdot \nu^{n-m} \cdot \frac{1-\nu^m}{r} = R \cdot \frac{q^m - 1}{r \cdot q^n} = C \frac{q^m - 1}{q^n - 1}$$

e ridefinire il debito residuo

$$(5.8.3) \quad D_{r,m} = \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{c,k} = C - D_{c,m} = R \frac{1-\nu^{n-m}}{r} = R \frac{q^n - q^m}{r \cdot q^n} = C \frac{q^n - q^m}{q^n - 1}$$

Il piano di ammortamento del debito viene solitamente presentato così, come qui di seguito per un prestito di valore 10.000,00 su 5 periodi ad interesse del 8%, con rate posticipate.

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	2.504,564	800,000	1.704,564	1.704,564	8.295,435
2	2.504,564	663,634	1.840,929	3.545,494	6.454,505
3	2.504,564	516,360	1.988,204	5.533,698	4.466,301
4	2.504,564	357,304	2.147,260	7.680,958	2.319,041
5	2.504,564	185,523	2.319,041	10.000,000	0,000
Σ	12.522,822	2.522,822	10.000.000	--	--

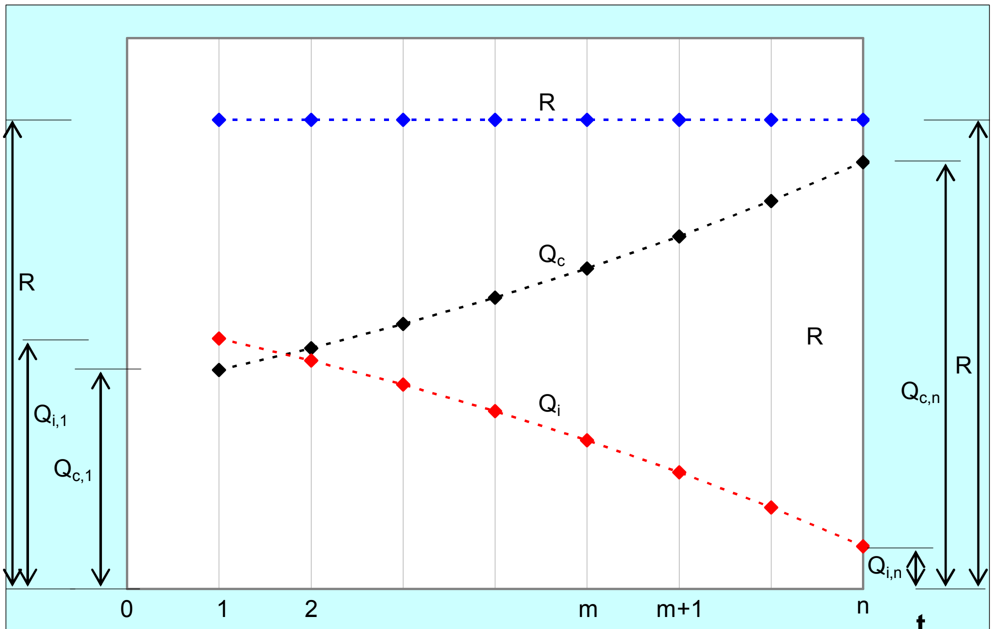


Fig. 31
Andamento puntuale di Q_i e Q_c da par. 5.8

In merito alla nuda proprietà del prestito in un momento t_m dell'operazione, ricordiamo quanto definito al paragrafo 5.5. Si tratta dell'accumulazione finanziaria in t_m (che indicheremo con la sola lettera m) di tutte le quote capitale ancora da estinguere, cioè

$$P_m = \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{c,k} \cdot v^{k-m} = Q_{c,m+1} \cdot v + Q_{c,m+2} \cdot v^2 + \ldots + Q_{c,n} \cdot v^{n-m} =$$
$$= Q_{c,m} \cdot q \cdot v + Q_{c,m} \cdot q^2 \cdot v^2 + \ldots + Q_{c,n} \cdot q^{n-m} \cdot v^{n-m} =$$
$$= Q_{c,m}(1+1+\ldots+1) = (n-m) \cdot Q_{c,m}$$

ed in definitiva

(5.8.7) $\quad P_m = (n-m) \cdot R \cdot \mathrm{v}^{(n-m+1)}$

e, di conseguenza

(5.8.8) $\quad U_m = \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{i,k} \cdot \mathrm{v}^{k-m} = D_{r,m} - P(t_m) = R \cdot \left[\frac{1-\mathrm{v}^{n-m}}{r} - (n-m) \cdot \mathrm{v}^{(n-m+1)} \right]$

e per $0 \le h \le 1 \qquad P(m+h) = P_m \cdot q^h ; \quad U_{m+h} = U_m \cdot q^h$

Quindi, in generale

(5.8.9) $\quad D_{r,m} = P_m + Q_m \qquad$ nonché, $P_n = U_n = 0$

La valutazione dell'operazione in un momento qualunque, ma ad un tasso *r'* differente da quello tecnico contrattuale *r*, ponendo ancora $(1+r')=q'$ e $v'=q'^{-1}$, è

$$(5.8.10)\quad V_m = R\sum_{m+1}^{n}{}_k v'^{(k-m)} = R\cdot\frac{q'^{(n-m)}-1}{r'\cdot q'^{(n-m)}} = R\cdot\frac{1-v'^{(n-m)}}{r'}$$

che per r = r' conduce alla (5.8.3)

e con $V_{m+h} = V_m(1+r')^h \qquad (0\le h\le 1)$

e $V_0 = C\cdot\frac{r\cdot q^n}{q^n-1}\cdot\frac{q'^n-1}{r'\cdot q'^n} \qquad V_n = 0$

nonché con $V_m \gtreqless D_{r,m} \qquad per \qquad r' \lesseqgtr r$

La scomposizione di questo valore in nuda proprietà e usufrutto dà

$$\begin{aligned} P'_m &= \sum_{m+1}^{n}{}_k Q_{c,k}\cdot v'^{(k-m)} = Q_{c,m+1}\cdot v' + Q_{c,m+2}\cdot v'^2 + \ldots + Q_{c,n}\cdot v'^{(n-m)} = \\ &= Q_{c,m+1}\cdot v'\left(1+q\cdot v' + q^2\cdot v'^2 + \ldots + q^{(n-m-1)}\cdot v'^{(n-m-1)}\right) = \\ &= Q_{c,m+1}\cdot v'\cdot\frac{q^{(n-m)}\cdot v'^{(n-m)}-1}{q\cdot v'-1} \end{aligned}$$

ed essendo $Q_{c,m+1} = R\cdot v^{(n-m)}$, dopo alcuni passaggi

$$(5.8.11)\quad P'_m = R\cdot\frac{v'^{(n-m)}-v^{(n-m)}}{r-r'}$$

che per $r=r'$ perde significato, ma viene definita secondo la (5.8.7).

$$U'_m = \sum_{m+1}^{n}{}_k Q_{i,k}\cdot v'^{(k-m)} = V_m - P'_m = R\cdot\frac{1-v'^{(n-m)}}{r'} - R\cdot\frac{v'^{(n-m)}-v^{(n-m)}}{r-r'}$$

che, dopo alcune elaborazioni, dà

$$(5.8.12)\quad U'_m = R\cdot\frac{r}{r-r'}\cdot\left(\frac{1-v'^{(n-m)}}{r'} - \frac{1-v^{(n-m)}}{r}\right)$$

che per $r=r'$ perde significato, ma viene definita secondo la (5.8.8).

5.9 La formula di Makeham

A complemento del paragrafo precedente ricaviamo nuovamente il valore residuo del prestito in un momento qualunque di turno t_m, dopo la scadenza della rata competente e con un tasso di valutazione *r'* differente da quello contrattuale *r*. Ciò al fine di trovare una relazione semplice fra i principali elementi del prestito, nel momento indicato.

In merito all'usufrutto del prestito, dalla (5.8.8)

$$U'_m = \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{i,k} \cdot v'^{(k-m)} = Q_{i,m+1} \cdot v' + Q_{i,m+2} \cdot v'^2 + \ldots + Q_{i,n} \cdot v'^{(n-m)}$$

essendo dalla (5.8.4) $\qquad Q_{i,k} = D_{r,k-1} \cdot r$

nonché dalla (5.8.3) $\qquad D_{r,k-1} = \sum_{k}^{n} {}_p Q_{c,p}$

$$\begin{aligned} U'_m &= \sum_{m+1}^{n} {}_k D_{r,k-1} \cdot r \cdot v'^{(k-m)} = \\ &= r\left[v' \cdot \left(Q_{c,m+1} + Q_{c,m+2} + \ldots + Q_{c,n}\right) + v'^2 \cdot \left(Q_{c,m+2} + Q_{c,m+3} + \ldots + Q_{c,n}\right) + \ldots + v'^{(n-m)} \cdot Q_{c,n}\right] = \\ &= r\left[Q_{c,m+1} \cdot v' + Q_{c,m+2}\left(v' + v'^2\right) + Q_{c,m+3}\left(v' + v'^2 + v'^3\right) + \ldots + Q_{c,n}\left(v' + v'^2 + v'^3 + \ldots + v'^{(n-m)}\right)\right] \end{aligned}$$

Osserviamo che nelle parentesi interne le espressioni sono progressioni geometriche di ragione *v'* e che anche per la prima quota capitale dopo t_m la *v'* può ritenersi tale. Quindi

$$\begin{aligned} U'_m &= r\left[Q_{c,m+1} \cdot v' \cdot \frac{1-v'}{1-v'} + Q_{c,m+2} \cdot v' \cdot \frac{1-v'^2}{1-v'} + \ldots + Q_{c,n} \cdot v' \cdot \frac{1-v'^{(n-m)}}{1-v'}\right] = \\ &= \frac{r}{r'}\left[Q_{c,m+1}\left(1-v'\right) + Q_{c,m+2}\left(1-v'^2\right) + \ldots + Q_{c,n}\left(1-v'^{(n-m)}\right)\right] = \\ &= \frac{r}{r'}\left[\left(Q_{c,m+1} + Q_{c,m+2} + \ldots + Q_{c,n}\right) - \left(Q_{c,m+1} \cdot v' + Q_{c,m+2} \cdot v'^2 + \ldots + Q_{c,n} \cdot v'^{(n-m)}\right)\right] \end{aligned}$$

Ed in definitiva

$$(5.9.1) \quad U'_m = \frac{r}{r'}\left[\sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{c,k} - \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{c,k} \cdot v'^{(k-m)}\right] = \frac{r}{r'}\left(D_{r,m} - P'_m\right)$$

$$(5.9.2) \quad V_m = P'_m + U'_m = P'_m + \frac{r}{r'}\left(D_{r,m} - P'_m\right)$$

espressione che con semplici passaggi viene pure proposta con la

$$(5.9.2') \quad V_m = D_{r,m} - \frac{r'-r}{r'}\left(D_{r,m} - P'_m\right)$$

forma molto comoda, come la precedente, in quanto omette il calcolo dell'usufrutto.

Le formule vengono attribuite a "*Makeham*" e per $r' = r$ danno ovviamente

$V_m = D_{r,m}$, nonché per $r' >< r$ portano a $V_m <> D_{r,m}$.

In particolare all'inizio dell'operazione

(5.9.3) $V_0 = P_0^{'} + \frac{r}{r'}\left(C - P_0^{'}\right)$

con $V_0 \geq < C$ per $r' \leq > r$

cioè con valore alla emissione del prestito chiamato in temine finanziario "*sopra la pari, alla pari, sotto la pari*".

È importante far presente che le formule di Makeham sono di conveniente applicazione anche in altre tipologie di ammortamento, se a rate posticipate e unico tasso di remunerazione del debito.

5.10 Con rimborso del prestito con rate di ammortamento periodiche, costanti, anticipate

Sinteticamente, secondo la progressione didattica del par. 5.8, osservando che, rispetto quel modello la rata R viene anticipata dal termine all'inizio di ogni periodo, sarà (dalla 3.4.5)

(5.10.1) $R = C\frac{r \cdot q^{n-1}}{q^n - 1} = C\frac{r \cdot \nu}{1 - \nu^n} = Q_{c,m} + Q_{i,m}$

(5.10.2) $M_m^+ = M_{m+1}^- \cdot \nu = M_m^- - R$

$$M_m^+ = f(R) = R\sum_{m+1}^{n-1}{}_k \nu^{(k-m)} = R \cdot \frac{q^{(n-1-m)} - 1}{r \cdot q^{(n-1-m)}} = R\frac{1 - \nu^{(n-1-m)}}{r}$$

$$= f(C) = C \cdot q^m - R\frac{q^{m+1} - 1}{r} = C\frac{q^{n-1} - q^m}{q^n - 1}$$

con m = 0, 1, 2, …n-1

(5.10.3) $D_{r,m} = M_m^- - Q_{c,m} = M_{m+1}^-$

$$D_{r,0}^- = C - Q_{c,0} = M_0^- - Q_{c,0} = M_1^-$$

$$D_{r,n} = M_{n-1}^+ = 0$$

(5.10.4) $Q_{i,m} = D_{r,m} \cdot d = M_m^+ \cdot r = R\left(1 - \nu^{n-1-m}\right)$

(5.10.5) $Q_{c,m} = R - Q_{i,m} = R \cdot \nu^{n-1-m}$

con $Q_{c,o} = R \cdot \nu^{n-1}$; $Q_{i,0} = R - Q_{c,0}$

$$Q_{c,n-1} = R \qquad ; \qquad Q_{c,n} = 0 \qquad ; \qquad Q_{i,n-1} = Q_{i,n} = 0$$

$$(5.10.6)\quad D_{e,m} = \sum_{0}^{m} {}_{k}Q_{c,k} = R \cdot \frac{q^{m+1} - 1}{r \cdot q^{n-1}} = C \cdot \frac{q^{m+1} - 1}{q^{n} - 1}$$

Le Figg. 32 danno l'andamento di questi elementi. Inoltre viene di seguito presentato il piano di ammortamento per il consueto prestito del valore 10.000,00, su 5 periodi, ad interesse del 8% con rate anticipate; per una lettura più immediata vengono pure inseriti i valori dei montanti dell'operazione. Si ricorda che anche in questa tipologia di ammortamento il debito residuo viene calcolato dopo la scadenza della rata competente, quindi all'inizio (e non alla fine) di ogni periodo.

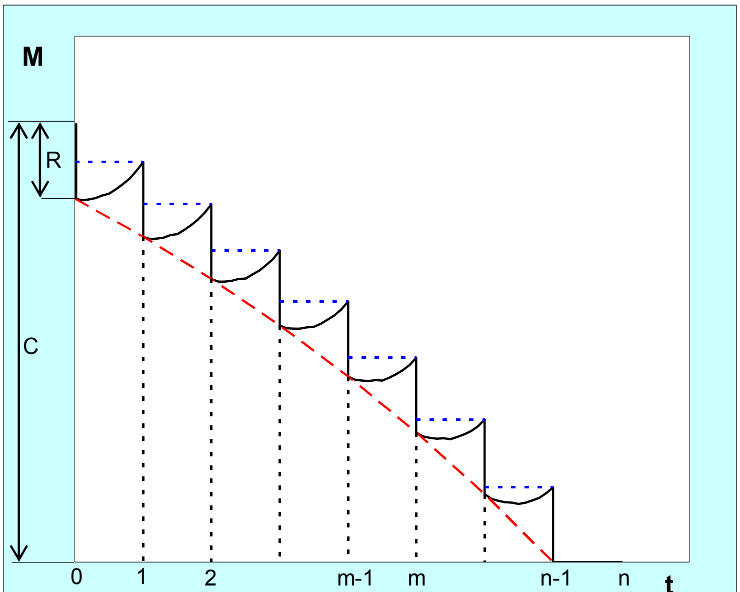
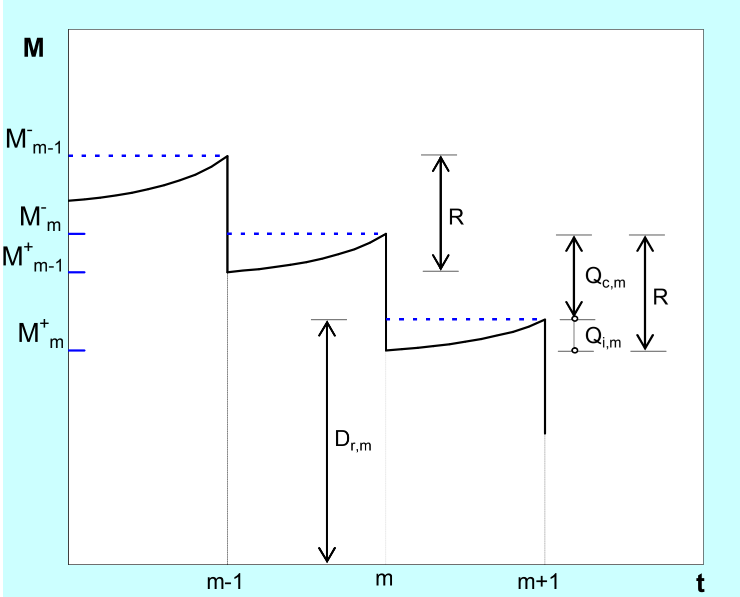


Fig. 32

M = f(t) per par. 5.10



Particolare

Scadenza	M^-	Rata	M^+	Q_i	Q_c	Debito estinto	Debito residuo
					Prezzo di emissione		10.000,00
0	10.000,00	2.319,041	7.680,958	614,476	1.704,564	1.704,564	8.295,435
1	8.295,435	2.319,041	5.976,394	478,111	1.840,929	3.545,494	6.454,505
2	6.454,505	2.319,041	4.135,424	330,837	1.988,204	5.533,698	4.466,301
3	4.466,301	2.319,041	2.147,260	171,780	2.147,260	7.680,958	2.319,041
4	2.314,041	2.319,041	0,000	0,000	2.319,041	10.000,000	0,000
5	0,000	-	-	-	-	10.000,00	0,000
Σ	-	11.595,206	-	1.595,206	10.000,000	-	-

Si osserva che le quote capitale che vengono restituite all'inizio di ogni turno sono le stesse che nel procedimento di cui al par. 5.8 vengono restituite al termine dello stesso periodo. Non così ovviamente per gli interessi. Sostanzialmente il debitore viene a trovarsi, all'inizio dell'operazione, non con la disponibilità di un capitale *C*, bensì con un capitale ridotto *C-R*, che restituirà in quattro rate costanti, posticipate al tasso convenuto.

Lasciamo al lettore l'esercizio della determinazione degli altri elementi (nuda proprietà, usufrutto, valore residuo).

5.11 Con rimborso del prestito a rate periodiche, costanti, posticipate, con anticipazione degli interessi

Tipologia di mutuo chiamata "*ammortamento progressivo tedesco*" che, così come generalmente proposto, può ricondursi a quello progressivo francese del paragrafo 5.8, con capitale di emissione *C*, ma di fatto con una somma iniziale $C \cdot (1-d)$ a disposizione del mutuatario. Pertanto, in regime di interesse composto, fissato un tasso di interesse *r* e di conseguenza (par. 2-6) un tasso di sconto $d = r/(1+r)$, il debitore anticiperà all'origine dell'operazione una rata pari agli interessi scontati sull'intero capitale prestato, e pagherà le rate successive al tasso convenuto *r*, calcolate sul capitale scontato.

$$(5.11.1)\quad R=\begin{cases} C\cdot d=Q_{i,0} & per\ m=0 \\ C(1-d)\cdot\dfrac{r}{1-v^{n}}=C\dfrac{d}{1-(1-d)^{n}}=Q_{c,m}+Q_{i,m} & per\ m=1,\ 2...n \\ con\quad R=Q_{c,m}+Q_{i,m} & per\ m=1,\ 2...,n-1 \\ \quad\quad R=Q_{c,m} & per\ m=n \end{cases}$$

Seguendo sinteticamente la progressione del paragrafo citato, ma tenendo conto della anticipazione dei soli interessi

$$(5.11.2)\quad D_{r,m}=R\cdot\frac{1-\nu^{n-m}}{d}=C\cdot\frac{1-\nu^{n-m}}{1-\nu^{n}}$$

per m = 0, 1, 2, …n

$D_{r,0}=C$ $\qquad\qquad D_{r,n}=0$

$$(5.11.3)\quad Q_{i,m}=D_{r,m}\cdot d=R\cdot\left(1-v^{n-m}\right)$$

$$(5.11.4)\quad Q_{c,m}=R-Q_{i,m}=R\cdot v^{n-m}$$

$$(5.11.5)\quad D_{e,m}=C-D_{r,m}=C\cdot(1-d)^{n-m}\cdot\frac{1-(1-d)^{m}}{1-(1-d)^{n}}$$

Sarà facile, con questi elementi, calcolare i montanti $M_m^- \ e\ M_m^+$ e di seguito l'andamento dell'operazione (Fig. 33). Viene pure compilato qui di seguito il piano finanziario d'ammortamento del consueto prestito di un capitale del valore di 10.000,00 in emissione, da estinguersi in 5 rate al tasso d'interesse del 8% per rata, con interessi anticipati.

Scadenza	Rata	Q_i	Q_C	Debito estinto	Debito residuo
			Prezzo di emissione		10.000,000
0	740,740	740,740	0,000	0,000	10.000,000
1	2.319,041	614,476	1.704,564	1.704,564	8.295,435
2	2.319,041	478,111	1.840,929	3.545,494	6.454,505
3	2.319,041	330,837	1.988,204	5.533,698	4.466,301
4	2.319,041	171,780	2.147,260	7.680,958	2.319,041
5	2.319,041	0,000	2.319,041	10.000,000	0,000
Σ	12.335,946	2.335,946	10.000,000	--	--

Il piano finanziario può pure venir facilmente costruito procedendo a ritroso, considerando che l'ultima rata, cioè la R_n, è tutta di capitale ed è pari al debito residuo in $(m-1)$; pertanto

$$R = Q_{c,n} = D_{r,n-1} \qquad e \qquad Q_{i,n-1} = D_{r,n-1} \cdot d = R \cdot d$$

nonché $Q_{c,n-1} = R - Q_{i,n-1}$ $\qquad e \qquad$ $D_{r,n-2} = D_{r,n-1} + Q_{c,n-1}$

e così via.

Riprendendo quanto si è detto all'inizio di questo paragrafo, osserviamo che il debito residuo, il debito estinto e le quote capitale nei momenti di scadenza sono uguali a quelli del piano di ammortamento francese posticipato, per un uguale capitale iniziale, o di emissione. Non così, ovviamente, per le quote interessi, che sono ancora quelle del piano francese, ma scontate e anticipate.

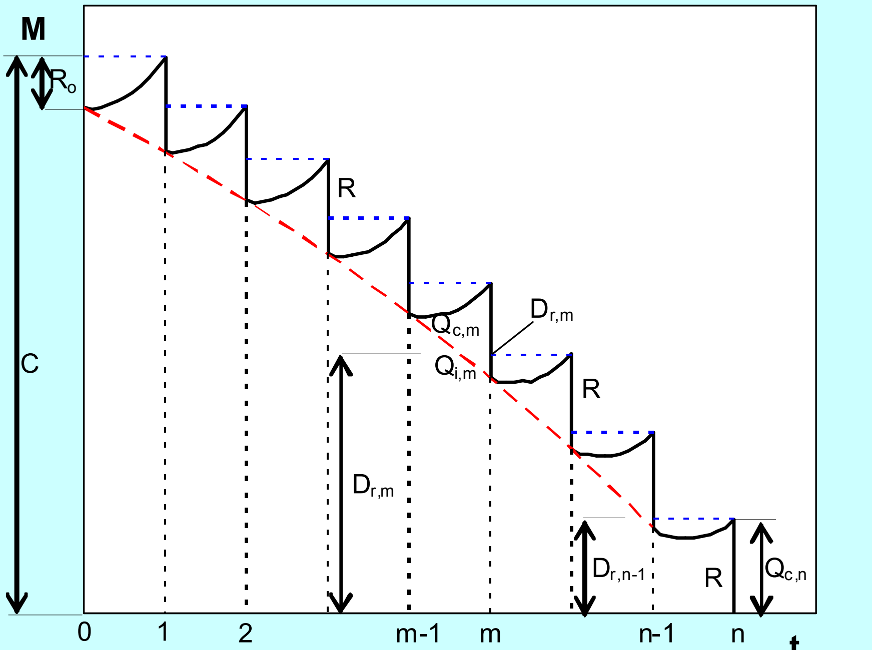


Fig. 33

M = f(t) per par. 5.11

5.12 Con rimborso del prestito a quote capitale periodiche e costanti

Si tratta di tipologia pure molto utilizzata, denominata anche come "*ammortamento italiano*", che prevede rate posticipate costituite da quote costanti di capitale e quote interessi pure posticipate oppure anticipate.

Tenendo conto di un capitale prestato C e di interessi composti posticipati ad un tasso contrattuale r

(5.12.1) $$Q_{c,m} = Q_c = \frac{C}{n}$$

(5.12.2) $$D_{r,m} = \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{c,k} = C \cdot \frac{n-m}{n} \qquad per\ m = 0, 1, ..., n$$

con $D_{r,m+h} = D_{r,m} \cdot q^h \qquad (0 \le h \le 1)$

(5.12.3) $$Q_{i,m} = D_{r,m-1} \cdot r = C \cdot r \cdot \frac{n-m+1}{n} \qquad per\ m = 1, 2, ..., n$$

(5.12.4) $$R_m = Q_c + Q_{i,m} = \frac{C}{n} + C \cdot r \cdot \frac{n-m+1}{n} \qquad per\ m = 1, 2, ..., n$$

(5.12.5) $$D_{e,m} = C - D_{r,m} = \frac{C}{n} \cdot m \qquad per\ m = 0, 1, ..., n$$

Si osserva che le quote interesse diminuiscono con il progredire delle scadenze in progressione aritmetica di ragione $-\frac{C}{n} \cdot r$. Così pure la rata in scadenza ed il debito residuo, ma con altra ragione.

Sarà facile compilare il piano di ammortamento che, per il consueto C = 10.000, n = 5, r = 0,08, sarà il seguente

Scadenza	Rata	Q_i	Q_C	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	10.000,000
1	2.800,000	800,000	2.000,000	2.000,000	8.000,000
2	2.640,000	640,000	2.000,000	4.000,000	6.000,000
3	2.480,000	480,000	2.000,000	6.000,000	4.000,000
4	2.320,000	320,000	2.000,000	8.000,000	2.000,000
5	2.160,000	160,000	2.000,000	10.000,000	0,000
Σ	12.400,000	2.400,000	10.000,000	--	--

Nel caso di interessi anticipati, non variano la quota capitale, il debito residuo e quello estinto, mentre, con l'applicazione del tasso di sconto $d = r \cdot \nu$, sarà

(5.12.6) $$Q^x_{i,m} = D_{r,m} \cdot d = C \cdot \frac{n-m}{n} \cdot d \qquad per\ m = 0, 1, ..., n-1$$

(5.12.7) $$R^x_m = \begin{cases} C \cdot d = Q_{i,0} & per\ m = 0 \\ \frac{C}{n} + C \cdot \frac{n-m}{n} \cdot d & per\ m = 1, 2, ..., n-1 \\ \frac{C}{n} & per\ m = n \end{cases}$$

Si riporta qui di seguito il piano di ammortamento per gli stessi elementi di partenza del caso precedente, ma con interessi anticipati. Valgono, anche in questo caso, le osservazioni fatte al termine del paragrafo precedente.

Scadenza	Rata	Q_i	Q_C	Debito estinto	Debito residuo
0	740,740	740,740	0,000	0,000	10.000,000
1	2.592,592	592,592	2.000,000	2.000,000	8.000,000
2	2.444,444	444,444	2.000,000	4.000,000	6.000,000
3	2.296,296	296,296	2.000,000	6.000,000	4.000,000
4	2.148,148	148,148	2.000,000	8.000,000	2.000,000
5	2.000,000	0,000	2.000,000	10.000,000	0,000
Σ	12.222,222	2.222,222	10.000,000	--	--

La valutazione dell'operazione in un momento qualunque, ma ad un tasso *r'* differente da quello contrattuale *r*, cioè quello che abbiamo chiamato "*valore residuo del prestito*", nel caso degli interessi posticipati sarà

(5.12.8) $$V_m = \sum_{m+1}^{n} {}_kR_k \cdot v'^{(k-m)} = P'_m + U'_m$$

e,ricordando l'osservazione fatta all'inizio di questo paragrafo in merito alla progressione aritmetica dei valori delle rate e delle quote interessi, nonché ponendo nella (3.11.2) $\rho = -\frac{C}{n} \cdot r$ (abbiamo chiamato la ragione della progressione con il termine ρ e non con *d* come al par. 3.11 per ovvie ragioni)

$$V_m = \left(R_{m+1} + \frac{\rho}{r'}\right) \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} - \frac{(n-m) \cdot \rho \cdot \nu' \cdot (n-m)}{r'}$$

$$P_m' = \sum_{m+1}^{n} {}_kQ_{c,k} \cdot \nu'^{(k-m)} = \frac{C}{n} \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'}$$

$$U_m' = \sum_{m+1}^{n} {}_kQ_{i,k} \cdot \nu'^{(k-m)} = \left(Q_{i,m+1} + \frac{\rho}{r'}\right) \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} - \frac{(n-m) \cdot \rho \cdot \nu'^{(n-m)}}{r'}$$

e con $V_{m+h} = V_m (1+r')^h \qquad (0 \le h \le 1)$

e, nel caso degli interessi anticipati, e ponendo $\rho' = -\frac{C}{n} \cdot d$

(5.12.9) $V_m^x = \sum_{m+1}^{n} {}_kR_k^x \cdot \nu'^{(R-m)} = \left(R_{m+1}^x + \frac{\rho'}{r'}\right) \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} - \frac{(n-m) \cdot \rho' \cdot \nu'^{(n-m)}}{r'}$

$$P_m'^x = P'$$

$$U_m'^x = \sum_{m+1}^{n-1} {}_kQ_{i,k} \cdot \nu'^{(k-m)} = \left(Q_{i,m+1} + \frac{\rho'}{r'}\right) \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} - \frac{(n-1-m) \cdot \rho' \cdot \nu'^{(n-1-m)}}{r'}$$

Il lettore potrà facilmente verificare che per $r = r'$ le operazioni precedenti forniscono i valori della (5.12.2) e che, nel caso di rate tutte posticipate, è più agevole trovare il valore residuo (r’ ≠ r) con le formule di Makeham.

Va anche detto che pure in questa tipologia di ammortamento nel caso di anticipazione degli interessi si parla di “*ammortamento tedesco*”.

5.13 L’ammortamento a due tassi. La ricostituzione del capitale prestato. Il Sinking Funds Method.

In relazione alla tipologia di ammortamento di cui al paragrafo 5.8 ed all’interesse sia del creditore che del debitore in merito alla riformazione del capitale prestato C, si può osservare dalle (5.8.1) e (5.8.2) che

(5.13.1) $R = Q_i + Q_e = C \cdot r' + C \cdot \frac{r''}{(1+r'')^n - 1}$

cioè che ogni rata, costante e posticipata, può anche intendersi come dissociata in due quote a tassi differenti, di cui una è l’interesse su tutto il capitale in prestito e l’altra rappresenta la ricostituzione del capitale stesso secondo la (4.3.2).

Sarà infatti

$$(5.13.2) \qquad \sum_{1}^{n} {}_kC \cdot \frac{r''}{\left(1+r''\right)^n - 1} \cdot \left(1+r''\right)^{n-k} = C$$

Il *Linking Fund Method* (fondi di ammortamento), di estrazione americana, ipotizza l'ammortamento di un debito attraverso due versamenti periodici posticipati, con uno dei quali il debitore paga al creditore l'interesse su tutto il capitale ricevuto in prestito, mentre l'altra parte è diretta, sempre dal debitore, ad un fondo separato che nei tempi convenuti ricostituisce il capitale da restituire al creditore, e che può essere gestito anche da un Istituto finanziario differente da quello che emette il prestito. I tassi d'interesse che regolano le due fasi operative sono generalmente differenti; il tasso *r''* di ricostituzione del capitale, detto anche *tasso di accumulazione*, è di solito inferiore al tasso tecnico *r' di remunerazione* dello stesso capitale. Questa tipologia di ammortamento a due tassi viene comunemente chiamata "*ammortamento americano*".

Relativamente all'esempio già più volte proposto, di un prestito di valore 10.000 da rimborsare posticipatamente in 5 periodi, al tasso del 8% per l'interesse sul capitale mentre è il 6% quello di accumulazione, il debitore verserà periodicamente

$$Q_i + Q_r = 10.000{,}00 \cdot 0{,}08 + 10.000{,}00 \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^5 - 1} = 800{,}00 + 1.773{,}96 = 2.573{,}96$$

ed il piano operativo sarà quello qui di seguito, nel quale va osservato che il debito estinto, cioè il capitale ricostituito, viene ovviamente a formarsi con i montanti delle quote capitale versate. Sarà cioè

$$(5.13.3) \qquad D_{e,m} = Q_c \cdot \frac{\left(1+r''\right)^m - 1}{r''}$$

Scadenza	Quota complessiva da versare	Quota interessi	Quota di ricostituzione del capitale	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	10.000,000
1	2.573,964	800,000	1.773,964	1.773.964	8.226,035
2	2.573,964	800,000	1.773,964	3.654,365	6.345,634
3	2.573,964	800,000	1.773,964	5.647,941	4.352,408
4	2.573,964	800,000	1.773,964	7.760,411	2.239,588
5	2.573,964	800,000	1.773,964	10.000,000	0,000
Σ	12.869,820	4.000,000	8.869,820		

Va ancora osservato che per il debitore il tasso effettivo r^x per il rimborso del prestito ricevuto sarà ricavato dalla

(5.13.4) $$C = R \cdot \frac{(1 + r^x)^n - 1}{r^x \cdot (1 + r^x)^n}$$

in cui l'incognita r^x potrà essere ricavata con le funzioni inverse di cui al par. 3.8. Nell'esempio di cui sopra sarà $r^x = 9{,}04\%$.

Per quanto riguarda la valutazione dell'operazione da parte del creditore, egli potrà determinare il valore residuo del prestito ad un tasso di mercato, eventualmente ancora differente dai precedenti, calcolando il valore attuale delle rate R ancora da estinguere.

Concettualmente quanto sopra esposto va pure riferito a quanto già trattato al capitolo 4° (par. 4.1), cioè al reintegro di beni produttivi di vita operativa non lunga, il cui consumo provoca progressivamente una diminuzione di utilità, e quindi di valore, da doversi reintegrare.

5.14 Con ammortamento del prestito a tasso variabile

La contrattazione di un mutuo con collegamento del tasso ad indici finanziari e/o economici esterni, è cosa frequente. È frequente pure, in questo caso, l'adozione della tipologia di ammortamento "*francese*" che abbiamo trattato al par. 5.8, anche se la variazione del tasso può venir applicata pure in altri casi. I cambiamenti nel tasso di remunerazione del capitale prestato comportano la modifica delle rate ancora da pagare, sulla base del debito residuo al momento della variazione, che nella maggior parte dei casi viene fatta coincidere con la scadenza di una rata, per ovvie ragioni. La variazione, se di differenza notevole con il tasso iniziale, può comportare una rimodellazione generale del contratto, con modifica pure del numero delle rate. Ovviamente il piano definitivo del mutuo può venir compilato solo all'ultima scadenza.

Per esempio, prendiamo il piano riportato al par. 5.8 (tipologia "*francese*") con C = 10.000,00, n = 5, r = 0,08, ed ipotizziamo che alla scadenza della 2ª rata il tasso si porti al 10 %, e si abbassi poi al 7% alla scadenza della 4ª rata. Non sarà difficile per il lettore seguire il consuntivo qui di seguito esposto.

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	2.504,564	800,000	1.704,564	1.704,564	8.295,435
2	2.504,564	663,634	1.840,929	3.545,494	6.454,505
3	2.595,452	645,450	1.950,001	5.495,496	4.504,503
4	2.595,452	450,450	2.145,001	7.640,498	2.359,501
5	2.524,666	165,165	2.359,501	10.000,000	0,000
Σ	12.724,698	2.724,699	9.999.996	--	--

Il tasso medio dell'operazione nel suo complesso può venir calcolato sulla base della 5.1.2

$$C = \sum_{1}^{n} {}_kR_k \cdot \text{v}^{x^{(t_k - t_0)}} \qquad \text{con } \text{v}^x = \frac{1}{1+r^x}$$

cioè in base all'equazione

$$10.000,00 = 2.504,564\left[\left(1+r^x\right)^{-1} + \left(1+r^x\right)^{-2}\right] + 2.595,452\left[\left(1+r^x\right)^{-3} + \left(1+r^x\right)^{-4}\right] + 2.524,666\left(1+r^x\right)^{-5}$$

che, risolta per tentativi, dà $r^x = 8,575\%$

Va detto ancora che, per il calcolo del valore residuo del prestito in un qualunque momento, ma ad un tasso *r'* differente da quello tecnico corrente, va considerato "*in avanti*" tutto il rimanente piano di ammortamento computabile in quel momento e che successivamente potrà anche cambiare. Volendo, nell'esempio precedente, il valore residuo del prestito dopo la 3ª scadenza ed al tasso del 6%, sarà

$$V_3^{'} = 2.595,452 \cdot \left(1,06^{-1} + 1,06^{-2}\right) = 4.758,482$$

ovviamente maggiore del debito residuo nello stesso momento, in quanto $r' < r$.

5.15 Con rimborso del prestito con quote di ammortamento variabili

In regime di interesse composto, sulla base delle modalità adottate per le diverse tipologie di ammortamento finora esaminate, nonché tenendo presente le espressioni generali di equivalenza ed in particolare la 5.4.1, sarà agevole ormai predisporre piani di rimborso di prestiti indivisi con rate progressive comunque variabili. Se la variabilità è regolata da una legge, ad esempio una progressione aritmetica o geometrica, si consiglia di riprendere la lettura dei paragrafi 3.11 e 3.12. Portiamo anzitutto un esempio per un caso generico, nascente da una contrattazione fra le parti.

Si predisponga il piano di ammortamento per il prestito di un capitale di valore 10.000,00, su 5 rate periodiche al tasso del 8%, con rimborso posticipato di quote capitale di valore 1.500,00 per le prime due scadenze, 2000,00 per la terza scadenza e 2.500,00 per la 4ª e 5ª scadenza. Interessi pure posticipati

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	2.300,000	800,000	1.500,000	1.500,000	8.500,000
2	2.180,000	680,000	1.500,000	3.000,000	7.000,000
3	2.560,000	560,000	2.000,000	5.000,000	5.000,000
4	2.900,000	400,000	2.500,000	7.500,000	2.500,000
5	2.700,000	200,000	2.500,000	10.000,000	0,000
Σ	12.640,000	2.640,000	10.000,000	--	--

Se il contratto di mutuo prevede l'anticipazione degli interessi, il piano si modifica come di seguito (si tenga conto del tasso di sconto come al par. 2.6).

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0	740,740	740,740	-	-	10.000,000
1	2.129,629	629,629	1.500,000	1.500,000	8.500,000
2	2.018,518	518,518	1.500,000	3.000,000	7.000,000
3	2.370,370	370,370	2.000,000	5.000,000	5.000,000
4	2.685,185	185,185	2.500,000	7.500,000	2.500,000
5	2.500,000	0,000	2.500,000	10.000,000	0,000
Σ	12.444,444	2.444,444	10.000,000	--	--

Se l'accordo contrattuale prevede sempre C = 10.000,00, n = 5, r = 0,08, ma che le rate posticipate crescano in progressione aritmetica, ricordiamo la (3.11.2) che per semplicità ripetiamo, con l'avvertenza che, in questo contesto, così come al par. 3.12, il simbolo *d* ha il significato di *differenza*, e non altro

(5.15.1), (3.11.2) $$C = \left(a + \frac{d}{r} \right) \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} - \frac{n \cdot d}{r \cdot q^n}$$

nella quale la prima rata *a* dovrà essere non inferiore alla prima quota interessi $C \cdot r$. Si tratta di un'unica equazione a due incognite, *a* e *d*; sarà quindi necessario fissarne una e ricavare l'altra, verificando comunque la compatibilità del sistema. Generalmente viene fissata la rata di base $R_1 = a$ e di conseguenza si determina la differenza fra le rate contigue

(5.15.2) $$d = \frac{a \cdot r - (a - C \cdot r) \cdot r \cdot q^n}{q^n - 1 - n \cdot r}$$

che nel nostro esempio porta al valore 544,045. Ne consegue il piano di ammortamento.

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	1.500,000	800,000	700,000	700,000	4.300,000
2	2.044,045	744,000	1.300,045	2.000,045	7.999,954
3	2.588,090	639,996	1.948,094	3.948,140	6.051,859
4	3.132,136	484,148	2.647,987	6.596,127	3.403,872
5	3.676,181	272,309	3.403,872	10.000,000	0,000
Σ	12.440,454	2.940,454	10.000,000	--	--

Se la progressione aritmetica dovesse essere decrescente, occorrerà forse porre attenzione che le rate non vadano in negativo. Dovrà essere cioè

$$a - (n-1) \cdot d > 0$$

Nel nostro esempio, se poniamo d = -500,00 e ne ricaviamo

(5.15.3) $a = \frac{C \cdot r \cdot q^n + n \cdot d}{q^n - 1} - \frac{d}{r} = R_1$

avremo a = 3.427,800. Ne segue il piano

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	3.427,800	800,000	2.627,800	2.627,800	7.372,199
2	2.927,800	589,775	2.338,024	4.965,824	5.034,175
3	2.427,800	400,734	2.025,066	6.990,891	3.009,108
4	1.927,800	240,728	1.687,071	8.677,962	1.322,037
5	1.427,800	105,762	1.322,037	10.000,000	0,000
Σ	12.139,001	2.139,001	10.000,000	--	--

Se la contrattazione prevede invece che le rate posticipate crescano in progressione geometrica, riprendiamo anzitutto la (3.12.2)

(5.15.4), (3.12.2) $C = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{k^n - q^n}{k - q} = a \cdot \frac{1 - (k \cdot v)^n}{q - k} \qquad con\ 0 < k\ e \neq q$

dalla quale nasce l'equazione

(5.15.5) $a \cdot k^n - C \cdot q^n \cdot R - a \cdot q^n + C \cdot q^{n+1} = 0$

ancora a due incognite *a* e *k*, per cui accorerà fissarne una e ricavare l'altra, verificando la compatibilità del sistema $(a \geq C \cdot r)$.

Se fissiamo la rata di base $R_1 = a$ e poniamo $b = C \cdot q^n$ e $c = C \cdot q^{n+1} - a \cdot q^n$, avremo

$a \cdot k^n - b \cdot k + c = 0$

equazione la cui soluzione numerica approssimata sarà possibile con vari metodi.

Nel nostro esempio corrente, con C = 10.000,00, n = 5, r =0,08, ponendo la prima rata uguale a 1.500,00, osservando il grafico della funzione in Fig. 34 ed escludendo il valore k = 1,08, ricaviamo k = 1,277845 approssimato alla sesta cifra decimale e possiamo predisporre il programma dell'ammortamento come di seguito

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	1.500,000	800,000	700,000	700,000	9.300,000
2	1.916,842	744,000	1.172,842	1.872,842	8.127,157
3	2.449,523	650,172	1.799,350	3.672,193	6.327,806
4	3.130,233	506,224	2.624,009	6.296,202	3.703,797
5	4.000,110	296,303	3.703,806	10.000,000	0,008
Σ	12.996,700	2.996,700	10.000,000	--	--

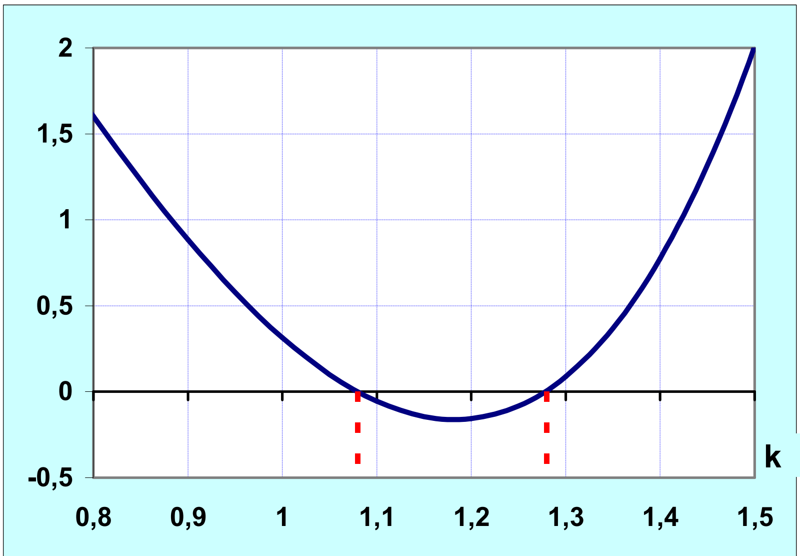


Fig. 34

Ed ancora, se vogliamo predisporre un programma sempre con i consueti termini, ma con una progressione geometrica decrescente con $k = \frac{4}{5}$, si troverà facilmente

(5.15.6) $$a = C \cdot q^n \cdot \frac{k - q}{k^n - q^n}$$

che per il nostro caso sarà $R_1 = a = 3.603{,}666$. Di seguito il piano.

Scadenza	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito estinto	Debito residuo
0					10.000,000
1	3.603,666	800,000	2.803,666	2.803,666	7.196,333
2	2.882,932	575,706	2.307,226	5.110,892	4.889,107
3	2.306,346	391,128	1.915,217	7.026,110	2.973,884
4	1.845,077	237,911	1.607,165	8.633,276	1.366,723
5	1.476,061	109,337	1.366,723	10.000,000	0,000
Σ	12.114,084	2.114,084	10.000,000	--	--

Il lettore potrà verificare che anche nella tipologia di ammortamento di questo paragrafo, a rate posticipate ed unico tasso, sono applicabili le formule di Makeham.

5.16 Aspetti conclusivi. Il contratto di leasing

La trattazione delle più tradizionali tipologie di ammortamento di prestiti indivisi, pur se ampia e corredata da esempi specifici, non copre certamente la vasta gamma di prodotti di questo genere offerta da Banche ed Istituti finanziari specializzati.

Una di queste operazioni, molto utilizzata anche per ragioni fiscali, è quella legata ad un contratto di *leasing*, attraverso la quale un Ente finanziario diventa appositamente proprietario di un bene, che poi dà in locazione ad un utente che lo usa e ne cura la manutenzione per un certo numero di anni, solitamente pochi. Si tratta di solito di beni mobili, quali veicoli, macchinari, attrezzature, ecc., di forte decadimento tecnico nei primi anni di vita operativa, ed il cui valore scende già nelle previsioni contrattuali da un valore V_0 ad un valore V_n dopo n anni oppure n periodi prefissati. Il bene sarà ovviamente coperto da assicurazioni specifiche contro i rischi del suo impiego, e l'utente dovrà corrispondere al locatore le rate periodiche ad un determinato saggio d'interesse r, solitamente costanti e posticipate ed in regime di interesse composto. L'ammortamento del debito da estinguere nel periodo prefissato sarà pertanto, secondo una delle tipologie più frequenti

(5.16.1) $$V_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{r \cdot q^n} + V_n \cdot v^n$$

Al termine del contratto l'utente potrà restituire il bene al locatore, oppure riscattarlo ad un prezzo vicino al valore residuo del bene stesso, oppure ancora trattenere il bene per altri periodi e con un nuovo contratto in cui il valore iniziale del bene sarà vicino a quello residuo del contratto precedente.

Non ci addentriamo ulteriormente su questa operazione finanziaria, che molte volte prevede pure un pacchetto di rate iniziali di preammortamento, ma che in genere viene modellata sulle esigenze dell'utenza.

Concludiamo l'argomento di questo capitolo ricordando quanto già anticipato al paragrafo 5.1, cioè che abbiamo sempre ipotizzato di muoverci nel "*discreto*" e non nel "*continuo*", cioè con movimenti di capitali determinati e non con flussi di capitali (par. 3.7), commercialmente non proponibili.

Capitolo 5°

ESERCIZI E QUESITI RISOLTI

1 - Un capitale di valore 10.000,00 viene prestato per 6 periodi di 6 mesi ciascuno, in regime di interesse semplice, al tasso del 4% per ogni periodo, con rimborso del montante alla scadenza. Calcolare la rata unica del rimborso ed il debito residuo al termine del 4° semestre/inizio del 5°.

$$R = 10.000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 6) = 12.400{,}000$$

$$D_{r,4} = R \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 2)^{-1} = 11.481{,}481$$

Si osserva che, calcolato con lo sconto razionale, il debito residuo è inferiore al montante del capitale prestato

$$M_4 = 10.000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 4) = 11.600{,}000$$

2 - In relazione all'esercizio precedente, in caso di interruzione dell'operazione al compimento del quarto semestre con il versamento da parte del debitore di un'unica somma pari al debito residuo, si determini il tasso d'interesse effettivo sull'immobilizzo del capitale prestato.

$$r' = \frac{11.481{,}481 - 10.000{,}000}{4 \cdot 10.000} = \frac{0{,}04}{1 + (6-4) \cdot 0{,}04} = 0{,}0370$$

3 - Un capitale di valore 10.000,00 viene prestato per 6 periodi di 6 mesi ciascuno, in regime di interesse semplice, con rimborso del capitale in quota unica alla scadenza dei tre anni e versamento degli interessi alla scadenza di ogni periodo. Il tasso contrattuale di remunerazione del capitale è del 4% per ogni periodo. Calcolare il valore delle rate periodiche, dell'ultima rata e del debito residuo dopo la quarta scadenza.

$$R_m = 10.000 \cdot 0{,}04 = 400{,}000 \qquad \text{per } m = 1 \div 5$$

$$R_n = 10.000{,}000 + 400{,}000 = 10.400{,}000 \qquad \text{per } n = 6$$

$$D_{r,h} = 400{,}000 \cdot (1+0{,}04)^{-1} + 10.400{,}000 \cdot (1+2\cdot 0{,}04)^{-1} = 10.014{,}245$$

4 - Calcolare gli elementi richiesti nell'esercizio precedente nel caso che le rate degli interessi abbiano scadenza periodica anticipata.

$$R_m^x = 10.000{,}00 \cdot \frac{0{,}04}{1{,}04} = 384{,}615 \qquad \text{per } m = 0 \div 5$$

$$R_n = 10.000{,}000 \qquad \text{per } n = 6$$

$$D_{r,4}^x = \frac{R_m^x}{1+0{,}04} + \frac{10.000}{1+2\cdot 0{,}04} = 9.629{,}081$$

5 - Un capitale di valore 10.000,00 viene prestato per 6 periodi di 6 mesi ciascuno, in regime di interesse semplice con rimborso del prestito con quote di ammortamento costanti, a scadenza periodica posticipata. Il tasso contrattuale di remunerazione del capitale è del 4% per ogni periodo. Calcolare il valore delle rate periodiche e del debito residuo dopo la quarta scadenza.

$$R = 10.000 \cdot (1+0{,}04\cdot 6) \cdot \left[6 \cdot \left(1+0{,}04 \cdot \frac{6-1}{2}\right)\right]^{-1} = 1.878{,}787$$

$$D_{r,4} = R \cdot \left(1{,}04^{-1} + 1{,}08^{-1}\right) = 3.546{,}145$$

6 - Calcolare gli elementi richiesti nell'esercizio precedente nel caso che le quote di ammortamento abbiano scadenza periodica anticipata.

$$R_m^x = 10.000 \cdot (1+0{,}04\cdot 6) \cdot \left[6 \cdot \left(1+0{,}04 \cdot \frac{6+1}{2}\right)\right]^{-1} = 1.812{,}865 \qquad \text{per } m = 0 \div$$

5

$$D_{r,4}^x = R_m^x \cdot (1+0{,}04)^{-1} = 1.743{,}139$$

7 - Un bene di valore 3.000,00 viene acquistato con pagamento di 1/3 alla consegna e 8 rate trimestrali, garantite da cambiali, al tasso di sconto del 8% annuo. Determinare l'importo delle rate nel caso di scadenza posticipata oppure anticipata rispetto ogni periodo.

$$d' = \frac{d}{4} = 0{,}02$$

$$R_m = (3.000 - 1.000) \cdot \left[8 \cdot \left(1 - \frac{8+1}{2} \cdot 0{,}02 \right) \right]^{-1} = 274{,}725 \qquad \text{per } m = 1 \div 8$$

$$R_m = (3.000 - 1.000) \cdot \left[8 \cdot \left(1 - \frac{8-1}{2} \cdot 0{,}02 \right) \right]^{-1} = 268{,}817 \qquad \text{per } m = 0 \div 7$$

8 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso unico del montante del capitale alla scadenza degli 8 anni. Calcolare il debito residuo al termine dei primi 4 anni e le relative quote di nuda proprietà e usufrutto a tasso contrattuale.

$$D_{r,4} = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{16} \cdot 1{,}03^{-8} = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{8} = 126.677{,}008$$

$$P_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{-8} = 78.940{,}923$$

$$U_4 = D_{r,4} - P_4 = 100.000{,}00 \cdot \left(1{,}03^{16} - 1\right) \cdot 1{,}03^{-8} = 47.736{,}084$$

9 - Con riferimento all'esercizio precedente l'Istituto finanziario mutuante vuole conoscere il valore del prestito sempre al termine dei quattro anni, ma al tasso semestrale di valutazione del 4%; si chiedono pure le quote di nuda proprietà e usufrutto. Si chiede anche il valore del prestito all'origine dell'operazione.

$$V_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{16} \cdot 1{,}04^{-8} = 117.254{,}327$$

$$P_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}04^{-8} = 73.069{,}020$$

$$U_4 = V_4 - P_4 = 100.000{,}00 \cdot \left(1{,}03^{16} - 1\right) \cdot 1{,}04^{-8} = 44.185{,}307$$

$$V_0 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{16} \cdot 1{,}04^{-16} = 85.676{,}588$$

10 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso unico del capitale alla scadenza degli 8 anni, ma con versamento periodico (semestrale) posticipato degli interessi. Calcolare il debito residuo al termine dei primi 4 anni e le relative quote di nuda proprietà e usufrutto a tasso contrattuale.

$$D_{r,4} = P_4 + U_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{-8} + 100.000{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03 \cdot 1{,}03^8} = 100.000{,}000$$

$$P_4 = 78.940{,}923 \qquad U_4 = 21.059{,}076$$

11 - In merito all'operazione precedente si chiede il valore residuo del prestito sempre al termine dei primi quattro anni, ma al tasso di valutazione del 4%, con il riparto in quote di nuda proprietà e usufrutto. Si chiede pure il valore residuo all'origine dell'operazione.

$$V_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}04^{-8} + 100.000{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-8}}{0{,}04} = 93.267{,}255$$

$$P_4 = 73.069{,}020 \qquad U_4 = 20.198{,}234$$

$$V_0 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}04^{-16} + 100.000{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-16}}{0{,}04} = 88.347{,}704$$

12 - L'operazione finanziaria di cui all'esercizio bi-precedente prevede il pagamento semestrale anticipato degli interessi. Tenuto conto del tasso di anticipazione in quel regime si chiede risposta agli stessi quesiti.

$$D^x_{r,4} = P^x_4 + U^x_4 = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{-8} + 100.000{,}00 \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03} \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03 \cdot 1{,}03^7} = 97.087{,}378$$

$$P^x_4 = P_4 = 78.940{,}923 \qquad U^x_4 = 18.146{,}455$$

13 - In merito all'operazione precedente si chiede il valore residuo del prestito sempre al termine dei primi quattro anni ma al tasso di valutazione del 4%, con il riparto in quote di nuda proprietà e usufrutto. Si chiede pure il valore residuo all'origine dell'operazione, dopo il versamento della prima rata d'interessi.

$$V_4^x = 100.000,00 \cdot 1,04^{-8} + 100.000,00 \cdot \frac{0,03}{1,03} \cdot \frac{1-1,04^{-7}}{0,04} = 90.550,733$$

$$P_4^x = 73.069,020 \qquad U_4^x = 17.481,712$$

$$V_4^x = 100.000,00 \cdot 1,04^{-16} + 100.000,00 \cdot \frac{0,03}{1,03} \cdot \frac{1-1,04^{-15}}{0,04} =$$
$$= 53.390,817 + 32.283,652 = 85.774,470$$

14 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso con rate periodiche, costanti, posticipate (ammortamento francese). Si determini il valore della rata. Si determini il debito residuo dopo 4 anni ed il valore della quota di capitale che viene restituita a quella scadenza.

$$R = C \cdot \frac{r}{1-\nu^n} = 100.000,00 \cdot \frac{0,03}{1-1,03^{-16}} = 7.961,084$$

$$D_{r,m} = R \cdot \frac{1-\nu^{n-m}}{r}; \qquad D_{r,4} = R \cdot \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = 55.884,365$$

$$Q_{c,m} = R \cdot \nu^{n-m-1}; \qquad Q_{c,4} = R \cdot 1,03^{-9} = 6.101,508$$

15 - In relazione all'esercizio precedente si determini il debito residuo dopo 4 anni e 3 mesi. In questo momento operativo il debitore chiede di interrompere e chiudere l'operazione; il creditore accorda ma al tasso di valutazione semestrale del 2,5%. Determinare per quel momento il valore residuo e le sue componenti (nuda proprietà ed usufrutto).

$$D_{r,m+h} = D_{r,m} \cdot q^h; \qquad D_{r,4,25} = D_{r,4} \cdot 1,03^{0,5} = 56.716,436$$

$$V_{m+h} = R \cdot \frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} \cdot q^h = R \cdot \frac{1-1{,}025^{-8}}{0{,}025} \cdot 1{,}025^{0,5} = 57.791{,}192$$

$$P'_{m+h} = R \cdot \frac{\nu'^{(n-m)} - \nu^{(n-m)}}{r-r'} \cdot q'^h = R \cdot \frac{1{,}025^{-8} - 1{,}030^{-8}}{0{,}005} \cdot 1{,}025^{0,5} = 50.515{,}687$$

$$U'_{m+h} = R \cdot \frac{r}{r-r'} \cdot \left(\frac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'} - \frac{1-\nu^{(n-m)}}{r} \right) \cdot q^h =$$

$$= R \cdot \frac{0{,}03}{0{,}005} \cdot \left(\frac{1-1{,}025^{-8}}{0{,}025} - \frac{1-0{,}030^{-8}}{0{,}03} \right) \cdot 1{,}025^{0,5} = 7.275{,}504$$

16 - In relazione all'esercizio precedente si determini il valore del prestito all'inizio dell'operazione, al tasso di valutazione del 2,5% per semestre, impiegando la formula di Makeham dopo aver calcolato il valore della nuda proprietà.

$$P'_0 = R \cdot \frac{\nu'^{-16} - \nu^{-16}}{r-r'} = R \cdot \frac{1{,}025^{-16} - 1{,}030^{-16}}{0{,}030 - 0{,}025} = 80.340{,}075$$

$$V_0 = P'_0 + \frac{r}{r'} \cdot \left(C - P'_0\right) = P'_0 + \frac{0{,}030}{0{,}025} \cdot \left(100.000{,}00 - P'_0\right) = 103.931{,}984$$

17 - Si costruisca il piano di ammortamento di un debito di 10.000 da estinguere in 3 anni al saggio del 10%, con rate annue, costanti e posticipate.

$$Q_{am} = D_i \cdot \frac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = 10.000 \cdot 0{,}4021 = 4.021$$

Anno	**Rata**	**Quota capitale**	**Quota interessi**	**Debito estinto**	**Debito residuo**
0	-	-	-	-	10.000
1	4.021	3.021	1.000	3.021	6.979
2	4.021	3.323	698	6.344	3.656
3	4.021	3.656	365	10.000	0

18 - La situazione finanziaria di un'impresa è la seguente: 11.000 da incassare fra un mese; 40.000 da versare fra 6 mesi; 20.000 da restituire fra 2 anni.

Assumendo un tasso d'interesse pari al 6% annuo, calcolare, applicando il regime a interesse semplice per i periodi non superiori ad 1 anno, e quello a interesse composto per gli altri:

- l’indebitamento totale all’attualità;

- la rata semestrale posticipata che estingue il debito in 7 anni.

Indebitamento $A_0 = -\dfrac{11.000}{1+0{,}06\cdot\dfrac{1}{12}} + \dfrac{40.000}{1+0{,}06\cdot\dfrac{6}{12}} + \dfrac{20.000}{1{,}06^2} = 45.689{,}61$

Equivalenza semestrale del tasso annuale $r(\text{sem.}) = (1+0{,}06)^{1/2} = 0{,}02956$

Rata semestrale $R = 45.689{,}61\cdot\dfrac{0{,}02956\cdot 1{,}02956^{14}}{1{,}02956^{14}-1} = 4.032{,}61$

19 - La costruzione di un complesso immobiliare richiede i seguenti esborsi: 3 milioni da versare subito; 5 milioni all’anno da versare per i prossimi 3 anni; 4 milioni da versare fra 4 anni. Assumendo un tasso d’interesse pari al 6%, calcolare la rata annua posticipata del mutuo decennale che finanzia la costruzione.

Fabbisogno finanziario $A_0 = 3 + 5\cdot\dfrac{1{,}06^3-1}{0{,}06\cdot 1{,}06^3} + \dfrac{4}{1{,}06^4} = 19{,}53$

Quota ammortamento $Q_a = 19{,}52\cdot\dfrac{0{,}06\cdot 1{,}06^{10}}{1{,}06^{10}-1} = 2{,}65$

20 - Compilare il piano di ammortamento triennale, con rate annue costanti e posticipate, di un mutuo pari a 15.000 al tasso di interesse del 4%.

Quota ammortamento $Q_a = 15.000\cdot\dfrac{0{,}04\cdot 1{,}04^3}{1{,}04^3-1} = 5.405{,}23$

Anno	**Q_a**	**Q_i**	**Q_c**	**D_e**	**D_r**
0	-	-	-	-	15.000,00
1	5.405,23	600,00	4.805,23	4.805,23	10.194,77
2	5.405,23	407,79	4.997,44	9.802,67	5.197,33
3	5.405,23	207,89	5.197,33	15.000,00	0,00

21 - La manutenzione di un fabbricato richiede le seguenti spese: 2.000 ogni 4 anni; 100 ogni 6 mesi; 6.000 ogni 10 anni. Assumendo un tasso di interesse pari al 10%, calcolare

la quota di manutenzione annua, applicando il regime a interesse semplice per periodi non superiori a 1 anno, e quello a interesse composto per gli altri.

Quota manutenzione

$$Q_m = 2.000 \cdot \frac{0,1}{1,1^4 - 1} + 100 + 100 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{6}{12}\right) + 6.000 \cdot \frac{0,1}{1,1^{10} - 1} = 1.012,41$$

22 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso con rate periodiche, costanti, posticipate, ma con anticipazione degli interessi. Si determini il valore della rata all'emissione e delle rate costanti successive. Si determini il debito residuo dopo 4 anni ed il valore della quota di capitale che viene restituita con la rata in scadenza a quel termine. Cosa si nota rispetto gli analoghi valori determinati nell'esercizio dell'ammortamento a rate costanti posticipate?

$$R = 100.000,00 \cdot \frac{0,03}{1,03} = 2.912,621 \qquad \text{per } m = 0$$

$$R = C \cdot (1 - d) \cdot \frac{r}{1 - \nu^n} = 100.000,00 \cdot \left(1 - \frac{0,03}{1,03}\right) \cdot \frac{0,03}{1 - 1,03^{-16}} =$$
$$= 7.729,208 \qquad \text{per } m = 1 \div n$$

$$D_{r,4} = R \cdot \frac{1 - \nu^{n-m}}{d} = R \cdot \frac{1 - 1,03^{-8}}{0,03/1,03} = 55.884,365$$

$$Q_{c,4} = R \cdot \nu^{n-m} = R \cdot 1,03^{-8} = 6.101,508$$

Si osserva che il debito residuo e la quota capitale restituita sono uguali a quelli di un piano di ammortamento a rate costanti posticipate per un analogo capitale di emissione.

23 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso con rate periodiche, costanti, anticipate. Si determini il valore della rata, del debito residuo dopo la scadenza di 3,5 anni (7 periodi) e della quota di capitale che viene restituita con la rata trattenuta alla emissione del prestito e con la rata in scadenza al termine dei 7 periodi.

Cosa si osserva nei valori determinati rispetto quelli risultati nell'esercizio di ammortamento a rate costanti, posticipate?

$$R = C \cdot \frac{r \cdot \nu}{1-\nu^{n}} = 100.000,00 \cdot \frac{0,03 \cdot 1,03}{1-1,03^{-16}} = 7.729,208$$

$$M_7^{+} = R \cdot \frac{1-\nu^{(n-m-1)}}{r} = R \cdot \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = 54.256,665$$

$$Q_{i,7} = M_7^{+} \cdot r = M_7^{+} \cdot 0,03 = 1.627,699$$

$$D_{r,7}(3,5 \text{ anni}) = M_7^{+} + Q_{i,7} = 55.884,365$$

$$Q_{c,0} = R \cdot \nu^{n-1} = R \cdot 1,03^{-15} = 4.961,084$$

$$Q_{c,7} = R - Q_{i,7} = R \cdot \nu^{8} = Q_{c,0} \cdot q^{7} = 6.101,508$$

Si osserva che la quota capitale restituita all'inizio del turno considerato è uguale a quella restituita al termine dello stesso periodo nel procedimento a rate costanti posticipate per lo stesso capitale di emissione.

24 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso con rate periodiche posticipate, con quote capitale costanti (ammortamento italiano). Si determini il valore della quota capitale periodica, della rata in scadenza al termine di 4 anni, della quota interessi e del debito residuo a quella epoca.

$$Q_c = \frac{C}{n} = \frac{100.000}{16} = 6.250,00$$

$$R_8 = Q_c + Q_{i,8} = 6.250,00 + 1.687,50 = 7.937,50$$

$$Q_{i,8} = C \cdot r \cdot \frac{n-m+1}{n} = 100.000 \cdot 0,08 \cdot \frac{9}{16} = 1.687,50$$

$$D_{r,8} = C \cdot \frac{n-m}{n} = 100.000 \cdot \frac{8}{16} = 50.000,00$$

25 - In relazione all'esercizio precedente si determini il debito residuo dopo 4 anni e 3 mesi. In questo momento operativo il debitore decide di interrompere e chiudere l'operazione; il creditore accorda, ma al tasso di valutazione semestrale del 2,5%. Determinare per quel momento il valore residuo e le sue componenti (nuda proprietà e usufrutto).

$$D_{r,8,5}(\text{a 4 anni e 3 mesi}) = D_{r,8} \cdot q^{0,5} = 50.000 \cdot 1{,}03^{0,5} = 50.744{,}457$$

$$P'_{8,5}(\text{a 4 anni e 3 mesi}) = q'^{0,5} \cdot \frac{C}{n} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k v'^{(k-m)} =$$

$$= 1{,}025^{0,5} \cdot 6.250{,}00 \cdot \frac{1 - v'^{8}}{r'} = 1{,}025^{0,5} \cdot 44.813{,}357 = 45.370{,}066$$

$$U'_{8,5} = q'^{0,5} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k Q_{i,k} \cdot v'^{(k-m)}$$

Si tratta di una successione di 8 termini, in progressione aritmetica decrescente, con

$Q_{i,8} = 1.500{,}00$ e $d = -187{,}50$

$$U'_{8,5} = q'^{0,5} \cdot \left[\left(1.500{,}00 - \frac{187{,}5}{0{,}025} \right) \cdot \frac{1 - 1{,}025^{-8}}{0{,}025} + \frac{8.187{,}5}{0{,}025 \cdot 1{,}025^{8}} \right] =$$

$$= 1{,}025^{0,5} \cdot 6.233{,}971 = 6301{,}290$$

$$V_{8,5}(\text{a 4 anni e 3 mesi}) = P'_{8,5} + U'_{8,5} = 51.671{,}356$$

Più semplicemente con Makeham

$$V_{8,5} = q'^{0,5} \cdot \left[P'_8 + \frac{r}{r'} \cdot (C_8 - P'_8) \right] =$$

$$= 1{,}025^{0,5} \cdot \left[44.813{,}357 + \frac{0{,}030}{0{,}025} \cdot (50.000{,}00 - 44.813{,}357) \right] = 51.671{,}356$$

26 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni in regime di interesse composto al tasso semestrale del 3% con rimborso con rate periodiche con quote capitale costanti e posticipate e quote interessi anticipate (ammortamento tedesco). Si determini il valore della quota capitale, della rata di emissione del prestito, della rata alla scadenza del termine di 4 anni, della quota interessi e del debito residuo a quella epoca.

$$Q_c = \frac{C}{n} = \frac{100.000,00}{16} = 6.250,00$$

$$R_0 = Q_{c,0} = 6.250,00 \cdot 0,03 \cdot 1,03^{-1} = 2.912,621$$

$$R_8(\text{a 4 anni}) = 6.250,00 + 100.000,00 \cdot \frac{16-8}{16} \cdot 0,03 \cdot 1,03^{-1} =$$
$$= 6.250,00 + 1.456,310 = 7.706,310$$

$$Q_{i,8} = 1.456,310 \qquad D_{r,8} = 100.000,00 \cdot \frac{8}{16} = 50.000,00$$

27 - In relazione all'esercizio precedente si determini il debito residuo dopo 4 anni e 3 mesi. In quel momento operativo il debitore decide di interrompere e chiudere l'operazione; il creditore accorda, ma al tasso di valutazione semestrale del 2,5%. Determinare per quel momento il valore residuo e le sue componenti (nuda proprietà e usufrutto).

$$D_{r,8,5}(\text{a 4 anni e 3 mesi}) = D_{r,8} \cdot 1,025^{0,5} = 50.744,457$$

$$P'^{x}_{8,5} = \frac{C}{n} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k v'^{(n-m-h)} = 6.250,00 \cdot \frac{1,025^8 - 1}{0,025 \cdot 1,025^{7,5}} = 45.370,066$$

$$U'^{x}_{8,5} = \sum_{m+1}^{n-1} {}_k Q_{i,k} \cdot v'^{(n-m-h)}$$

Si tratta di una successione di 7 termini, in progressione aritmetica decrescente con

- ultimo termine $= -d' = 6.250,00 \cdot 0,03 \cdot 1,03^{-1} = 182,038$
- primo termine $= 7 \cdot (-d') = 1.274,271$

$$U'^{x}_{8,5} = \left(1.274,271 + \frac{d'}{0,025}\right) \cdot \frac{1,025^7 - 1}{0,025 \cdot 1,025^{6,5}} - \frac{7 \cdot d'}{0,025 \cdot 1,025^{6,5}} = 4.796,299$$

$$V^{x}_{8,5} = P'^{x}_{8,5} + U'^{x}_{8,5} = 50.166,365$$

28 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni, in regime di interesse composto, con rimborso con rate semestrali costanti, posticipate, ma a due tassi (ammortamento americano). Il tasso di remunerazione del capitale è del 3% semestrale; quello di ricostituzione del capitale è del 2,5%, sempre semestrale.

Determinare il valore della rata costante, del debito estinto al termine dei primi 4 anni e del tasso effettivo dell'operazione per il debitore. Sempre al termine e dopo la scadenza dei primi 8 semestri, il debitore chiede di interrompere e chiudere l'operazione; il creditore accorda, ma al tasso di ricostituzione del capitale; determinare la somma dovuta dal debitore.

$$R = C \cdot r' + C \cdot \frac{r''}{(1+r'')^n - 1} = 100.000,00 \cdot 0,03 + 100.000,00 \cdot \frac{0,025}{1,025^{16} - 1} =$$
$$= 3.000,00 + 5.159,898 = 8.159,898$$

$$D_{e,8} = 5.159,898 \cdot \frac{1,025^8 - 1}{0,025} = 45.077,474$$

La ricerca del tasso r^x effettivo dell'operazione per il debitore, con il procedimento approssimato di Baily

$$s_0 = \frac{C}{R} = \frac{100.000,00}{R} = \frac{1 - v^{x16}}{r^x} = 12,255$$

$$h = \left(\frac{n}{s_0}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = \left(\frac{16}{s_0}\right)^{\frac{2}{17}} - 1 = 0,03186$$

$$r^x = h \cdot \frac{12 - (n-1) \cdot h}{12 - 2 \cdot (n-1) \cdot h} = 0,033247 = 3,3247\%$$

risultato già soddisfacente, e che, con successive approssimazioni, si definisce in

$r^x = 0,033245$, dal quale

$$C = R \cdot \frac{1 - v^{x16}}{r^x} = 100.000,176$$

In merito alla valutazione del prestito dopo l'8° semestre e tutto al tasso del 2,5%

$$V_8 = R \cdot \frac{1 - 1,025^{-8}}{0,025} = 58.507,594$$

29 - Un capitale di valore 100.000,00 viene prestato per un periodo di 8 anni, in regime di interesse composto, con rimborso secondo il metodo progressivo francese al tasso iniziale del 3% semestrale, stabilendo che dopo ogni biennio questo tasso subirà le stesse variazioni del tasso ufficiale di sconto. Questo tasso dopo i primi due anni è

aumentato di mezzo punto, dopo altri due anni è sceso di mezzo punto, e dopo due anni ancora è sceso nuovamente di mezzo punto. Calcolare il valore della rata di ammortamento iniziale, della rata dopo due anni, dopo 4 anni e dopo 6 anni. Calcolare il tasso medio dell'operazione.

$$R_{\text{iniziale}} = 100.000,00 \cdot \frac{0,03 \cdot 1,03^{16}}{1,03^{16} - 1} = 7.961,084$$

$$D_{r,4} = R \cdot \frac{1 - 1,03^{-12}}{0,03} = 79.244,671$$

$$R_{\text{inizio 5° sem.}} = D_{r,4} \cdot \frac{0,035 \cdot 1,035^{12}}{1,035^{12} - 1} = 8.200,551$$

$$D_{r,8} = R \cdot \frac{1 - 1,035^{-8}}{0,035} = 56.370,226$$

$$R_{\text{inizio 9° sem.}} = D_{r,8} \cdot \frac{0,03 \cdot 1,03^{8}}{1,03^{8} - 1} = 8.030,298$$

$$D_{r,12} = R \cdot \frac{1 - 1,03^{-4}}{0,03} = 29.249,411$$

$$R_{\text{inizio 13° sem.}} = D_{r,12} \cdot \frac{0,025 \cdot 1,025^{4}}{1,025^{4} - 1} = 7.934,507$$

$$D_{r,16} = R \cdot \frac{1 - 1,025^{0}}{0,025} = 0$$

In merito al tasso medio dell'operazione

$$C = \sum_{1}^{n} {}_{k}R_{k} \cdot \nu^{x^{(t_k - t_0)}} \qquad \text{con } \nu^{x} = \frac{1}{1 + r^{x}}$$

$$100.000,00 = R_1 \cdot \frac{1,03^4 - 1}{0,03} \cdot \nu^{x4} + R_5 \cdot \frac{1,035^4 - 1}{0,035} \cdot \nu^{x8} + R_9 \cdot \frac{1,03^4 - 1}{0,03} \cdot \nu^{x12} + R_{13} \cdot \frac{1,025^4 - 1}{0,025} \cdot \nu^{x16} =$$
$$= 33.306,209 \cdot \nu^{x4} + 34.564,856 \cdot \nu^{x8} + 33.595,775 \cdot \nu^{x12} + 32.948,165 \cdot \nu^{x16}$$

Con successive approssimazioni si giunge al valore r^x = 0,0312 con il quale C = 100.005,896.

30 - Un capitale di valore 100.000,00 viene dato a prestito per un periodo di 8 anni, in regime di interesse composto, al tasso semestrale del 3%, con rimborso con rate semestrali posticipate. Si conviene che la prima rata copra solamente l'interesse del capitale prestato, e che le rate successive crescano in progressione aritmetica, composte sia di quote interesse che di quota capitale. Si determini la ragione della progressione, il valore della prima e della seconda rata, il valore della rata e del debito residuo alla scadenza dei primi 4 anni.

$$R_1 = 100.000{,}00 \cdot 0{,}03 = 3.000{,}00$$

$$d = \frac{R_1 \cdot r - (R_1 - C \cdot r) \cdot r \cdot q^n}{q^n - 1 - n \cdot r} = \frac{3.000 \cdot 0{,}03}{1{,}03^{16} - 1 - 16 \cdot 0{,}03} = 721{,}694$$

$$R_2 = 3.000{,}000 + 721{,}694 = 3.721{,}694$$

$$R_8 = 3.000{,}000 + 7 \cdot 721{,}694 = 8.051{,}864$$

$$R_9 = 3.000{,}000 + 8 \cdot 721{,}694 = 8.773{,}559$$

$$D_{r,8} = \left(R_9 + \frac{d}{0{,}03} \right) \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03 \cdot 1{,}03^8} - \frac{8 \cdot d}{0{,}03 \cdot 1{,}03^8} = 78.533{,}521$$

31 - Un capitale di valore 100.000,00 viene dato a prestito per un periodo di 8 anni, in regime di interesse composto, al tasso semestrale del 3%, con rimborso con rate semestrali posticipate. Si conviene che la prima rata copra solamente l'interesse del capitale prestato, e che le rate successive crescano in progressione geometrica, composte sia di quote interesse che di quota capitale. Si determini la ragione della progressione, il valore della prima e della seconda rata, il valore della rata e del debito residuo alla scadenza dei primi 4 anni.

Si esamini la funzione

$$y = f(k) = a \cdot k^n - b \cdot k + c \qquad \text{con}$$

$$a = R_1 = C \cdot r = 100.000{,}00 \cdot 0{,}03 = 3.000{,}00$$

$$b = C \cdot q^n = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{16} = 160.470{,}6439$$

$$c = C \cdot q^{n+1} - a \cdot q^n = 100.000{,}00 \cdot 1{,}03^{17} - 3.000{,}00 \cdot 1{,}03^{16} = 160.470{,}6439$$

Nell'intervallo (0,94 ÷ 1,18) la f(k) ha l'andamento di cui al grafico seguente, presenta un minimo per k = 1,08378 (f''(k) > 0) ed ha due zeri per k = 1,030 (non utilizzabile) e per

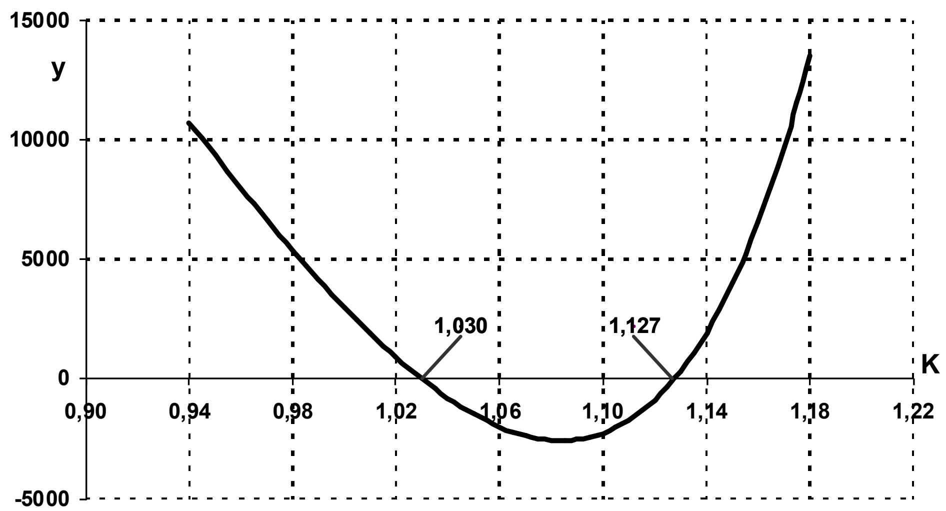
k = 1,127471. Per questo secondo valore si ha infatti

$$C = R_1 \cdot \frac{k^n - 1{,}03^{16}}{k - 1{,}03} \cdot \frac{1}{q^{16}} = 100.000{,}1047$$

$$R_2 = R_1 \cdot k = 3.382{,}413$$

$$R_8 = R_1 \cdot k^7 = 6.947{,}985$$

$$D_{r,8} = C \cdot q^8 - R_1 \cdot \frac{k^8 - q^8}{k - q} = 85.297{,}088$$



Capitolo 6°

L'AMMORTAMENTO DI PRESTITI DIVISI

6.1 L'operazione finanziaria

Nell'introduzione del capitolo precedente abbiamo già presentato l'operazione finanziaria, opposta a quella ivi trattata, di quando il prestito viene effettuato non da uno solo, bensì da più operatori mutuanti che diventano creditori, mentre il debitore mutuatario rimane sempre unico. Si tratta di prestiti di capitali di forte entità, richiesti dallo Stato o da Enti Pubblici o Privati per investimenti o operazioni specifiche, che per il rapporto con il mercato si avvalgono di Banche o Istituti di Credito.

Se i titoli vengono emessi dallo Stato prendono il nome di "*Buoni del Tesoro*". Se invece il prestito viene richiesto da altri Enti, gli Istituti che operano a nome del debitore emettono un certo numero di titoli fiduciari di credito detti "*obbligazioni*", presentati sul mercato con un documento di pubblica offerta che precisa l'operazione nei suoi aspetti tecnici, con particolare riguardo alla redditività del titolo ed alle modalità di rimborso del prestito.

Pure in questo caso va osservato come per l'Ente che avvia l'operazione sia importante che le obbligazioni vengano rapidamente assorbite dal mercato, in modo da avere la disponibilità del capitale in tempi brevi; a questo fine vengono eventualmente introdotti elementi di attrazione, quali l'acquisto dell'obbligazione sotto la pari, oppure l'estrazione di premi nel corso dell'operazione, oppure il rimborso sopra la pari, oppure altri ancora. Per l'obbligazionista è ovviamente importante la redditività del titolo e le garanzie che vengono assicurate all'operazione. Va pure osservato che, se l'operazione viene quotata in Borsa, saranno le fluttuazioni di quel mercato a dare ai titoli un valore in ogni momento, cioè a determinarne il "*corso*".

Sotto l'aspetto tecnico, l'ammortamento del prestito avviene generalmente con le tipologie già analizzate ai paragrafi specifici del capitolo 5°. Esamineremo qui di seguito i dettagli delle più comuni e tradizionali tipologie di prestito obbligazionario, ma facciamo presente come, soprattutto negli anni duemila siano apparsi sul mercato prodotti con caratteristiche particolari, anche al fine di temperare la negatività dovuta sia alla bassa redditività degli investimenti in generale, sia alla variabilità dei tassi di mercato.

6.2 L'obbligazione

E' un titolo fiduciario di credito attraverso il quale l'Ente richiedente il prestito garantisce all'investitore che acquista il titolo il versamento a suo favore di uno o una serie di importi costituenti gli interessi del prestito, ed il pagamento di un importo capitale entro o al termine di una scadenza temporale fissa.

I principali elementi che caratterizzano "*l'obbligazione*", pubblicizzati dall'Ente emittente attraverso una "*Offerta al Pubblico*" sono i seguenti:

- Il *Valore nominale c*, uguale solitamente a 100 o 1.000 unità monetarie del Paese in cui si opera. È pari al rapporto tra il capitale totale richiesto in prestito "C" ed il numero "N" delle obbligazioni emesse. Ovviamente il numero minimo di titoli posto in acquisizione (taglio) è un multiplo di "*c*".
- Il *Prezzo di emissione c'* (o prezzo di sottoscrizione), cioè il prezzo che l'acquirente del titolo (sottoscrittore, obbligazionista) paga per un titolo all'origine dell'operazione. Questo prezzo può essere uguale al valor nominale, ed allora si parlerà di "*emissione alla pari*", oppure inferiore, ed allora si dirà che l'emissione è "*sotto la pari*", oppure che viene dato un "*premio di emissione*". Non consueta è una "*emissione sopra la pari*".
- Il *Prezzo di rimborso c''*, cioè l'importo che viene pagato dall'Ente al possessore del titolo alla sua scadenza. La somma rimborsata è generalmente uguale al valore nominale, cioè il rimborso è "*alla pari*", ma il programma dell'operazione può prevedere anche un rimborso "*sopra la pari*", oppure un premio di rimborso. Possono essere previste anche estrazioni di altri premi nel corso della vita dei titoli.
- L'*Ammortamento* del debito, ossia il programma sia per il rimborso dei titoli che per il pagamento degli interessi. Come già detto, le tipologie di ammortamento sono le più svariate. Quelle più tradizionali e correnti possono venir sinteticamente così riassunte:
  - con rimborso unico dei titoli emessi e relativi interessi alla scadenza dell'operazione; titoli a "*zero coupon*";
  - con rimborso unico dei titoli emessi alle scadenze dell'operazione e pagamento periodico posticipato degli interessi attraverso lo stacco dal titolo di una delle cedole ad esso unite.

La "*cedola*" (*coupon*) rappresenta quindi la quota di interessi relativi all'obbligazione per un periodo determinato (titoli a "*cedola fissa*");

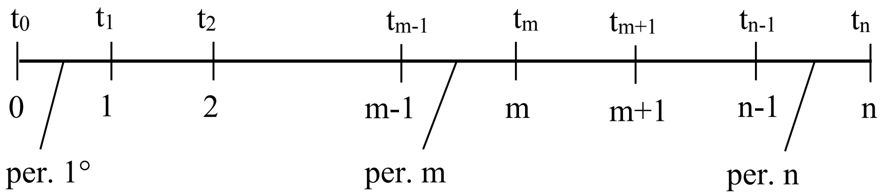
- con rimborso graduale dei titoli emessi, mediante sorteggio, a scadenze predeterminate ed a quote costanti o variabili, e pagamento periodico posticipato degli interessi per le obbligazioni ancora in vita;
- con rimborso graduale di quote capitale, costanti o variabili, su ogni titolo emesso e pagamento degli interessi sulle quote di capitale in vita.

Inoltre, nell'offerta al pubblico l'Ente emittente può riservarsi la facoltà di procedere al rimborso anticipato dei titoli senza alcuna detrazione per spese. Ed ancora, tale programma di emissione può anche prevedere l'indicizzazione del prestito, in relazione all'andamento di alcuni valori di riferimento.

- Il *Rendimento dell'obbligazione*, ossia il rapporto tra la quota degli interessi pagati dalla cedola ed il valore nominale del titolo. Il rendimento è generalmente calcolato sul periodo di un anno e corrisponde al "*tasso cedolare*" se la cedola è annuale. Altrimenti, se la cedola viene staccata ogni 3, 4, 6 … mesi il tasso cedolare verrà convertito in annuale. Per l'obbligazionista il tasso cedolare, fisso o variabile che sia, è ovviamente al netto di spese di gestione dell'operazione, ma al lordo dei tributi fiscali. Il "*rendimento netto*" dell'obbligazione terrà conto di queste detrazioni, ed inoltre, nel caso di rimborso graduale dei titoli mediante estrazioni a sorteggio, terrà pure conto della aleatorietà della vita del titolo stesso.
- Il *Regime fiscale* colpisce sia i *redditi da capitale* al momento del loro incasso, che le *plusvalenze* dei capitali stessi che i possessori eventualmente realizzano al rimborso o vendita dell'obbligazione. In Italia l'aliquota fiscale a questo titolo, e che indicheremo in seguito con "γ", è attualmente del 20%, salvo per i titoli di stato, per i quali è del 12,5%. Viene tenuto conto anche delle *minusvalenze* in un paniere personale dell'investitore, in somma algebrica con le *plus* e su un periodo di tempo limitato. Sono le Banche e gli Istituti di Credito che provvedono alla amministrazione di queste partite, anche mediante accrediti o addebiti nel mercato dei titoli, in qualità di *Sostituiti d'Imposta* per lo Stato.
- *Eventuali prerogative*, quali la garanzia dello Stato sull'emissione, la possibilità di convertire l'obbligazione in azioni dello stesso Emittente, la parificazione ad altre cartelle di credito, ed altre ancora.

6.3 La valutazione del prestito

Già all'inizio del capitolo 5° abbiamo fatto notare come l'equilibrio finanziario di un'operazione che mette in relazione di scambio un unico capitale iniziale C con una serie di importi R_k di segno opposto, distribuiti in un periodo di tempo determinato t_n e sulla base di un saggio di rimunerazione del capitale r, fosse così espresso in un momento qualunque t_m



$$(6.3.1)\quad M(t_m) = C \cdot m(t_0, t_m) - \sum_{0}^{m} {}_{k}R_k \cdot m(t_k, t_m) = \sum_{m+1}^{n} {}_{k}R_k \cdot s(t_k, t_m)$$

L'applicazione più comune di questa relazione viene fatta in regime di interesse composto, per le ormai note ragioni, oppure, solo se per tempi brevi, nei regimi lineari. In ogni caso, nell'ambito del *discreto* e non del *continuo*.

In merito alla valutazione dell'operazione, cui abbiamo già accennato alla premessa, va osservato come le posizioni dell'emittente debitore e degli obbligazionisti creditori siano ancora più distinte rispetto il caso dei prestiti indivisi. L'emittente gioca su termini certi; sa quanto capitale deve chiedere in prestito ed il termine di tempo per poterlo portare in ammortamento, conosce le spese iniziali per l'avvio dell'operazione e quelle periodiche per il pagamento delle cedole e per i rimborsi, ed ha di fronte una massa di potenziali creditori che costituiscono, per lui, un unico ente, al quale deve però assicurare un reddito effettivo non inferiore a quelli di operazioni analoghe in mercato. Da questo punto di vista sarà quindi importante il valore dell'operazione al suo inizio, cioè sinteticamente:

$$(6.3.2)\quad V_0 = C' = Nc' = \sum_{0}^{n} {}_{k}\left(R_k + N_k c'' + s_k\right) \cdot s(t_k, t_0)$$

in cui abbiamo indicato in *C'* il capitale effettivamente da ricevere in prestito (pari al numero di titoli emessi al prezzo di emissione), con R_k l'importo da pagare al termine del periodo *k* solamente per le cedole maturale, con $N_k c''$ il capitale da rimborsare pure al termine di *k*, e con s_k le spese previste e competenti all'Ente accumulate al termine di ogni periodo.

L'equilibrio dell'operazione, sempre per l'Emittente, si chiuderà con la definizione del tasso cedolare *r* e del tasso di valutazione *r'* in base al quale attualizzare le somme successivamente dovute. Il valore del prestito potrà così determinarsi anche in ogni momento successivo all'operazione, confrontando il tasso *r'* con l'andamento dei mercati; nel caso di *r'* = *r* quel valore sarà pari al *Debito residuo* già precisato ai parr. 5.1 e 5.5 del capitolo precedente a questo. Sarà invero possibile, anzi utile, distinguere in queste valutazioni le quote della *nuda proprietà* e dell'*usufrutto*.

Per l'obbligazionista creditore, preso singolarmente e non come massa, gli aspetti dell'operazione vengono valutati altrimenti. Anzitutto egli deve fare i conti con i tributi fiscali sia sulle cedole che sull'eventuale plusvalore del capitale da lui prestato. Ma, soprattutto, per il creditore singolo importa la redditività effettiva del titolo, e quindi la sua valutazione dell'operazione in un momento qualunque di essa, al fine di giudicare la convenienza di mantenersi nella stessa oppure di uscirne per latri impieghi del suo capitale. Queste valutazioni, basate comunque sulle quotazioni dei titoli in Borsa, non sono difficili per i titoli a cedola nulla e a cedola fissa, ma devono tener conto della aleatorietà del sorteggio nel caso di prestiti obbligazionari con ammortamento graduale. Sorge, in questi casi, l'opportunità di dare un giudizio sulla vita media e sulla sopravvivenza media dell'obbligazione.

Da questo punto di vista il valore del prestito in un momento qualunque t_m della sua vita operativa può venir calcolato attraverso l'attualizzazione delle prestazioni future del titolo, cioè delle somme che da un memento immediatamente successivo a t_m gli sono dovute, a scadenze t_k, in qualità di cedole e di rimborsi di capitale.

Indicando (così come nell'Appendice metodologica del Bollettino Statistico della Banca d'Italia) con $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_n$ le rate dovute al termine di ogni periodo *k* successivo a t_m, al possessore dell'obbligazione e comprendenti le somme anzidette, sarà

$$(6.3.3)\quad V(t_m) = \sum_{1}^{n}{}_{k} A_k (1 + r')^{-(t_k - t_m)}$$

ove sulle somme A_k va tenuto conto dei prelievi fiscali. Inoltre, se il momento t_m della valutazione non corrisponde con un momento di stacco cedolare, occorrerà pure imputare algebricamente la parte di cedola già precedentemente maturata ma non riscossa, cioè i cosiddetti "*dietimi d'interesse*" e la ritenuta fiscale su di essi.

Va osservato che, se nella (6.3.3) viene prefissato un tasso r' per scontare gli importi delle rate, l'espressione darà il valore cercato a quelle condizioni. Se invece quel valore si ritiene conosciuto, ad esempio come corrispondente al "*corso*", cioè al prezzo ufficiale del titolo in un giorno di Borsa (prezzo medio ponderato dei contratti conclusi su quel titolo), questo valore diventa il termine noto di un'equazione in cui l'incognita r' rappresenta il rendimento effettivo alla scadenza di quella obbligazione, da convertirsi in annuo se già non lo è.

Il calcolo per la risoluzione dell'equazione si basa solitamente su procedimenti iterativi, dei quali già si è dato cenno al par. 3.8, e che attualmente sono sviluppati da diversi softwares. Va però osservato come la (6.3.3) consideri tutta la progressione futura delle somme dovute al titolo nell'intera operazione finanziaria, e che pertanto il rendimento r' è da considerarsi come "*rendimento alla scadenza*" e non riferito a scadenze intermedie di detta operazione. Nel caso di prestiti con ammortamento graduale il possessore del titolo potrà ancora prendere atto di quel valore, ipotizzando però il reinvestimento, a tasso uguale, delle somme incassate prima del termine della durata dell'operazione. Oppure egli potrà, dopo ogni scadenza k, ricalcolare la redditività dei titoli sopravvissuti ancora con la (6.3.3), oppure con l'ipotesi di una sopravvivenza media, come si dirà in seguito.

Esamineremo nei paragrafi seguenti le tipologie più tradizionali delle operazioni finanziarie di cui si è detto, soprattutto dal punto di vista del creditore obbligazionista.

6.4 Prestito diviso in titoli con rimborso unico di capitali ed interessi

Sul mercato finanziario questi titoli vengono chiamati pure "*a cedola nulla*" oppure a "*zero coupon*". L'investitore compra un certo numero di titoli, ciascuno di valore nominale (detto anche valore facciale) "c", pagandolo, se all'emissione, ad un prezzo inferiore "c' " e riscuotendo il valore nominale alla scadenza. Ovviamente egli dovrà pagare il tributo fiscale sulla differenza c-c'; generalmente questa tassazione avviene all'origine, per cui il titolo può liberamente venir compravenduto successivamente senza oneri fiscali dei quali va però tenuto conto nella quotazione di mercato. Con queste caratteristiche, si tratta generalmente di prestiti di media – breve durata.

Esempio tipico di questo investimento in Italia sono i "*BOT – Buoni Ordinari del Tesoro*", emessi dalla Banca d'Italia ed aggiudicati tramite asta a Banche o Consorzi di Banche, che li immettono sul mercato aggiungendo al prezzo di aggiudicazione i loro diritti. I titoli hanno scadenza di 3, 6, 12 mesi e vengono solitamente emessi due volte al mese, con un valore nominale convenzionale di 100 unità monetarie ed un prezzo d'acquisto inferiore. L'onere fiscale colpisce il titolo all'origine, una volta per tutte, con un'aliquota fissa che attualmente è del 12,5% (in Italia) sul plusvalore che verrà realizzato al rimborso.

Ad esempio, per un titolo a 6 mesi, di valore facciale 100,00, emesso a 98,40 e quindi pagato dall'acquirente:

$$98{,}40 + (100{,}00 - 98{,}40) \cdot 0{,}125 = 98{,}60$$

il rendimento alla scadenza sarà

$$\frac{100{,}00 - 98{,}60}{98{,}60} = 0{,}0142 = 1{,}42\%$$

Tenuto conto di un anno commerciale di 360 giorni e di un regime di capitalizzazione composta (indicazioni metodologiche della Banca d'Italia per il mercato finanziario), il predeterminato valore corrisponde ad un interesse annuo equivalente (par. 2.10) del

$$r' = (1 + 0{,}0142)^2 - 1 = 0{,}0286 = 2{,}86\%$$

La valutazione del titolo in un momento interno della sua vita utile è immediata, se calcolata in regime lineare o composto ed al tasso di rendimento trovato. Dominante è però la sua quotazione sul mercato cosiddetto secondario, cioè il "*corso*" del titolo.

Va aggiunto che di questo tipo di titoli a cedola nulla ne vengono emessi anche di durata maggiore di un anno. Si tratta dei "*CTZ Certificati del Tesoro a zero coupon*" emessi dalla Banca d'Italia con valore facciale di 100 euro, e delle "*Obbligazioni a zero coupon*" emesse da Istituti privati, solitamente con scadenza a due anni e valore nominale di 1.000 euro. Per l'investitore gli interessi alla scadenza sono rappresentati dalla differenza tra il valore di rimborso (100% del valore nominale) ed il prezzo di emissione, al netto del prelievo fiscale. Nella composizione del prezzo di sottoscrizione è solitamente compreso pure l'onere per la gestione del rischio per il mantenimento delle condizioni di offerta. Per la valutazione di questi titoli le indicazioni metodologiche già citate segnano doversi tener conto di un anno di 365 giorni e sempre del regime a interesse composto.

6.5 Prestito diviso in titoli con rimborso unico del capitale alla scadenza e pagamento periodico degli interessi

E' una delle tipologie attualmente di maggior presenza sui mercati obbligazionari nazionali ed internazionali, fra le quali vogliamo citare i titoli di Stato denominati "*BTP Buoni del Tesoro Poliennali*". L'investitore acquista un certo numero di obbligazioni di valore nominale c = 100 (attualmente anche 1.000), emesse alla pari oppure sopra / sotto la pari; dopo l'emissione il prezzo ufficiale (il "*corso*") del titolo sarà dato dal mercato cosiddetto "*secondario*". Il titolo ha una scadenza alla quale verrà rimborsato, ancora alla pari o sopra / sotto, e dà diritto all'incasso di una cedola di interessi, pure a scadenza periodica fissa e posticipata (1, 2, 3, 4 volte all'anno) nonché costante oppure variabile. Il regime fiscale è quello già spiegato al par. 6.2, cioè colpisce le cedole al momento dell'incasso e l'eventuale plusvalore al momento del suo realizzo.

Nel caso del *prestito a tasso fisso* la performance, cioè il rendimento per l'investitore, se valutato su tutta la sua durata e quindi fino alla scadenza, non è difficile. Sulla base di quanto indicato sinteticamente nella 6.3.3 ed al lordo dei prelievi fiscali

$$
\begin{aligned}
V_0 &= c \cdot r \sum_{1}^{n}{}_k \left(1+r'\right)^{-k} + c''\left(1+r'\right)^{-n} = \\
&= c \cdot r \cdot \frac{1-\nu'^n}{r'} + c''\left(1+r'\right)^{-n} = U_0 + P_0
\end{aligned}
\tag{6.5.1}
$$

Come già si è detto a seguito della (6.3.3) queste espressioni possono venir utilizzate anche nel caso di valutazioni in tempi successivi all'emissione, prendendo in considerazione tutte le prestazioni del titolo da quel momento alla scadenza. Inoltre, se si vuole tener conto dei prelievi fiscali con aliquota γ, l'interesse cedolare sarà $c \cdot r(1-\gamma)$ ed il prezzo del rimborso $c''-(c''-c')\cdot\gamma$

È opportuno ricordare ancora che i saggi d'interesse *r*, *r'* sono riferiti al periodo temporale unitario di lunghezza *k*, non necessariamente annuale, ma che il risultato è convenzionalmente espresso come rendimento annuale.

Nel caso di compravendita in un momento interno della vita di questo tipo di titolo, occorrerà anzitutto leggerne il corso, e poi calcolare gli eventuali dietimi di interessi maturati, ma non riscossi con il relativo peso fiscale, e pure l'eventuale quota parte dello scarto o plusvalore del titolo, sempre con il competente prelievo fiscale. L'esempio proposto al paragrafo successivo 6.6 chiarirà l'algebra di questi importi.

Il caso dei *prestiti a tasso variabile* è stato già presentato al paragrafo 5.14 per i prestiti indivisi. Per i prestiti divisi in obbligazioni, il collegamento del tasso cedolare con indicatori interbancari (Euribor) o economici sono abbastanza frequenti, soprattutto in periodi di incertezza nei mercati finanziari. I prodotti offerti al pubblico sono solitamente di durata pluriennale non lunga, con emissione e rimborso alla pari, con un minimo ed un massimo per il tasso annuo lordo e l'indicizzazione di tale tasso ogni semestre. L'investitore potrà calcolare il rendimento minimo alla scadenza con le stesse modalità descritte per il tasso fisso. Inoltre, su alcune emissioni viene pure garantita la differenza massima (*spread*) fra il prezzo d'acquisto e quello di vendita nel caso che l'obbligazione venga venduta prima della sua scadenza.

6.6 Esempio di acquisto e vendita di pacchetto di obbligazioni a cedola fissa

Un prestito diviso in obbligazioni a cedola fissa viene emesso il 15 settembre 2008 con durata 5 anni – 1.826gg (5x365 + 1)e quindi scadenza il 15 settembre 2013. Il valore nominale dell'obbligazione è 100,00 con taglio fisso negoziabile di 100 titoli. La cedola è del 4,6% sul valor nominale, staccata annualmente, posticipata; prima cedola il 15/09/2009, ultima cedola il 15/09/2013. Prezzo di emissione 99,10. Rimborso alla pari. Aliquota fiscale del 12,5% su interessi e plusvalore, nell'ipotesi di titoli di stato.

Un taglio fisso di 100 titoli viene acquistato il 10 luglio 2009 alla quotazione di Borsa di 98,90 e venduto il 2 maggio 2010 alla quotazione di 100,15.

Si cerca il controvalore delle due operazioni ed il rendimento effettivo del titolo nel periodo di appartenenza all'obbligazionista.

Acquisto (10/07/2009)

Valore nominale: 10.000,00

Importo a quotazione: $100 \cdot 98{,}90 = 9.890{,}00$

Dietimi: 15/09/2008 – 10/07/2009, GG. 298, in addebito all'acquirente (escluso il 15)

$$\frac{298}{365} \cdot 0{,}046 \cdot 10.000{,}00 = 375{,}56$$

Imposta sui dietimi: in accredito all'acquirente: $0{,}125 \cdot 375{,}56 = 46{,}95$

Plusvalore: $100{,}00 - 99{,}10 = 0{,}90$ su GG. 1826

Scarto: 15/09/2008 – 10/07/2009, GG. 298 (escluso il 15)

Rateo di scarto: $0{,}90 \cdot \frac{298}{1826} = 0{,}1469$

Scarto su nominale: $0{,}1469\% \cdot 10.000{,}00 = 14{,}69$

Imposta su rateo: in accredito all'acquirente: $0{,}125 \cdot 14{,}69 = 1{,}84$

Controvalore dell'operazione: $9.890{,}00 + 375{,}56 - 46{,}95 - 1{,}84 = 10.216{,}77$

Vendita (12/05/2010)

Valore nominale: 10.000,00

Importo a quotazione: $100 \cdot 100{,}15 = 10.015{,}00$

Dietimi: 15/09/2009 – 12/05/2010, GG. 239, al venditore (è escluso il 15)

$$\frac{239}{365} \cdot 0{,}046 \cdot 10.000{,}00 = 301{,}21$$

Imposta sui dietimi: in addebito al venditore: $0{,}125 \cdot 301{,}21 = 37{,}65$

Plusvalore: $100{,}00 - 99{,}10 = 0{,}90$ su GG. 1826

Scarto: 15/09/2009 – 12/05/2010, 44.604 (escluso il 15)

Rateo scarto: $0{,}90 \cdot \frac{604}{1826} = 0{,}2977$

Scarto su nominale: $0{,}2977\% \cdot 10.000{,}00 = 29{,}77$

Imposta su rateo: in addebito al venditore $0{,}125 \cdot 29{,}77 = 3{,}72$

Controvalore dell'operazione: $10.015{,}00 + 301{,}21 - 37{,}65 - 3{,}72 = 10.274{,}84$

Osservazione

Ai controvalori delle due tipologie di operazioni vanno aggiunte le commissioni delle Banche o Istituti di Credito, che agiscono pure in qualità di sostituti d'imposta per le trattenute fiscali.

Rendimento

Periodo: 10/07/2009 – 12/05/2010 GG. 306 (escluso il 10 compreso il 12)

Bilancio:	acquisto	-10.216,77
	cedola 15/09/2009	+ 460,00
	imposta su cedola	-57,50
	vendita	+10.274,84
		+460,57

Rendimento netto: $\dfrac{460{,}57}{10.216{,}77} = 0{,}0451 = 4{,}51\%$

Resa annua equivalente:

a interesse semplice $0{,}0451 \cdot \dfrac{365}{306} = 0{,}0538 = 5{,}38\%$

a interesse composto $(1 + 0{,}0451)^{\frac{365}{306}} - 1 = 0{,}05403 = 5{,}40\%$

6.7 Prestito diviso in titoli con ammortamento graduale e rimborso dei titoli mediante sorteggio.

Questa tipologia prevede la restituzione del capitale in prestito attraverso il sorteggio di quote N_1, N_2, … N_k, … N_n (con $\sum N_k = N$) di obbligazioni al termine degli *n* periodi sui quali è programmata l’operazione. Alle stesse epoche vengono corrisposti gli interessi con lo stacco delle cedole sui titoli sorteggiati e su quelli rimasti in vita. Il numero delle obbligazioni estratte può essere costante, oppure variabile, con o senza legge. Il tasso cedolare è generalmente fisso.

Le principali forme di ammortamento del debito sono quelle già analizzate ai paragrafi 5.8 e seguenti per i prestiti indivisi. L’emissione avviene solitamente alla pari o sotto la pari ed il rimborso anche alla pari, con eventuale premio.

Per l’ente che avvia l’operazione e che, come già detto, guarda ad essa nel suo complesso, la valutazione del prestito in un epoca t_m, dopo l’emmesimo sorteggio, e con l’applicazione del tasso tecnico *r* e di un tasso di valutazione *r’*, potrà farsi secondo la (6.3.2), cioè

$$(6.7.1) \quad V_m = \sum_{m+1}^{n} {}_k \left(R_k + N_k \cdot c'' + s_k\right) \cdot \left(1 + r'\right)^{-(k-m)}$$

con un andamento di questo valore nel tempo operativo che dipende dalla progressione dell'ammortamento e dal saggio $r' \gtrless r$. Come già più volte detto, per $r' = r$ il valore V_m, al netto delle spese di gestione, rappresenta il debito residuo dell'ente nei confronti della massa degli obbligazionisti con titoli in vita.

L'obbligazionista, che conosce il piano di rimborso dei titoli, potrà valutare singolarmente ogni suo titolo (o gruppo di titoli, a seconda delle modalità del sorteggio) ipotizzandone la probabile sopravvivenza. Nell'ipotesi di una estrazione al primo sorteggio, il valore per lui del titolo all'origine sarà

$$(6.7.2) \quad V_0 = (c \cdot r + c'') \cdot (1 + r')^{-1}$$

con un tasso di valutazione r' di sua opinione oppure dedotto dalle quotazioni di Borsa.

Successivamente, in un momento t_m dopo l'emmesimo sorteggio e con riferimento ad un'epoca z al termine di una durata ipotetica del titolo, sarà, al lordo dei prelievi fiscali e con $m < z \leq n$

$$(6.7.3) \quad V_m(z) = c \cdot r \cdot \frac{1 - \nu'^{(z-m)}}{r'} + c'' \cdot (1 + r')^{-(z-m)}$$

espressione che, riferita all'origine dell'operazione, diventa

$$(6.7.4) \quad V_0(z) = c \cdot r \cdot \frac{1 - \nu'^{z}}{r'} + c'' \cdot \nu'^{z}$$

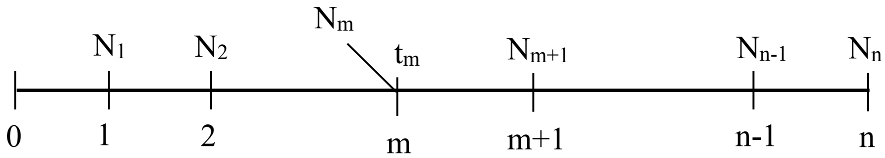
e che per rimborso alla pari e $r' = r$ dà $V_0 = c$, qualunque sia l'epoca z considerata, e per $r' \gtrless r$ dà pure $V_0 \lessgtr c$

6.8 Ipotesi sulla durata in vita dell'obbligazione.

L'obbligazionista che conosce il piano dei rimborsi di capitale dell'operazione, può ipotizzare in qualunque momento la durata della sua obbligazione ancora in vita (o gruppo di obbligazioni, a seconda della modalità dei sorteggi) attraverso semplici percorsi matematici, quali quelli di seguito esposti. Va precisato che in tutti i metodi tale durata risulta espressa in periodi o frazioni di essi, e solo in casi particolari scade nei momenti di sorteggio.

a) Vita media matematica

La speranza della durata in vita di una obbligazione, sopravvissuta all'emmesimo sorteggio (oppure all'origine), può valutarsi come media aritmetica di tutte le possibili ulteriori sue durate, pesate con il numero di titoli in scadenza al termine di ciascuna delle durate stesse.



Sarà quindi, essendo $\sum_{1}^{n}{}_k N_k = N =$ numero di obbligazioni emesse:

$$M_{A,0} = \left(N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 2 + ...N_k \cdot k + ...N_n \cdot n\right) : N$$

$$M_{A,m} = \left[N_{m+1} \cdot 1 + N_{m+2} \cdot 2 + ...N_n \cdot (n-m)\right] : \sum_{m+1}^{n}{}_k N_k$$

$$M_{A,n-1} = N_n \cdot 1 : N_m = 1$$

Quindi in generale

(6.8.1) $$M_{A,m} = \frac{1}{\sum_{m+1}^{n}{}_k N_k} \cdot \sum_{m+1}^{n}{}_k N_k \cdot (k-m)$$

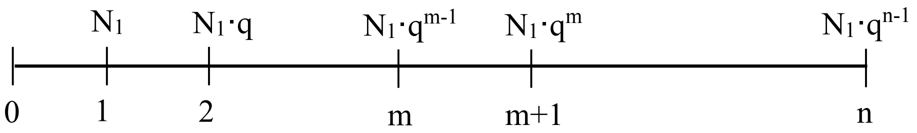
che, per N_k = costante $= \frac{N}{n} \rightarrow M_{A,m} = \frac{1}{n-m} \cdot \sum_{m+1}^{n}{}_k (k-m)$

e, per N_k = costante ed all'origine $M_{A,0} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}_k k$

b) Sopravvivenza media

Viene così definita la durata di una obbligazione dal momento t_m della valutazione all'epoca in cui la metà dei titoli cui essa appartiene sarà stata estratta e l'altra metà non ancora.

Ad esempio, nella tipologia di ammortamento del prestito a rate costanti, di cui si dirà al prossimo paragrafo e di cui già al par. 5.8, i numeri dei titoli estratti alla fine di ogni periodo sono.



Con il fattore di capitalizzazione q calcolato al tasso tecnico dell'operazione e con

$$N_1 = N \cdot \frac{r}{q^n - 1}$$

In questo caso valutata all'origine dell'operazione la sopravvivenza media scadrà al momento x in cui il capitale rimborsato sarà la metà di quello totale.

$$N_1 \cdot \frac{q^{x_0} - 1}{r} = \frac{1}{2} \cdot N_1 \frac{q^n - 1}{r} = \frac{1}{2} \cdot N$$

da cui $\quad x_0 = \dfrac{log\, 0{,}5 + log\left(q^n + 1\right)}{log\, q}$

ed in generale

(6.8.2) $\quad x_m = \dfrac{log\, 0{,}5 + log\left(q^{n-m} + 1\right)}{log\, q}$

dove l'ascissa x ha lo zero in m.

Si potrà osservare che in questo tipo di ammortamento del prestito, dipendente dal tasso tecnico di remunerazione del capitale, la sopravvivenza del titolo si allunga con l'aumentare del tasso, e viceversa. Per tasso nullo le quote di capitale rimborsato sono costanti, e si passa al caso seguente.

In un ammortamento a quote di capitale costante, di cui al prossimo paragrafo 6.10 e di cui già al par. 5.12, sarà ovviamente

$$\frac{N}{n} \cdot x_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot N \rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \cdot n$$

ed in generale

(6.8.3) $\quad x_m = \dfrac{1}{2} \cdot \left(n - m\right)$

c) Vita media finanziaria

Giova ricordare che già al par. 5.5 abbiamo rilevato come, in una operazione di prestito di capitali, sia di interesse del creditore conoscere in un momento t_m il valore residuo del prestito da lui fatto, ed in particolare la quota che abbiamo chiamato "*nuda proprietà del prestito*".

Ciò avviene attraverso l'attualizzazione delle quote di capitale che scadono dopo il momento considerato; tutto ciò ad un tasso *r'* generalmente differente da quello tecnico di remunerazione del capitale stesso.

Ricordiamo pertanto

$$P'_m = \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot c \cdot v'^{(k-m)}$$

Se raccogliamo tutte le quote capitale N_k dell'espressione precedente in t_m potremo calcolare una durata media virtuale della massa in termini di equilibrio finanziario e per unità di quota a prezzo di rimborso *c"* con la

$$(1+r')^{-x_m} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k = \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot (1+r')^{-(k-m)}$$

dove l'ascissa x ha lo zero in t_m, e da cui

$$\text{(6.8.4)} \quad x_m = \frac{log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k - log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot (1+r')^{-(k-m)}}{log(1+r')}$$

$$x_0 = \frac{log\, N - log \sum_{1}^{n} {}_k N_k \cdot (1+r')^{-k}}{log(1+r')}$$

e per N_k = costante = $\frac{N}{n}$

$$x_0 = \frac{log\, N - log \frac{N}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}_k (1+r')^{-k}}{log(1+r')}$$

d) Considerazioni

I tre modi operativi spiegati per la valutazione della durata aleatoria della vita di una obbligazione (e non sono i soli possibili) si fondano su ipotesi differenti e danno quindi risultati differenti. Gli esempi presentati nei prossimi paragrafi danno al lettore la possibilità di utili confronti. Va in ogni caso fatto osservare che i valori numerici determinati dagli algoritmi hanno maggior significato se ulteriormente mediati su pacchetti obbligazionari e non considerati su titoli singoli.

6.9 Prestito diviso in titoli con ammortamento graduale a rate periodiche, costanti, e rimborso dei titoli mediante sorteggio.

La tipologia dell'ammortamento è quella già analizzata per i prestiti indivisi al par. 5.8, al quale facciamo riferimento per le espressioni ivi determinate. L'Ente mutuatario emette un numero *N* di obbligazioni, ciascuna al valore nominale *c*, quindi per un capitale nominale *C* in prestito al tasso cedolare *r*, e su un tempo operativo totale di *n* periodi.

a) **Con emissione e rimborso alla pari**

Il piano di ammortamento del debito, con esclusione delle spese gestionali, prevede il pagamento di una rata costante, posticipata.

$$(6.9.1)\quad R = C \cdot \frac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = C \cdot \frac{r}{1 - v^n} = Q_i + Q_c$$

e, con riferimento alla prima rata

$$(6.9.2)\quad R = C \cdot r + C \frac{r}{q^n - 1} = N \cdot c \cdot r + N_1 \cdot c$$

essendo $N_1 = \frac{C}{c} \cdot \frac{r}{q^n - 1}$

il primo numero di obbligazioni restituite mediante sorteggio, ed essendo pure

$$N_2 = N_1 \cdot q\,; \qquad N_3 = N_1 \cdot q^2 \;\ldots\ldots\; N_n = N_1 \cdot q^{n-1}$$

nonché $\sum_1^n {}_k N_k = N$

Ovviamente, salvo casi eccezionali, il numero N_k delle obbligazioni da restituire non sarà un numero intero, per cui i decimali vanno accreditati al turno successivo.

Il debito residuo dopo la emmesima estrazione è

(6.9.3) $$D_{r,m} = R \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_{k}\nu^{(k-m)} = \sum_{m+1}^{n} {}_{k}N_{k} \cdot c = U_{m} + P_{m}$$

con $P_{m} = \sum_{m+1}^{n} {}_{k}N_{k} \cdot c \cdot \nu^{(k-m)}$ e $U_{m} = D_{r,m} - P_{m}$

La valutazione dell'operazione da parte dell'Ente mutuatario, ad un tasso differente da quello di rimunerazione del capitale preso in prestito, cioè con $r' \neq r$, può farsi in particolare utilizzando la formula di Makeham (par. 5.9), cioè con la

(6.9.4) $$V_{m} = D_{r,m} - \frac{r'-r}{r'} \cdot \left(D_{r,m} - P'_{m}\right)$$

dove $P'_{m} = \sum_{m+1}^{n} {}_{k}N_{k} \cdot c \cdot \nu'^{(k-m)}$

ed in particolare, nella fase di programmazione dell'operazione, con la

(6.9.5) $$V_{0} = C - \frac{r'-r}{r'} \cdot \left(C - P'_{0}\right)$$

Dall'esame del possibile andamento del valore residuo del prestito in relazione ai tassi di mercato, l'emittente potrà giudicare su un valore di acquisto dell'obbligazione differente da quello nominale. Ad esempio, se l'Ente prevede che il tasso di mercato possa mantenersi superiore a quello tecnico del prestito, potrà emettere l'obbligazione sotto la pari, favorendo così i tempi di assorbimento del prestito. Il caso opposto è inconsueto.

Ad esempio, per un prestito C = 1.000.000,00 in qualunque valuta, diviso in N = 10.000 obbligazioni di valore nominale c = 100,00, con emissione e rimborso alla pari, e quindi con il valore teorico della rata d'ammortamento su n = 5 periodi, costante e posticipata, R = 230.974,80, il piano di ammortamento con un tasso periodale tecnico r = 0,05, ma anche con valutazione di confronto con r' = 0,04 e 0,06, sarà

Scadenza	N_k Numero titoli a rimborso	$D_{r,m}$ Debito residuo con r = 0,05	V_m Valore residuo con r’ = 0,04	V_m Valore residuo con r’ = 0,06
0		1.000.000,00	1.028.260,724	972.948,021
1	1.809	819.100,000	838.491,532	800.424,903
2	1.900	629.100,000	671.075,799	617.495,397
3	1.996	429.500,000	435.663,831	423.490,121
4	2.095	220.000,000	222.115,384	217.924,528
5	2.200	0,000	0,000	0,000

Si noterà, come già più volte detto, che con r’ <> r il valore residue risulta >< del corrispondente debito residuo.

La geometria dell’ammortamento dell’operazione è ancora quella della Fig. 30 del par. 5.8.

L’obbligazionista, invece, osserva anzitutto l’andamento del mercato cosiddetto secondario per il suo titolo, ed è interessato alla sua scadenza teorica, in particolare se l’emissione è stata sotto la pari o con premio di rimborso.

Riferendoci all’esempio precedente, la speranza della durata in vita di una obbligazione (oppure la speranza della sua estrazione) riferita all’emissione dell’operazione oppure ad un momento successivo ad ogni scadenza sarà come di seguito, in unità e decimali di un periodo con troncamento dei risultati al terzo decimale, e nelle tre ipotesi del paragrafo precedente.

a) Media matematica	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
r = 0,05	3,097	2,560	2,032	1,512	1,000

b) Sopravvivenza media	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
r = 0,05	2,652	2,047	2,554	1,024	0,506

c) Media finanziaria	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
r = 0,05 ; r' = 0,04	3,058	2,536	2,019	1,507	1,000
r = 0,05 ; r' = 0,05	3,048	2,530	2,016	1,506	1,000
r = 0,05 ; r' = 0,06	3,039	2,524	2,013	1,504	1,000

b) **Con emissione sotto la pari**

Quando il prezzo di emissione di una obbligazione *c'* è inferiore al valore nominale *c* il piano dell'operazione non cambia rispetto l'emissione alla pari, in quanto l'Ente mutuatario dovrà sempre rimborsare un capitale $C = N \cdot c$ al tasso *r* convenuto. L'Ente dovrà però considerare che riceverà in prestito un capitale $C' = N \cdot c'$ inferiore al capitale nominale *C* e che pertanto ha contratto un prestito non al tasso *r* bensì ad un tasso *r'* maggiore, risultante dalla

$$(6.9.6) \quad R = C\frac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = C'\frac{r' \cdot q'^n}{q'^n - 1} = C' \cdot \frac{r'}{1 - v'^n}$$

dove *R* è la rata costante, posticipata, determinata dall'espressione (6.9.1), e dove non si confonda il simbolo *r'* con l'analogo usato al sottoparagrafo a) per i tassi di valutazione del prestito.

Matematicamente il tasso *r'* può venir determinato senza sensibile errore con metodi iterativi oppure di interpolazione lineare, quali quelli illustrati al par. 3.8. Nell'esempio già presentato per l'emissione alla pari, se il titolo viene acquistato all'origine con c' = 98,00, l'Ente mutuatario avrà a disposizione un capitale C' = 980.000,00 e dovrà comunque corrispondere una rata costante R = 230.974,80 al termine di cinque periodi consecutivi, per cui, utilizzando il metodo di progressivo bilanciamento, si ottiene r'=0,05735. Cioè il costo del prestito per l'Ente sarà del 5,735% oltre alle spese di gestione.

Per l'obbligazionista, invece, il rendimento del titolo è anzitutto maggiore del tasso cedolare per la differenza del prezzo d'acquisto rispetto il valore nominale, e poi per la realizzazione di tale differenza al rimborso del titolo. Questo secondo addendo può venir valutato come una annualità virtuale costituente l'accumulazione *c-c'* al momento del sorteggio. Sarà quindi, per il possessore del titolo

(6.9.7) $\quad r' = r \cdot \dfrac{c}{c'} + \dfrac{c-c'}{c'} \cdot \dfrac{r}{q^k - 1}$ con k = 1, 2, …n

Ancora con riferimento al nostro esempio, il rendimento periodico del titolo, così calcolato, passerà dal 7,143% se estratto al primo sorteggio, al 6,098% se estratto al secondo, al 5,749% se al terzo, al 5,576% se al quarto sorteggio, ed infine al 5,471% se rimasto in vita fino al termine dell'operazione.

Va pure ricordato che, con la tipologia di ammortamento esaminata in questo paragrafo, la probabilità di un titolo di venir estratto ad un qualunque sorteggio è uguale a

(6.9.8) $\quad \dfrac{N_m}{\sum_m^n {}_k N_k}$ con m = 1, 2, …n

che, sempre nel nostro esempio, porta alla successione del 18,090%, 23,196%, 31,727%, 48,777%, 100,00%.

L'andamento del valore della obbligazione (senza riferimenti alle quotazioni di mercato), cioè il suo "corso" che dal prezzo di emissione *c'* passa al prezzo di rimborso *c* attraverso *n* periodi, può venir calcolato utilizzando il combinato delle (6.9.1) e (6.9.6), cioè

$$Nc\frac{r}{1-\nu^n} = Nc'\frac{r'}{1-\nu'^n} \qquad \text{da cui} \qquad c' = c\frac{r}{1-\nu^n} \cdot \frac{1-\nu'^n}{r'}$$

e più in generale, dopo la m-esima estrazione

(6.9.9) $\quad c'_m = c\dfrac{r}{1-\nu^{(n-m)}} \cdot \dfrac{1-\nu'^{(n-m)}}{r'}$

con r' = il tasso effettivo dell'operazione (6.9.6), che nel nostro esempio abbiamo calcolato in 5,735%. Con l'applicazione di questo valore si ottiene la successione dei valori correnti

98.00 (prezzo di emissione) – 98,32 – 98,64 – 98,97 – 99,30 – 100,00 (prezzo di rimborso)

c) **Modalità di rimborso**

Nei due casi precedenti, tradizionalmente usuali, si è ipotizzato che il rimborso del titolo venga dato alla pari, cioè che a venir pagato all'estrazione sia il valore nominale. Altre volte, con l'emissione alla pari, il rimborso avviene sopra la pari, oppure con premi in aggiunta ai rimborsi, anche differenziati da sorteggio a sorteggio, oppure sorteggiati pure essi.

Ovviamente trattasi di incentivi indirizzati a favorire l'assorbimento iniziale del prestito. Il piano generale dell'ammortamento del debito non cambia, ma al debito residuo vanno aggiunte le quote dei premi. La valutazione dei tassi effettivi del prestito, sia per l'Ente mutuatario che per l'obbligazionista, potrà condursi similmente a quanto già operato in questo paragrafo ad a) e b).

6.10 Prestito diviso in titoli con ammortamento graduale a quote capitale periodiche, costanti, e rimborso dei titoli mediante sorteggio.

Facciamo riferimento a quanto già esposto al par. 5.12 per i prestiti indivisi. Con questa tipologia il piano di ammortamento del debito, con esclusione delle spese gestionali, prevede la restituzione posticipata di una quota costante di capitale, e quindi di titoli, nonché la corresponsione degli interessi sui titoli estratti e su quelli rimasti ancora in vita.

Pertanto, nel caso più generale di emissione e rimborso alla pari, sarà

(6.10.1) $Q_{c,m} = Q_c = \frac{C}{n} = c\frac{N}{n}$

Il debito residuo dopo la emmesima estrazione è

(6.10.2) $D_{r,m} = (n-m) \cdot Q_c = \frac{n-m}{n} \cdot C = \frac{n-m}{n} \cdot c \cdot N$

con m = 0, 1, 2, …, n

Le quote interessi, da pagare con la emmesima estrazione,

(6.10.3) $Q_{i,m} = D_{r,m-1} \cdot r = C \cdot r \frac{n-m+1}{n} = c \cdot N \cdot r \frac{n-m+1}{n}$

con m = 1, 2, …, n

diminuiscono con le scadenze in progressione aritmetica di ragione $c\frac{N}{n} \cdot r$

In definitiva

(6.10.4) $R_m = Q_c + Q_{i,m} = C\frac{N}{n} + c \cdot r \frac{n-m+1}{n}$

riferendoci all'esempio del paragrafo precedente, cioè per un prestito C = 1.000.000,00, con N = 10.000, n = 5, r = 5%, c = c' = c'' = 100,00, la quota capitale da restituire ad ogni estinzione è di 2000 titoli, e le rate (comprensive anche degli interessi) passano da un valore di 250.000,00 alla prima estrazione, a 210.000,00 all'ultima scadenza, in progressione aritmetica.

Il calcolo del valor residuo dell'operazione dopo ogni scadenza, ma ad un tasso *r'* differente da quello tecnico contrattuale, può farsi con la (5.12.8) oppure individuando la nuda proprietà del debito ed utilizzando la formula di Makeham (5.9.3) oppure (5.9.4).

Scadenza	N_k Numero titoli a rimborso	$D_{r,m}$ Debito residuo con r = 0,05	V_m Valore residuo con r' = 0,04	V_m Valore residuo con r' = 0,06
0		1.000.000,000	1.027.408,883	973.745,459
1	2.000	800.000,000	818.505,238	782.170,187
2	2.000	600.000,000	611.245,448	589.100,398
3	2.000	400.000,000	405.695,256	394.446,422
4	2.000	200.000,000	201.923,076	198.113,207
5	2.000	0,000	0,000	0,000

Si osserva ancora che per r' >< r segue V_m < > $D_{r,m}$.

Non sarà difficile per l'attento lettore di questi *Elementi* valutare la durata in vita (aleatoria) delle obbligazioni di cui all'esempio precedente, secondo le ipotesi già descritte nel par. 6.8 ed in analogia con quanto esposto al paragrafo precedente.

Pure per quanto riguarda la "*Emissione sotto la pari*" valgono le considerazioni fatte nel caso precedente, sull'ammortamento a rate costanti. L'Ente mutuatario avrà a disposizione, fin dall'inizio dell'operazione, un capitale inferiore a quello nominale, cioè dovrà pagare il denaro in prestito ad un tasso *r'* maggiore di quello convenuto sul valore nominale dell'obbligazione, data dalla

$$r \cdot c = r' \cdot c'$$

Ciò capita pure nel caso di emissione alla pari, ma rimborso sopra la pari oppure con premio, con la differenza che in tal caso l'Ente ha a disposizione l'intero capitale *C* fin dall'inizio, ma deve preoccuparsi di dover restituire un capitale C" > C.

Per l'obbligazionista valgono pure le considerazioni di cui ad b) del paragrafo precedente. Oltre al rendimento maggiore di cui sopra, egli percepisce la differenza fra il valore nominale e quello di emissione (o fra quello di rimborso e quello di emissione), che si potrà valutare ancora con l'espressione (6.9.7).

Sono certamente possibili, anche se inusuali, combinazioni fra le due tipologie di "*Offerta al pubblico*" sopra descritte.

6.11 Prestito diviso in titoli con ammortamento mediante rimborso graduale di quote capitale su ogni titolo.

Il piano di ammortamento del debito è, per l'Ente mutuatario, sostanzialmente analogo a quello del paragrafo precedente 6.10. Le quote capitale restituite al termine di ogni periodo contrattuale sono costanti, ma anziché sorteggiare un numero di titoli corrispondente a quell'importo, la quota viene suddivisa fra tutti i titoli, che pertanto vengono rimborsati per un ennesimo ad ogni scadenza. Va di conseguenza il calcolo degli interessi sulle quote in scadenza e su quelle rimaste in vita. Lo strumento, rivolto in particolare ad un investitore domestico, è generalmente a tasso fisso, in tempi limitati a pochi anni, con scadenze di rimborso a frequenza semestrale o annuale, e con nessuna differenza fra prezzo di acquisto e di rimborso. Il tasso per l'obbligazionista è pure solitamente buono, talché sul mercato secondario il titolo è spesso sopra la pari. Alcune emissioni prevedono pure un premio di rimborso, assegnato anch'esso in quote.

Con riferimento all'esempio trattato al paragrafo precedente, nulla cambia, come si è già detto, sul paino di ammortamento e sui valori residui, salvo che ad ogni scadenza verrà rimborsato il 20% del valore di ogni obbligazione.

6.12 Esempio di prestito diviso in titoli con caratteristiche particolari.

Il titolo obbligazionario ha le seguenti caratteristiche:

Data di emissione: 01.10.2011

Data di scadenza: 01.10.2016

Valore nominale: 1.000,00

Prezzo di sottoscrizione: 975,00

Modalità di rimborso: ogni titolo verrà rimborsato alla pari con il valore nominale in due quote uguali, rispettivamente il 1° ottobre 2015 ed il 1°

	ottobre 2016, con presentazione di un tagliando unito al titolo per al prima quota, e del titolo stesso per la seconda quota.
Cedole annue:	a tasso fisso del 4,5% sul valore nominale per le cedole pagabili il 1/10/2012 – 1/10/2013 – 1/10/2014 – 1/10/2015, ed a tasso fisso del 4,5% sulla metà del valore nominale per la cedola in scadenza con il titolo il 1/10/2016.
Regime fiscale:	salvo modifiche di legge nel corso dell'operazione, sull'importo delle cedole e sulle differenze fra il prezzo di rimborso e quello di sottoscrizione del titolo, viene effettuato un prelievo per l'applicazione dell'imposta fiscale sostitutiva nella misura attualmente vigente del 20,0%, misura attualmente vigente in Italia per titoli non di Stato.
Altre prerogative:	varie

Costo del capitale in prestito per l'Ente emittente, al netto delle spese di gestione dell'operazione:

$$r' = 0{,}045 \cdot \frac{1.000}{975} \cdot 0{,}0461 = 4{,}61\%$$

Rendimento effettivo del titolo per l'obbligazionista che sottoscrive il titolo alla emissione e lo detiene fino alla scadenza dell'operazione, al netto del prelievo fiscale

$$r' = 0{,}045 \cdot \frac{1.000}{975} \cdot 0{,}80 + \frac{1.000 - 975}{975} \cdot \frac{0{,}045}{1{,}045^{4,5} - 1} \cdot 0{,}80 =$$
$$= 0{,}03692 + 0{,}004213 = 0{,}04113 = 4{,}11\%$$

6.13 Conclusioni.

Come già indicato all'inizio, in questo capitolo abbiamo esaminato le tipologie più tradizionali dei prestiti di capitali divisi in obbligazioni. Attualmente i prodotti lanciati sul mercato dagli Emittenti, in particolare da gruppi di Banche ed Istituti di Credito, per ragioni legate alle attuali condizioni di mercato propongono soprattutto tempi operativi non lunghi, strumenti a zero coupon o one coupon, rimborsi graduali del titolo, e tassi variabili collegati con quotazioni internazionali e con minimo e massimo.

Il lettore di questi *Elementi* non avrà certamente difficoltà nell'esame e valutazione di ogni operazione finanziaria.

Capitolo 6°

ESERCIZI E QUESITI RISOLTI

1 - Un BOT di valore nominale 100,00 e scadenza a 12 mesi viene pagato all'emissione 97,80 al netto del prelievo fiscale. Calcolare il rendimento alla scadenza ed il valore del titolo a tale tasso dopo 8 mesi della sua vita utile. Applicare sia il regime ad interesse semplice che a interesse composto.

$$r = \frac{100{,}00 - 97{,}80}{97{,}80} = 0{,}02249$$

$$V(8\text{ mesi})\text{ a i.s.} = 97{,}80 \cdot \left(1 + \frac{8}{12} \cdot r\right) = 99{,}266$$

$$V(8\text{ mesi})\text{ a i.c.} = 97{,}80 \cdot (1 + r)^{8/12} = 99{,}261$$

2 - Una obbligazione a zero coupon viene emessa al 97,4% del valore nominale, con scadenza a 2 anni. Calcolare il rendimento annuo equivalente, al netto di una aliquota fiscale del 12,5%, per un investitore che possiede il titolo dalla sottoscrizione alla scadenza, sia in regime di interesse semplice che di interesse composto.

$c = 100{,}00$; $c' = 97{,}40$

$$c' + (c - c') \cdot 0{,}125 = 97{,}725$$

$$r\text{, a i.s.} = \frac{100{,}00 - 97{,}725}{97{,}725 \cdot 2} = 0{,}01164 = 1{,}164\%$$

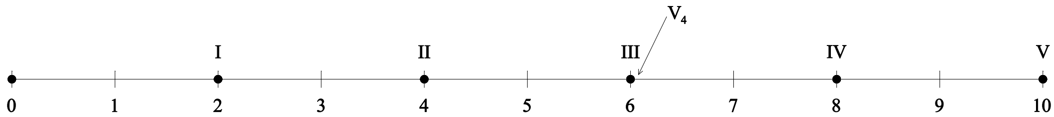
$$97{,}725 \cdot (1 + r')^2 = 100{,}00$$

$$r\text{, a i.c.} = \left(\frac{100{,}00}{97{,}725}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}01157 = 1{,}157\%$$

3 - Una obbligazione di valore nominale 100,00 viene emessa al prezzo 98,00. La durata è quinquennale e la cedola è semestrale, costante, pari al 2,0% del valore nominale. L'aliquota fiscale è del 12,5%. Un investitore che sottoscrive il titolo alla emissione e

lo possiede fino alla scadenza ne vuole conoscere il valore residuo all'inizio del quarto anno, dopo l'incasso della sesta cedola, calcolato al tasso cedolare.

$$c = c'' = 100{,}00 \qquad ; \qquad c' = 98{,}00$$



$$V_m = \left[c \cdot r \cdot (1{,}0 - 0{,}125) \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_k (1+r)^{-k} \right] + \left[c'' - (c'' - c') \cdot 0{,}125 \right] \cdot (1+r)^{-(n-k)}$$

$$\begin{aligned} V_4 = & \left[100{,}00 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}875 \cdot \left(1{,}02^{-1} + 1{,}02^{-2} + 1{,}02^{-3} + 1{,}02^{-4}\right)\right] + \\ & + \left[100{,}00 - (100{,}00 - 98{,}00) \cdot 0{,}125\right] \cdot 1{,}02^{-4} = 98{,}817 \end{aligned}$$

4 - Il possessore del titolo di cui all'esercizio precedente ne vuol conoscere il valore sempre all'inizio del quarto anno, ma ad un tasso di sconto del 10% superiore a quello cedolare. Cosa si osserva?

$$\begin{aligned} V_4' = & 100{,}00 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1{,}022^4 - 1}{0{,}022 \cdot 1{,}022^4} \cdot (1{,}0 - 0{,}125) + \\ & + \left[100{,}00 - (100{,}00 - 98{,}00) \cdot 0{,}125\right] \cdot 1{,}022^{-4} = 98{,}065 \end{aligned}$$

Si osserva che ad un aumento del tasso di sconto corrisponde una diminuzione del valore capitale.

5 - Il possessore dell'obbligazione di cui all'esercizio precedente vuole conoscere il valore del titolo sempre all'inizio del quarto anno, ma ad un tasso di sconto del 10% inferiore a quello cedolare. Che cosa si osserva?

$$\begin{aligned} V_4' = & 100{,}00 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1{,}018^4 - 1}{0{,}018 \cdot 1{,}018^4} \cdot (1{,}0 - 0{,}125) + \\ & + \left[100{,}00 - (100{,}00 - 98{,}00) \cdot 0{,}125\right] \cdot 1{,}018^{-4} = 99{,}575 \end{aligned}$$

Si osserva che ad una diminuzione del tasso di sconto corrisponde un aumento del valore capitale.

6 - Un prestito diviso in titoli con ammortamento graduale, per un capitale nominale C = 10 10^6 viene emesso alla pari, con rimborso alla pari, con obbligazioni di valore c = 100,00. La durata dell'operazione è di anni 8, il tasso cedolare è del 5%, il sorteggio dei titoli è annuale posticipato. Calcolare la rata costante, il numero di obbligazioni estratte al termine del 4° anno ed il debito residuo in quantità di titoli da rimborsare dopo tale epoca.

$$R = 10 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 1{,}05^8}{1{,}05^8 - 1} = 1.547.218{,}136$$

$$Q_{c,4} = 10 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^8 - 1} \cdot 1{,}05^3 = 1.212.285{,}895$$

$$N_4 = \frac{Q_{c,4}}{100} = 12.123$$

$$D_{r,4} = R \cdot \frac{1 - v^{(n-m)}}{r} = R \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-4}}{0{,}05} = 5.486.358{,}929$$

$$\sum_5^8 {}_k N_k = \frac{D_{r,4}}{100} = 54.864$$

7 - Il prestito di cui all'esercizio precedente viene emesso sotto la pari, al prezzo c' = 98,00 per ogni titolo, con rimborso alla pari. Calcolare l'interesse effettivo (salvo le spese di gestione) sostenuto dall'Ente mutuatario per l'operazione. Calcolare l'interesse effettivo all'obbligazionista da un titolo estratto al termine del 6° anno, valutato con l'ipotesi della annualità fittizia.

<u>Interesse effettivo per l'Ente mutuatario</u> (vedi annualità – formule inverse)

$$c = c'' = 100{,}00\ ; \qquad c' = 98{,}00\ ; \qquad N = 100 \cdot 10^3\ ; \qquad C = 10 \cdot 10^6$$

$$R = C \cdot \frac{r \cdot q^n}{q^n - 1} = 1.547.218{,}136 = 9{,}8 \cdot 10^6 \cdot \frac{r' \cdot q'^8}{q'^8 - 1}$$

$$\frac{9.800.000}{1.547.218{,}136} = 6.33395 = S_0 = \frac{1-\nu'^8}{r'}$$

$$r' = \frac{1}{S_0} \cdot \left(1-\nu'^8\right) = 0{,}157879 \cdot \left(1-\nu'^8\right)$$

$$h = \left(\frac{8}{S_0}\right)^{\frac{2}{8+1}} - 1 = 0{,}0532628$$

$$r' = h \cdot \frac{12 - 7 \cdot h}{12 - 2 \cdot 7 \cdot h} = 0{,}0550273$$

$$R = 9{,}8 \cdot 10^6 \cdot \frac{r' \cdot q'^8}{q'^8 - 1} = 1.547.191{,}077 \qquad \text{valore accettabile}$$

<u>Interesse effettivo (al lordo della ritenuta fiscale) per l'obbligazionista estratto al termine del 6° anno</u>

$$r = 0{,}05 \cdot \frac{100}{98} + \frac{100-98}{98} \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^6 - 1} = 0{,}05402$$

8 - Un prestito viene emesso attraverso 10.000 obbligazioni di valore nominale 100,00. L'emissione è alla pari, con rimborso alla pari. Il rimborso è graduale, a quote di capitale costanti, al termine di cinque periodi annuali. Gli interessi sul valore nominale sono del 5,0%. Calcolare la vita media delle obbligazioni all'origine e dopo le quattro scadenze successive, con l'ipotesi della vita media matematica.

$$M_{A,m} = \frac{1}{n-m} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_{k}(k-m)$$

Per m = 0 $\qquad M_A = \frac{1}{5} \cdot (1+2+3+4+5) = 3{,}00$

Per m = 1 $\qquad M_A = \frac{1}{4} \cdot (1+2+3+4) = 2{,}50$

Per m = 2 $\qquad M_A = \frac{1}{3} \cdot (1+2+3) = 2{,}00$

Per m = 3 $\qquad M_A = \frac{1}{2} \cdot (1+2) = 1{,}50$

Per m = 4 $\qquad M_A = 1{,}00$

9 - Con riferimento al quesito precedente calcolare la sopravvivenza media delle obbligazioni all'origine dell'operazione e dopo le quattro scadenze successive.

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot (n - m)$$

$$x_0 = \frac{5}{2} = 2,50; \qquad x_1 = \frac{4}{2} = 2,00; \qquad x_2 = \frac{3}{2} = 1,50;$$

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1,00; \qquad x_4 = \frac{1}{2} = 0,50$$

10 – Con riferimento al testo dei due quesiti precedenti calcolare la vita media finanziaria delle obbligazioni all'origine dell'operazione e dopo le quattro scadenze successive, al tasso di remunerazione del capitale del 5,0%.

$$C = C' = C''; \quad n = 5; \quad N = 10.000; \quad N_k = \frac{N}{n} = 2.000 = \cos t.; \qquad r' = 0,05$$

$$x_m = \frac{\log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k - \log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot (1 + r')^{-(k-m)}}{\log(1 + r')}$$

$$x_0 = \{\log 10.000 - \log[2.000 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2} + 1,05^{-3} + 1,05^{-4} + 1,05^{-5})]\} \cdot (\log 1,05)^{-1} = 2,951$$

$$x_1 = \{\log 8.000 - \log[2.000 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2} + 1,05^{-3} + 1,05^{-4})]\} \cdot (\log 1,05)^{-1} = 2,469$$

$$x_2 = \{\log 6.000 - \log[2.000 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2} + 1,05^{-3})]\} \cdot (\log 1,05)^{-1} = 1,983$$

$$x_3 = \{\log 4.000 - \log[2.000 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2})]\} \cdot (\log 1,05)^{-1} = 1,493$$

$$x_4 = \{\log 2.000 - \log[2.000 \cdot (1,05^{-1})]\} \cdot (\log 1,05)^{-1} = 1,000$$

11 – Con riferimento al testo dei quesiti precedenti calcolare la vita media finanziaria delle obbligazioni all'origine dell'operazione e dopo le quattro scadenze successive al tasso di valutazione del capitale del 4,0%.

$$C = C' = C''; \quad n = 5; \quad N = 10.000; \quad N_k = \frac{N}{n} = 2.000 = \cos t.; \qquad r' = 0{,}04$$

$$x_m = \frac{\log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k - \log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot (1 + r')^{-(k-m)}}{\log(1 + r')}$$

$$x_0 = \left\{ \log 10.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{1}^{5} {}_k (1 + 0{,}04)^{-k} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}04)^{-1} = 2{,}960$$

$$x_1 = \left\{ \log 8.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{2}^{5} {}_k (1 + 0{,}04)^{-(k-1)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}04)^{-1} = 2{,}475$$

$$x_2 = \left\{ \log 6.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{3}^{5} {}_k (1 + 0{,}04)^{-(k-2)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}04)^{-1} = 1{,}986$$

$$x_3 = \left\{ \log 4.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{4}^{5} {}_k (1 + 0{,}04)^{-(k-3)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}04)^{-1} = 1{,}475$$

$$x_4 = \left\{ \log 2.000 - \log \left[2.000 \cdot (1 + 0{,}04)^{-1} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}04)^{-1} = 1{,}000$$

12 – Con riferimento al testo dei quesiti precedenti calcolare la vita media finanziaria delle obbligazioni all'origine dell'operazione e dopo le quattro scadenze successive al tasso di valutazione del capitale del 6,0%.

$$C = C' = C''; \quad n = 5; \quad N = 10.000; \quad N_k = \frac{N}{n} = 2.000 = \cos t.; \qquad r' = 0{,}06$$

$$x_m = \frac{\log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k - \log \sum_{m+1}^{n} {}_k N_k \cdot (1 + r')^{-(k-m)}}{\log(1 + r')}$$

$$x_0 = \left\{ \log 10.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{1}^{5} {}_k (1 + 0{,}06)^{-k} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}06)^{-1} = 2{,}941$$

$$x_1 = \left\{ \log 8.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{2}^{5} {}_k (1 + 0{,}06)^{-(k-1)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}06)^{-1} = 2{,}463$$

$$x_2 = \left\{ \log 6.000 - \log \left[2.000 \cdot \sum_{3}^{5} {}_k (1 + 0{,}06)^{-(k-2)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}06)^{-1} = 1{,}980$$

$$x_3 = \left\{ \log 4.000 - \log\left[2.000 \cdot \sum_{4}^{5} {}_k (1+0{,}06)^{-(k-3)} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}06)^{-1} = 1{,}492$$

$$x_4 = \left\{ \log 2.000 - \log\left[2.000 \cdot (1+0{,}06)^{-1} \right] \right\} \cdot (\log 1{,}06)^{-1} = 1{,}000$$

13 – Un prestito viene emesso attraverso 10.000 obbligazioni di valore nominale 100,00. L'emissione è alla pari con rimborso alla pari e con tasso cedolare del 5,0% annuo. L'operazione è prevista in sei anni, con ammortamento graduale a rate posticipate crescenti in progressione aritmetica, e con la prima rata coprente solamente gli interessi cedolari. Organizzare il piano di restituzione dei titoli e calcolare il numero dei titoli che saranno sorteggiati al termine del quarto anno dell'operazione ed il numero dei titoli residui dopo tale sorteggio.

$$c = 10.000 \cdot 100 = 10 \cdot 10^5; \quad c = c' = c'' = 100{,}00; \quad N = 10 \cdot 10^3; \quad n = 6; \quad r = 0{,}05$$

$$R_1 = c \cdot r = 10 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05 = 50.000{,}00$$

$$d = \frac{R_1 \cdot r}{q^n - 1 - n \cdot r} = \frac{50.000 \cdot 0{,}05}{1{,}05^6 - 1 - 6 \cdot 0{,}05} = 62.350{,}9174$$

$$D_{r,3} = R_4 \cdot \nu + R_5 \cdot \nu^2 + R_6 \cdot \nu^3 =$$
$$= (50.000 + 3 \cdot d) \cdot \nu + (50.000 + 4 \cdot d) \cdot \nu^2 + (50.000 + 5 \cdot d) \cdot \nu^3 = 809.829{,}6939$$

$$Q_{c,4} = R_4 - D_{r,3} \cdot r = 50.000{,}00 + 3 \cdot d - D_{r,3} \cdot 0{,}05 = 196.561{,}267$$

$$N_4 = 1.966$$

$$\text{Titoli residui dopo la 4}^{a}\text{ estrazione } = \frac{D_{r,3}}{100} - 1.966 = 6.133$$