Esercizi - Sistemi dinamici non-lineari

Esercizio 1. Linearizzare i seguenti sistemi dinamici vicino ai punti critici e studiare il ritratto di fase vicino ai punti critici

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^3 \\ \dot{y} = -2y \end{cases}, \tag{0.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 - 4 \end{cases}, \tag{0.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + y - \mathrm{e}^{-x} \\ \dot{y} = x^3 - x \end{cases}, \tag{0.3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 - 4x \\ \dot{y} = y^3 - y - 3x \end{cases}, \tag{0.4}$$

Esercizio 2. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2x - y - x^3 \end{cases}. \tag{0.5}$$

Mostrare che $V(x,y) = (x+y)^2 + \frac{1}{2}x^4$ è una funzione di Liapunov e usarla per dimostrare che l'origine è stabile.

Esercizio 3. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 \\ \dot{y} = 3yx^2 \end{cases}. \tag{0.6}$$

Vogliamo usare una funzione di Liapunov per mostrare che le soluzioni sono ellissi e che l'origine è stabile. Provate con

$$V(x,y) = x^2 + Ay^2 \tag{0.7}$$

Possiamo scegliere A tale che sia una funzione di Liapunov? E tale che $\dot{V} = 0$? Allora soluzioni giacciono sui contorni con V costante (ellissi) e l'origine è stabile.

Esercizio 4. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}. \tag{0.8}$$

Costruite una funzione di Liapunov della forma $V(x,y) = x^2 + ay^2 + bxy$ per mostrare che l'origine è stabile.

Esercizio 5. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2xy \\ \dot{y} = x + x^2 - y^2 \end{cases} \tag{0.9}$$

Dimostrate che si tratta di un sistema gradiente del tipo $\dot{X} = -\nabla V$ e trovate V.

Esercizio 6. Consideriamo il sistema di Lotka-Volterra con *harvesting*

$$\begin{cases} \dot{u} = (r - \alpha E - av(t))u(t) \\ \dot{v} = (-\mu - \beta E + \delta u)v \end{cases} \tag{0.10}$$

con $\alpha, \beta > 0$. Trovare una funzione Hamiltoniana. Mostrate che l'effetto del termine di harvesting è quello di far diminuire in media il numero di predatori ma di far aumentare il numero di prede. Disegnate il ritratto di fase con $E = 0$ e $E \neq 0$. Ponendo $E = 0$ per semplicità, studiate il ritratto di fase del sistema di Lotka-Volterra dove le prede crescono con una funzione logistica.

Esercizio 7. Consideriamo l sistemi dinamici

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + y + x^2 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^4 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + \sin x \end{cases}. \tag{0.11}$$

Determinate le varietà invarianti stabile W^s e instabile W^u, dalla definizione. Mostrate esplicitamente che i sottospazi stabile E^s e instabile E^u del sistema linearizzato vicino all'origine sono tangenti alle varietà invarianti.

Esercizio 8. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 9y - x(x^2 + 9y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + 9y^2) \end{cases}. \tag{0.12}$$

Dimostrare che esiste un'unica orbita periodica. (Suggerimento: costruire una regione di intrappolamento dai contorni di $V(x, y) = x^2 + Ay^2$, per $A > 0$ opportuno).

Esercizio 9. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = -x + y - x^2y - 4y^3 \end{cases}. \tag{0.13}$$

Dimostrare che esiste almeno un'orbita periodica.