

# MASSA DI DIRAC E DI MAJORANA

[DGH.1.3]

Il termine di massa di Dirac  $e^-$  formato con due fermioni di Weyl di chiralità opposta:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) = -m_D \bar{\Psi} \Psi$$

$\Psi = \psi_L + \psi_R$

Questo  $e^-$  invariante sotto trasformazioni  $U(1)_V$

$$\psi_{L,R} \rightarrow e^{i\alpha} \psi_{L,R}, \quad \text{ovvero} \quad \Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi.$$

La carica conservata associata  $e^-$  il "numero fermionico".

Il numero barionico ed il numero leptonico sono esempi espliciti di questo tipo di simmetria globale nel Modello Standard.

Un termine di massa di Majorana  $e^-$  composto da un solo fermione di Weyl  $\psi_L$  (o  $\psi_R$ ).

Si sfrutta il campo coniugato di carica

$$\psi^c \equiv C \gamma^0 \psi^* \quad \left( \psi_{L,R}^c = C \gamma^0 \psi_{L,R}^* \right)$$

Nella rappresentazione di Weyl abbiamo  $C = -i\gamma^2\gamma^0$ .  
 Nota che  $\psi_L^c$  è un campo RH (e viceversa).

$$P_L \psi_L^c = P_L (-i\gamma^2 \psi_L^*) = P_L (-i\gamma^2 P_L \psi^*) = -i\gamma^2 P_R P_L \psi^* = 0$$

Possiamo quindi scrivere un termine di

massa di Majorana come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -\frac{m_M}{2} \left( \bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c \right) = && \text{ESERCIZIO:} \\ &= -\frac{m_M}{2} \left( \psi_L^T C \psi_L - \psi_L^\dagger C \psi_L^* \right), && \text{verificare} \end{aligned}$$

o analogamente per  $\psi_R$  con  $\psi_L \rightarrow \psi_R$ .

Questo termine di massa NON è INVARIANTE  
 per trasformazioni di fase U(1) ( $\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$ ),  
 quindi questo campo non ha cariche conservate.

⇒ Un termine di massa di Majorana è  
 permesso solamente per campi neutri  
 sotto il gruppo di gauge della teoria.

# MASSA DEI NEUTRINI [DGH.6]

Evidenza sperimentale del fatto che i neutrini abbiano massa viene solamente dal fenomeno di oscillazione (vedremo più avanti).

Il modo più ovvio di dare una massa a  $\nu_L$  dentro il doppietto  $l_L e^-$  con l'introduzione di un **neutrino right-handed  $\nu_R$**  (come per i quark up). Questo permette di scrivere l'accoppiamento di Yukawa:  $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_Y = -y_\nu \bar{L}_L \nu_R \tilde{H} + h.c. = -\frac{y_\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \nu_R + h.c.$$

I numeri quantici di gauge sono:  $\nu_R \sim (1, 1, 0)$

→  $\nu_R$  è un **singoletto di  $G_{SM}$**

Essendo completamente neutro,  $\nu_R$  ammette anche un termine di massa di Majorana.

In generale quindi abbiamo:

$$\mathcal{L}_{DM} = -y_\nu \bar{L}_L \nu_R \tilde{H} - \frac{M_M}{2} \bar{\nu}_R^c \nu_R + h.c.$$

Prendendo  $\langle H \rangle = \left( 0 \quad \frac{v}{\sqrt{2}} \right)^T$  possiamo riscrivere

$$\mathcal{L}_{\text{DM}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

$$m_D = \frac{y_\nu v}{\sqrt{2}}$$

Nota:  $\bar{\psi}_i^c \psi_j^c = \bar{\psi}_j \psi_i$

Diagonalizziamo la matrice di massa con:

$$\begin{cases} \nu_a = \cos \vartheta \nu_R + \sin \vartheta \nu_L^c \\ \nu_b = \cos \vartheta \nu_L - \sin \vartheta \nu_R^c \end{cases}, \quad \tan \vartheta = \frac{2m_D}{m_M + \sqrt{4m_D^2 + m_M^2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{DM}} = -\frac{m_a}{2} \left( \bar{\nu}_a^c \nu_a + \bar{\nu}_a \nu_a^c \right) - \frac{m_b}{2} \left( \bar{\nu}_b^c \nu_b + \bar{\nu}_b \nu_b^c \right)$$

Gli autovalori sono

$$\begin{cases} m_a = m_M \cos^2 \vartheta + m_D \sin 2\vartheta \\ m_b = m_M \sin^2 \vartheta - m_D \sin 2\vartheta \end{cases}$$

Con  $m_M \neq 0$  i 2 autostati di massa sono fermioni di Majorana. Il termine di massa  $\propto m_M$  rompe la simmetria  $U(1)_L$  di conservazione del numero leptonico  $L$ .

- Per  $m_M = 0$  il neutrino è un fermione di Dirac con massa  $m_\nu = m_D$ :

$$\mathcal{L}_D = -m_\nu (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) = -m_\nu \bar{\nu} \nu, \quad m_\nu = m_D = \frac{y_\nu v}{\sqrt{2}}$$

In questo caso la simmetria  $UM_L$  è invariata,  
 con  $\nu_{L,R} \rightarrow e^{i\alpha_L} \nu_{L,R}$ , e  $L$  è conservato.

Per avere  $m_\nu \lesssim 0.1$  eV serve  $y_\nu \lesssim 10^{-13}$ ,  
 da confrontare con l'elettrone  $y_e \approx 2.9 \times 10^{-6}$ .

Questa enorme gerarchia non ha spiegazioni  
 in questo modello.

• Consideriamo ora il limite

$M_M \gg M_D$  :

$$m_a \approx M_M, \quad m_b \approx -\frac{M_D^2}{M_M}$$

Il segno negativo di  $m_b$   
 può essere assorbito  
 con il cambio di fase  
 $\nu_b \rightarrow i\nu_b$ .

$$g \approx \frac{M_D}{M_M} \ll 1$$

quindi

$$\nu_a \approx \nu_R \quad e \quad \nu_b \approx \nu_L$$

→ Entrambi  
 fermioni di  
 Majorana

-  $L$  non è conservata.

- La massa del neutrino LH, quello che proviene  
 dal doppietto elettrodebole  $\nu_L \approx \nu_b$ , è automaticamente  
 piccola :

$$m_\nu \approx M_D \frac{M_D}{M_M} \ll M_D$$

Meccanismo  
 see-saw (altalena)

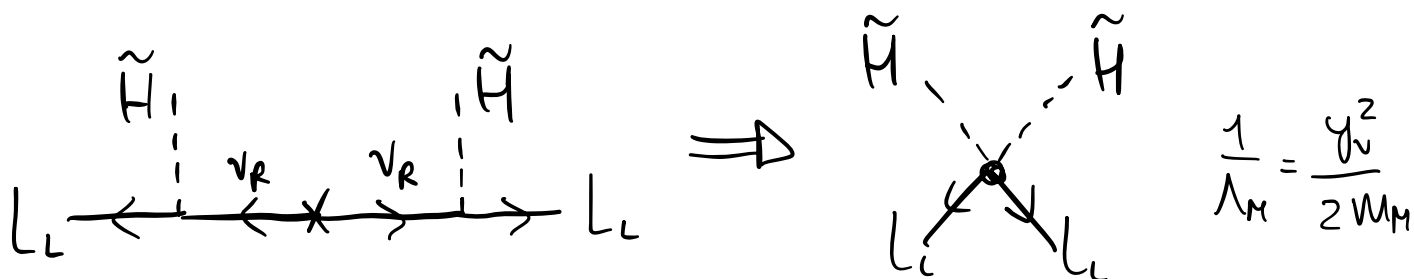
e.g. per  $y_\nu \sim y_\tau \approx 10^{-2} \leftrightarrow y_e \sim 1$  e  $m_\nu \sim 0.1$  eV serve

$$M_M \sim 10^{10} \leftrightarrow 10^{14} \text{ GeV.}$$

# Massa dei neutrini da un operatore effettivo

La grande scala appena vista di  $M_M$  suggerisce che deve esistere una descrizione in teoria effettiva per  $M_\nu$ , senza introdurre nuovi campi.

Posso infatti pensare di integrare via  $\nu_R$  e descrivere il suo effetto a bassa energia tramite un operatore:



Questo è l'operatore di Weinberg ('79)

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{\Lambda_M} \bar{L}_L \tilde{H} \tilde{H} L_L^c + h.c.$$

Sotto  $G_{SM}$ :

$$L_L \sim (1, 2, -\frac{1}{2}) \quad L_L^c \sim (1, \bar{2}, \frac{1}{2})$$

$$H \sim (1, 2, \frac{1}{2}) \quad \tilde{H} \sim (1, \bar{2}, -\frac{1}{2})$$

- È invariante sotto  $G_{SM}$
- Non è invariante sotto  $U(1)_L$ :  $L$  non è conservato.
- Ha dimensione di massa  $d=5$ , è un operatore non rinormalizzabile (l'unico con  $d=5$  permesso da  $G_{SM}$ ).

Con  $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  abbiamo:  $\mathcal{L}_5 \supset -\frac{v^2}{2\Lambda_M} \bar{\nu}_L \nu_L^c + h.c.$

Ovvero lo stesso termine di massa di Majorana trovato nel caso  $M_M \gg M_D$ .

Questo operatore però permette una descrizione più generale della massa di Majorana dei neutrini, senza assumere che sia dovuta a  $\nu_R$ . Infatti ci sono anche altri modi di ottenere lo stesso operatore introducendo altri tipi di particelle pesanti al posto di  $\nu_R$ .

La massa di Dirac dei neutrini ha bisogno di  $\nu_R$  e dell'assunzione ulteriore che  $L$  sia conservato (ovvero che  $m_M = 0$ ). Il caso più generale è invece una massa di Majorana, che è anche ottenibile a bassa energia senza dover esplicitare la dinamica UV ma solamente considerando il Modello Standard come una teoria effettiva.

Fino ad ora abbiamo considerato una sola generazione di neutrini. Estendiamo ora la discussione al caso reale con 3 neutrini LH.

# MESCOLAMENTO DEI LEPTONI

## • Massa di Dirac

Assumiamo esistano 3 neutrini RH  $\nu_{Ri}$  con  $m_M=0$ .

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -y_{\nu}^{ij} \bar{L}_i \nu_{Rj} \tilde{H} - y_e^{ij} \bar{L}_i e_{Rj} H + \text{h.c.}$$

Procede esattamente come con i quark:

Diagonalizziamo con  $y_e = U_{eL} \hat{y}_e U_{eR}^+$ ,  $y_{\nu} = U_{\nu L} \hat{y}_{\nu} U_{\nu R}^+$

In corrente carica troviamo:

$$\sum_{cc}^M \bar{\nu}'_L \gamma^M e'_L = \bar{\nu}_L U_{\nu L}^+ U_{eL} \gamma^M e_L \equiv \bar{\nu}_L U_{\text{PMNS}} \gamma^M e_L$$

dove  $U_{\text{PMNS}} = U_{\nu L}^+ U_{eL}$

Matrice PMNS

Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata

È l'analogo della matrice CKM per i leptoni.

Ha 3 angoli ed 1 fase (che viola CP).

$\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$

$\delta$  (fase di Dirac)



## • Massa di Majorana

Consideriamo ora il caso in cui  $L$  non è conservato e la massa dei neutrini ha origine a scale  $\gg m_W$ , nel qual caso possiamo descriverne l'effetto con l'operatore di Weinberg.

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{C_{ij}^{(S)}}{\Lambda_M} \bar{L}'_i \tilde{H} \tilde{H} L'^c_j + h.c. \Rightarrow -\bar{\nu}'_{L_i} M_{\nu}^{ij} \nu'^c_{L_j} + h.c.$$

dove  $M_{\nu}^{ij} = \frac{C_{ij}^{(S)} v^2}{2\Lambda_M}$  è una matrice complessa e simmetrica.

La si può diagonalizzare con una trasformazione

$$\text{unitaria: } M_{\nu} = U_{\nu_L} \hat{M}_{\nu} U_{\nu_L}^T \quad \left. \begin{array}{l} \nu'_L \rightarrow U_{\nu_L} \nu_L \\ \nu'^c_L \rightarrow U_{\nu_L}^* \nu_L^c \end{array} \right\}$$

In corrente carica, andando nella base di massa, ritrovo la matrice di mescolamento PMNS.

Il numero di parametri però sarà diverso:

delle  $\frac{n(n+1)}{2}$  fasi posso rimuoverne solamente  $n$ ,

$\frac{n(n-1)}{2}$  fasi  
fisiche

3 per  $n=3$

da ridefinizione di fase dei leptoni carichi, mentre i neutrini sono di Majorana e non possono riassorbire fasi, inoltre  $L$  non è conservato.

PMNS (Majorana): 3 angoli e 3 fasi  $\left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ fase di Dirac} \\ \alpha_1, \alpha_2 \text{ fasi di Majorana} \end{array} \right.$   
 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$

# MATRICE PMNS

$$U = V^{(\nu)} P_\nu \quad \begin{array}{l} \rightarrow V^{(\nu)} \text{ analoga alla CKM} \\ \rightarrow P_\nu \text{ matrice con le fasi di Majorana} \end{array}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

$$P_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} \end{pmatrix}$$