TRASF. CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

Ricordiamo:

$$\{f,g\} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial g}{\partial p_l} - \frac{\partial f}{\partial p_l}\frac{\partial g}{\partial q_l}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

P. di P. fondamentali: $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

<u>Def.</u> Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x},t)$ PRESERVA LE PAR. DI POISSON se $\forall f(\bar{x},t), g(\bar{x},t)$ e indicando $F(\tilde{x},t) = f(\bar{w}(\tilde{x},t),t)$ e $G(\tilde{x},t) = g(\bar{w}(\tilde{x},t),t)$, si ha

$$\{f,g\}(\bar{w}(\tilde{x},t),t) = \{F,G\}(\tilde{x},t)$$

<u>Prop.</u> Tutte le parentesi di Poisson sono preservate SE E SOLO SE sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali cioè se

$$\{w_i, w_j\} = E_{ij} \qquad \text{ovvero} \quad \begin{aligned}&\{u_h,u_k\}=0\\ &\{v_h,v_k\}=0\\ &\{u_h,v_k\}=-\delta_{hk}\end{aligned}$$

<u>Dim.</u> $$\{F,G\} = \sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i}E_{ij}\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j}\left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i}\right)E_{ij}\left(\sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l}\frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j}\right)$$

$$= \sum_{m,l}\frac{\partial f}{\partial x_m}\underbrace{\left(\sum_{i,j}\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i}E_{ij}\frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j}\right)}_{\{w_m,w_l\}}\frac{\partial g}{\partial x_l} =$$

$$= \sum_{m,e} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{me} \frac{\partial g}{\partial x_e} = \{f, g\} \quad . //$$

Parentesi di Poisson fondamentali preservate

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ è una MATRICE SIMPLETTICA, cioè $J E J^T = E$
(2n×2n)

<u>Dim.</u> $\{w_k, w_e\} = \sum_{i,j} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_e}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} J_{ej} =$

$$= \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} (J^T)_{je} = (J E J^T)_{ke}$$

sono preservate se e solo se $= E_{ke}$, cioè se e solo se $(J E J^T)_{ke} = E_{ke}$. //

$\Downarrow$

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $x = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è una TRASF. CANONICA UNIVALENTE se e solo se preserva le parentesi di Poisson.

In gen. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è CANONICA se e solo se $c\{w_i, w_j\} = \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = E_{ij} \quad \forall i,j$.

FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) = E\,\bar{\nabla}_{\bar{x}} H$$

$\downarrow$

soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$: qto definisce una famiglia (al variare di t) di mappe nello spazio delle fasi, detta FLUSSO HAMILTONIANO

$$\Phi_t : T^*Q \to T^*Q$$

$$\bar{x}_0 \mapsto \Phi_t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$

<u>Prop.</u> Consideriamo il sist. Hamiltoniano con Hamiltoniana H e indichiamo con $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$, dove $\bar{w}(\tilde{x}, t) = \bar{x}(t, \tilde{x})$, il flusso Hamiltoniano con DATI INIZIALI $\tilde{x}$.

Allora tale mappa è una TRASF. CANONICA. (*)

(Φ_t è una trasf canonica $\forall t$)

<u>Dim.</u> Vogliamo dim. che $J E J^{-1} = E$ $\quad (\Leftrightarrow J^{-1} E J = E)$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial (\Phi_t)_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial x_i(t; \tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}$$

Innanzitutto notiamo che $J^T E J = E$ per $t = 0$; infatti

$$(\Phi_{t=0}(\tilde{x}))_i = \tilde{x}_i \Rightarrow J_{t=0} = \mathbb{1}.$$

Calcoliamo

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j,k} \underbrace{J_{ji}}_{=J^T_{ij}} E_{jk} J_{kh}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h}\Big] =$$

$$= \sum_{jk}\Big[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial t}}_{=\sum_l E_{jl}\frac{\partial H}{\partial x_l}}\Big) E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial t}}_{=\sum_m E_{km}\frac{\partial H}{\partial x_m}}\Big)\Big]$$

$\leftarrow$ $x_j(t,\tilde{x})$ soddisfa eq. di Ham. con Hamiltoniana H

$$= \sum_{jkla} E_{jl} \frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_l} \frac{\partial x_a}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} +$$

$$+ \sum_{jkmb} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km} \frac{\partial^2 H}{\partial x_b \partial x_m} \frac{\partial x_b}{\partial \tilde{x}_h} =$$

$$= \sum_{jkla} J^T_{ia} (\partial^2 H)_{al} E_{lj} (-1) E_{jk} J_{kh}$$

$$+ \sum_{jkmb} J^T_{ij} E_{jk} E_{km} (\partial^2 H)_{mb} J_{bh}$$

$$= \Big[- J^T (\partial^2 H) \underbrace{E^2}_{=-1} J + J^T \underbrace{E^2}_{=-1} (\partial^2 H) J\Big]_{ih}$$

$$= \big[J^T(\partial^2 H) J - J^T (\partial^2 H) J\big] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big(J^T E J\big)_t = 0 \Rightarrow J^T E J_t \text{ è matrice cost. (in } t)$$

$$J^T E J|_{t=0} = E \Longrightarrow J^T E J = E \quad \forall t \ //$$

⊛ In che senso una mappa che prende un pto in T^*Q e lo manda in un altro pto di T^*Q è una TRASFORMAZIONE DI COORDINATE?

Fissiamo t, e consideriamo

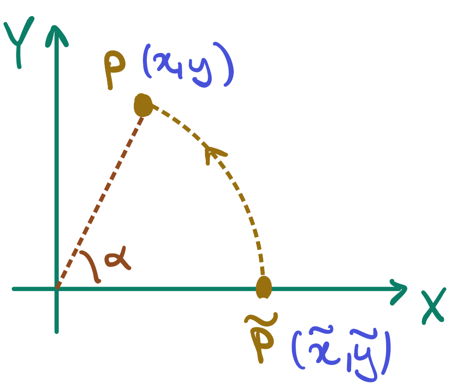
$$x = \Phi_t(\tilde{x})$$

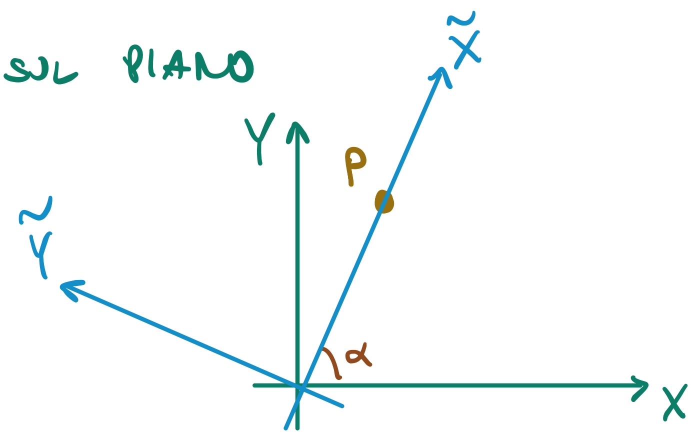
x è l'evoluto al tempo t di $\tilde{x}$

Posso allora interpretare $x, \tilde{x}$ in due modi:

1) x e $\tilde{x}$ sono coord. di due pti distinti $P, \tilde{P}$ nello stesso sist. di coord.;
2) x e $\tilde{x}$ sono coord. diverse (in diversi sist. di coord.) per lo stesso pto $P \in T^*Q$ [nel secondo sist. di coord, per ottenere le coord. di P, devo prendere $P \in T^*Q$, evolverlo indietro di tempo t e leggere le coord. di tale evoluto nel vecchio sist. di coord.].

Esempio con le ROTAZIONI SUL PIANO





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

(x,y) e $(\tilde{x},\tilde{y})$ possono essere lette in due modi:

1) come le coord. nel sist. (X,Y) di due pti $P, \tilde{P}$ distinti

2) come le coord. dello stesso pto P in due sist. di rif. (X,Y) e $(\tilde{X},\tilde{Y})$ distinti. Le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y})$ possono essere ottenute ruotando il sist. di rif., oppure ruotando INDIETRO il pto e vedendo che coord. avevo nel sist. (X,Y).
Per ES.: se prendo P con coord. $(x,y) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, per ottenere le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y}) = (R,0)$ posso prendere il pto $(x,y) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ e applicargli la rotaz. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; qto pto va in $(x,y) = (R,0)$; qte sono le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y})$ di P!

Qt' ottica ci permette di pensare alle TRASFORMAZIONI CANONICHE:

1) in un senso "PASSIVO" con $\tilde{x}_i$ e x_j che individuano lo STESSO PTO in T^*Q, ma utilizzando diversi sistemi di coordinate

2) in un senso "ATTIVO" con $\tilde{x}_i$ e x_j che individuano due pti diversi di T^*Q in diversi sist. di coord.

Qto pto di vista è particolarmente utile per famiglie a un parametro di trasf. canoniche (come il flusso Ham. o, come vedremo, le rotazioni).

Osservazione

Flusso Hamiltoniano è una trasf. canonica

$x = w(\tilde{x}, t)$ con $w(\tilde{x}, t) = x(t, \tilde{x})$

soluz., con dato iniziale $\tilde{x}$, di eq. del moto

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t; \tilde{x}) = E \nabla_x H$$

H definisce il flusso Hamilt.

Qual è l'Hamiltoniana K coniugata all' Hamil. H?

Prendiamo $\tilde{w}_i(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x}_i$, che nel nostro caso diventa

$$\tilde{w}_i(x(t, \tilde{x}), t) = \tilde{x}_i$$

e facciamo derivata totale rispetto al tempo

$$\sum_e \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_e}}_{=\tilde{J}_{ie}} \underbrace{\frac{\partial x_e(t, \tilde{x})}{\partial t}}_{=\sum_s E_{es} \frac{\partial H}{\partial x_s}} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0$$

cioè

$$\underbrace{\tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}}_{\nabla_{\tilde{x}} K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$

cioè $K = 0$ (a meno di cost. irrilevante)

⇝ Il flusso Hamiltoniano generato da H, coniuga H stessa in $K = 0$

Posso generare TRASFORMAZIONI CANONICHE attraverso la scelta di una funzione $\hat{H}(p,q)$:

$$\hat{H}(p,q) \longrightarrow \dot{x} = E \nabla_x \hat{H} \longrightarrow x = \Phi_t^{\hat{H}}(\tilde{x})$$

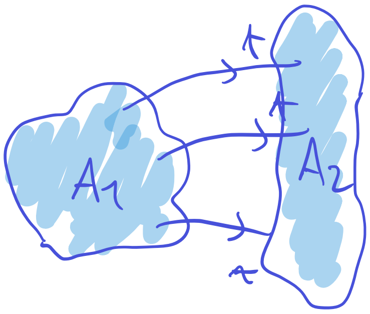
- Una volta che ho $\Phi_t^{\hat{H}}$, posso applicarla a qlsiasi sist. Ham. con Hamiltoniana H e ottenere la K coniugata (come detto sopra, se scelgo $H = \hat{H}$, allora $K = 0$).

- In generale, vedremo che se ho una famiglia a un parametro di trasformazioni canoniche, posso pensarla come il flusso Hamiltoniano di una qlche Hamiltoniana H che chiamerò il GENERATORE di qle trasformazioni.

Corollario [TEOREMA DI LIOUVILLE]

Le trasformazioni canoniche univalenti $(c=1)$ e fra esse il flusso Hamiltoniano, preservano il volume euclideo

$$dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n$$



La regione A_1 evolve nel tempo t in una regione A_2 dello sp. delle fasi t.c. $vol(A_1) = vol(A_2)$.

Dim.

$$vol(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n}_{dx_1 \cdots dx_{2n}} =$$

$$= \int_{A_2} |\det J| \, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n$$

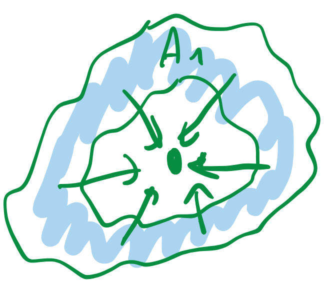
siccome trasf. è canonica, $J^T E J = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(E) = \det(J^T E J) = \det J^T \cdot \det E \cdot \det J$$
$$= (\det J)^2 \det E \Rightarrow (\det J)^2 = 1$$

$$= \int_{A_2} d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n = vol(A_2) \, .//$$

Osservazione: $\dot{x} = E \nabla_x H$ ← un pto singolare per questo sistema non può essere ASINTOTICAM. STABILE

Infatti se lo fosse, avremmo che non si conserverebbe il volume.



Osservazione :

Come visto precedentemente, data trasf. di coordinate

$$x = w(\tilde{x}, t) \qquad e \qquad \text{inversa} \qquad \tilde{x} = \tilde{w}(x, t)$$

se $\dot{x}_i = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x, H\}$

allora $\dot{\tilde{x}}_i = \sum_{\ell j} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_\ell} E_{\ell j} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = \left(\{\tilde{w}_i, H\} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} \right) \circ \bar{w}(\tilde{x}, t)$

qto non stupisce, perché $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ se f valutata su soluz. eq. di Hamilton

Quindi la condizione di CANONICITÀ può essere riscritta nel seguente modo: trasf. è canonica se $\forall H$ $\exists K$ t.c.

$(c=1)$

$$\{\tilde{x}_i, K\}(\tilde{x}, t) = \underbrace{\{\tilde{w}_i, H\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)}_{= \{\tilde{x}_i, \tilde{H}\} \text{ se si preservano par. Poisson}} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)}_{= \{\tilde{x}_i, K_0\} \text{ se } \tilde{J} \text{ simpl. (vedi lezione 22)}} \qquad (*)$$

Quindi si vede velocem. che se le P. di P. sono preservate ($\Leftrightarrow J$ simp.) allora trasf. è canonica, perché esiste $K = \tilde{H} + K_0$ t.c. $(*)$ è soddisfatta.

Complemento: TRASFORMAZIONI PUNTUALI ESTESE SONO CANONICHE

Trasf. puntuali estese sono date da

$$q_h = v_h(\tilde{q}, t)$$
$$p_k = \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k}$$

$\leftarrow$ trasf. inversa $\tilde{q}_r = \tilde{v}_r(q, t)$

$v_h(\tilde{v}(q,t),t) = q_h$

$\tilde{v}_m(v(\tilde{q},t),t) = \tilde{q}_m$

$\downarrow$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_s} \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial q_k} = \delta_{hk}$$

<u>Prop.</u> Le trasf. puntuali estese sono CANONICHE

<u>Dim</u>. Dimostriamo che preservano le parentesi di Poisson fondamentali.

$$\{q_h, q_k\} = \{v_h(\tilde{q}), v_k(\tilde{q})\} = 0$$

$$\{q_h, p_k\} = \{v_h(\tilde{q}), \sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k}\} = \sum_e \{v_h(\tilde{q}), \tilde{p}_e\} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_e \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_e} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_k} = \sum_e J_{he} \tilde{J}_{ek} = \delta_{he}$$

$$\{p_h, p_k\} = \{\sum_e \tilde{p}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_h}, \sum_m \tilde{p}_m \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k}\} = \sum_{em} \left[\tilde{p}_e \{\frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_h}, \tilde{p}_m\} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (k \leftrightarrow h)\right]$$

$$= \sum_{em} \left[\tilde{p}_e \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_h \partial \tilde{q}_m} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (k \leftrightarrow h)\right]$$

$$= \tilde{p}_e \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_m}\left[\frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial q_h}\right] \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (k \leftrightarrow h)$$

$$= \tilde{p}_e \frac{\partial v_s}{\partial \tilde{q}_m} \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_s \partial q_h} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (k \leftrightarrow h)$$

$$= \tilde{p}_e \frac{\partial^2 \tilde{v}_e}{\partial q_k \partial q_h} - (k \leftrightarrow h) = 0$$