TRASFORMAZIONI CANONICHE INFINITESIME (e quantità conservate)

Nuove variabili differiscono da quelle vecchie solo per quantità infinitesime (ma nei conti possiamo sempre trascurare termini di ordine alto)

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i \qquad \tilde{p}_i = p_i + \delta p_i$$

variazioni infinitesime

$$\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i \qquad (*)$$

- δx_i sono funzioni di $\delta x_i(x,t)$

- Non tutte le $\delta x_i(x,t)$ producono una trasf. canonica. Affinché la trasf. $(*)$ sia canonica, devono essere preservate le PARENTESI DI POISSON, cioè

$$E_{ij} = \{x_i + \delta x_i, x_j + \delta x_j\} = \underbrace{\{x_i, x_j\}}_{E_{ij}} + \{x_i, \delta x_j\} + \{\delta x_i, x_j\} + \cancel{\{\delta x_i, \delta x_j\}}$$

trascuriamo perché infinitesimo di ordine superiore

$$\Rightarrow \delta x_i \text{ t.c. } \quad \{x_i, \delta x_j\} - \{x_j, \delta x_i\} = 0,$$

cioè

$$\sum_k E_{ik} \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_k} - \sum_k E_{jk} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (*)$$

Se chiamiamo $\Omega_{lm} \equiv \dfrac{\partial \delta x_l}{\partial x_m}$, $(*)$ può essere scritta in forma matriciale come:

$$\Omega E + E \Omega^T = 0$$

Per il Lemma 3 (alla fine di Lezione IFT26), qto implica che $\exists\ G(x,t)$ t.c.

$$\delta\bar{x} = E\,\bar{\nabla}_x(\epsilon G) = \epsilon\{\bar{x}, G\} \qquad (\bullet)$$

dove abbiamo introdotto il parametro $\varepsilon \ll 1$ affinché la trasformazione sia infinitesima con G generica.

In coord. (p,q) le condiz. $(\bullet)$ si legge

$$\begin{cases} \delta p_k = -\epsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_k}(q,p,t) \\ \delta q_k = \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_k}(q,p,t) \end{cases}$$

La funzione $G(\bar{x},t)$ è detta GENERATORE della trasf. canonica infinitesima, in quanto determina di quanto variano le coord. x_i (cioè p_h, q_h).

La $(\bullet)$ permette di calcolare la variazione infinitesima di una generica VARIABILE DINAMICA $f(x,t)$:

$$\delta f(\bar{x},t) = f(\bar{x}+\delta\bar{x},t) - f(\bar{x},t)$$

← qta è data dal differenziale df applicato alla variazione $\delta\bar{x}$

$$df(x,t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i}\, dx_i$$

$$= df(x,t)[\delta x] = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i}\,\delta x_i$$

← usiamo $(\bullet)$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\epsilon \sum_{j=1}^{2n} E_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon\{f, G\}$$

cioè, noto il generatore G, esso determina la variazione di f:

$$\delta f = \epsilon \{f, G\}$$

Teorema di Nöther in MECCANICA HAMILTONIANA.

Prendiamo l'Hamiltoniana $H(\bar{x}, t)$. La sua variazione sotto trasformazioni infinitesime indip. dal tempo (generate da $G(x, \cancel{t})$) è

$$\delta H = \epsilon \{H, G\} \qquad \delta H = K - H = \tilde{H} - H \cancel{+K_0}$$

$\Rightarrow$ Se H è invariante sotto trasf. infinitesime generate da G, allora $G(p,q)$ è una COSTANTE DEL MOTO.

↳ Versione Hamiltoniana del teorema di Nöther

(Vale anche il viceversa: se $G(p,q)$ è cost. del moto, allora H è inv. sotto trasf. generate da G.)

Per trasf. infinitesime dipendenti dal tempo

$$\delta H = K - H = \underbrace{\tilde{H} - H}_{\epsilon\{H,G\}} + \underbrace{K_0}_{= \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}} = \epsilon\left[\{H, G\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right]$$

Cioè vale ancora che: generatore $G(p,q,t)$ è cost. del moto $\Longleftrightarrow$ H è invariante sotto trasf. canoniche generate da G.

Come passiamo dalle trasf. infinitesime a quelle finite?

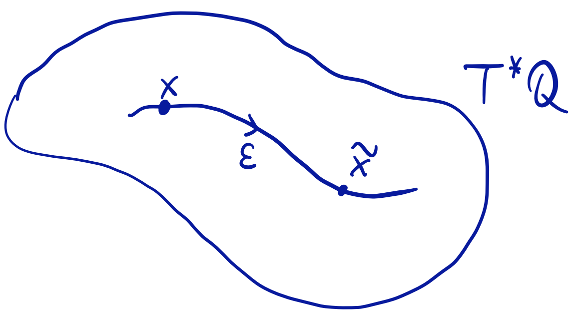
Cioè vogliamo interpretare le trasf. infinitesime come APPROSSIMAZIONE di trasf. continue a 1 parametro generiche, nel limite in cui il parametro sia molto piccolo (e t.c. siano identità se il parametro si annulla.)

Consideriamo le trasf. canoniche continue a parametro dal punto di vista ATTIVO (cioè mandano un pto $P \in T^*Q$ in un diverso pto $P' \in T^*Q$).
Al variare del parametro ε, esse tracciano una curva in T^*Q data da

$$\tilde{x} = \tilde{w}(x;\varepsilon) \equiv x(\varepsilon; x) \qquad (*)$$

in analogia al flusso Hamiltoniano

t.c. $\tilde{w}(x;0) = x$



(per semplicità ignoriamo l'eventuale dip. dal tempo della trasf. canonica)

Qndo $\underline{\varepsilon \ll 1}$, $\tilde{x}$ è molto vicino a x e lo spostamento $\delta x = \tilde{x} - x$ può essere identificato col vettore tg alla curva in x. Infatti, possiamo espandere $(*)$ in serie di Taylor attorno $\varepsilon = 0$ e tenere solo il primo termine

$$\tilde{x} = \underset{\substack{\parallel \\ x}}{x(x;0)} + \underset{\substack{\parallel \\ \delta x}}{\frac{dx}{d\varepsilon}(x;0)\,\varepsilon} + \dots$$

$\varepsilon \ll 1$

Cioè otteniamo una trasf. INFINITESIMA (CANONICA), come q.le descritte sopra, con

$$\delta x = \frac{dx}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

per trasf. CANONICHE infinitesime

Ma noi sappiamo che $\delta x = \varepsilon E \nabla_x G$. Qto porta a concludere

$$\Longrightarrow \quad \frac{dx}{d\varepsilon} = E \nabla_x G \quad (*)$$

← Abbiamo ricavato qta eq. attorno al pto x a $\varepsilon = 0$. Possiamo ovviamente ripetere attorno a ogni altro pto della curva e otteniamo la stessa eq.

Integrando questa relazione otteniamo la curva $x(\varepsilon)$!

Formalmente, le $(*)$ sono le EQ. DI HAMILTON (*) dove ε fa le veci del tempo e G dell'Hamiltoniana.

(*) $\dot{x} = E \nabla_x H$

In quest'ottica, $x(\varepsilon)$ è il FLUSSO HAMILTONIANO associato all'Hamiltoniana G.

Qndi ogni $G(p, q, t)$ può essere interpretata come un'Hamiltoniana il cui flusso Ham. corrisponde alle trasformaz. canoniche (finite) generate da G.

G è anche detto MOMENT MAP (μ) associata al gruppo di trasf. dato.

In particolare, vediamo che dato un sistema, la sua Hamiltoniana genera il moto cioè la traslazione temporale del sistema

→ H è il generatore di TRASLAZIONI TEMPORALI!

Osservazione: abbiamo "chiuso il cerchio" con fine di lezione MFT27: avevamo dimostrato che attraverso una funz. $G(x,t)$ potevamo generare una trasf. CANONICA (fam. a 1-parametro); qui abbiamo dim. che OGNI trasf. can. (fam. a 1-par.) è GENERATA da una funz $G(x,t)$.

MOMENTO ANGOLARE, ROTAZIONI e PARENTESI DI POISSON

Un esempio classico di gruppo di trasf. continue è il gruppo delle ROTAZIONI $SO(3)$.

Data una particella con coord. cartesiane $\bar{q}=(q_1,q_2,q_3)$ e momenti coniugati $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3)$, una rotazione agisce sullo spazio delle fasi ruotando simultaneamente $\bar{q}$ e $\bar{p}$:

$$\bar{p} \mapsto R\bar{p} \qquad \bar{q} \longmapsto R\bar{q} \qquad R \in SO(3)$$

Abbiamo visto che una rotazione infinitesima di angolo $\alpha \ll 1$ attorno all'asse $\hat{\omega}$ $(\|\hat{\omega}\|=1)$ è data dalla matrice

$$R(\alpha) = \mathbb{1} + \Omega(\alpha) \qquad \text{con} \quad \Omega_{ij} = -\alpha \sum_k \epsilon_{ijk}\, \hat{\omega}_k$$

Dalla meccanica Lagrangiana, sappiamo che se un sistema è invariante sotto $R(\alpha)$, allora la componente del momento angolare $\bar{M}$ lungo l'asse $\hat{\omega}$ è una COST. DEL MOTO.
Se qto sist. ammette una descrizione Hamiltoniana, da quanto detto sopra ci aspettiamo che $\bar{M}\cdot\hat{\omega}$ generi le rotazioni infinitesime $R(\alpha)$, cioè ci aspettiamo che

$$\underset{\delta\bar{p}}{\underset{\|}{\Omega(\alpha)\,\bar{p}}} = \alpha\{\bar{p},\, \bar{M}\cdot\hat{\omega}\} \iff \sum_k \Omega_{ik} p_k = \alpha\{p_i, \sum_h M_h \hat{\omega}_h\}$$

e analogamente per $\bar{q}$.

Verifichiamo q.ta identità: ricordiamo che $\{p_i, M_h\} = \sum_l \epsilon_{lih} p_l$

$$\alpha \sum_h \hat{\omega}_h \{p_i, M_h\} = \alpha \sum_{h,l} \epsilon_{lih} p_l \hat{\omega}_h = \sum_l \left(-\alpha \sum_h \epsilon_{ilh} \hat{\omega}_h\right) p_l =$$

$$= \sum_l \Omega(\alpha)_{il} p_l \quad //$$

In particolare, il MOMENTO ANGOLARE GENERA LE ROTAZIONI SO(3).

(Analogamente si può dimostrare che $\bar{M}$ e $\bar{A}$ (vett. di Runge-Lenz) generano il gruppo SO(4); vedi alla fine.)

In generale, la MOMENT MAP $\mu = \sum_{\alpha,\beta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}}{m_{\alpha\beta}} p_\alpha q_\beta$ genera

$$\left.\begin{aligned} \{q_\delta, \mu\} &= \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta} q_\beta \delta_{\alpha\delta} = \sum_\beta m_{\delta\beta} q_\beta \\ \{p_\delta, \mu\} &= \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta} p_\alpha (-\delta_{\beta\delta}) = -\sum_\alpha m^T_{\delta\alpha} p_\alpha \end{aligned}\right\}$$

Q.nto visto sopra è un caso particolare in cui $m_{\alpha\beta}$ è ANTISIMMETRICA

Verifichiamo ora che se un'Hamiltoniana è invariante per rotazioni, allora $\{M_i, H\} = 0 \quad \forall i = 1,2,3.$

In generale, ora verifichiamo che se $f(p,q,t)$ è una funzione invariante per rotazioni, allora $\{M_i, f\} = 0.$

[Un caso particolare è $\{M_i, \bar{M}^2\} = 0$ che abbiamo già verificato.]

Vediamo come agisce M_h su una funz. INVARIANTE sotto ROTAZIONI:

in qto caso $f(\bar{p}, \bar{q}) = g(\underbrace{\bar{p}^2, \bar{q}^2, \bar{p}\cdot\bar{q}})$

unici invarianti sotto rotaz. che posso definire usando i vett. $\bar{p}$ e $\bar{q}$

Cioè f è composizione di $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

con le tre funzioni

$\alpha_1: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p}^2$ $\qquad$ $\alpha_2: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{q}^2$ $\qquad$ $\alpha_3: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p}\cdot\bar{q}$

$$\{M_h, f\} = \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial q_m} \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \underbrace{\{M_h, \alpha_\ell\}}$$

dim. ora che qto è $= 0$ $\quad \forall h$ e $\forall \ell$

$$\{M_h, \bar{p}^2\} = \{M_h, \sum_j p_j^2\} = \sum_j 2p_j \{M_h, p_j\} =$$

$$= 2 \sum_j p_j \sum_k \epsilon_{hjk} p_k = 0$$

$$\{M_h, \bar{q}^2\} = \{M_h, \sum_j q_j^2\} = 2\sum_j q_j \sum_k \epsilon_{hjk} q_k = 0$$

$$\{M_h, \bar{p}\cdot\bar{q}\} = \{M_h, \sum_j p_j q_j\} = \sum_j \left(p_j \{M_h, q_j\} + q_j \{M_h, p_j\}\right)$$

$$= \sum_{jk} \left(p_j \epsilon_{hjk} q_k + q_j \epsilon_{hjk} p_k\right) =$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{h\underbrace{jk}_{\text{antisim.}}} \left(\underbrace{p_j q_k + p_k q_j}_{\text{simm.}}\right) = 0$$

in $j \leftrightarrow k$

$$\bar{A} = \frac{\bar{p} \times \bar{M}}{m} - k\frac{\bar{r}}{r} \quad (\cdot) \qquad \bar{M} = \bar{r} \times \bar{p} \qquad M_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\{M_i, M_j\} = \sum_l \epsilon_{ijl} M_l$$

$$\{M_i, A_j\} = \sum_l \epsilon_{ijl} A_l \qquad (\bar{A} \text{ è un vett. sotto } SO(3))$$

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_l \epsilon_{ijl} M_l \qquad (\cdot\cdot)$$

$\delta_{lr}\delta_{ks} - \delta_{ls}\delta_{kr}$

$$\{H, M_i\} = \{H, A_i\} = 0$$

Inoltre da def. $(\cdot)$ abbiamo

$$\bar{M} \cdot \bar{A} = 0 \qquad e \qquad \bar{A}^2 - k^2 = \frac{2H}{m}\bar{M}^2$$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$

$\bar{A}$ introduce solo un'ulteriore cost. del moto INDIPEND. (oltre a H e M_i)

↳ 5 cost. del moto in sp. delle fasi 6d ⇒ traiettoria giace su curva di livello.

$$\bar{A}^2 = A_i A_i = \frac{1}{m^2} \sum_{l,k,r,s} \epsilon_{ilk} p_l M_k \epsilon_{irs} p_r M_s + k^2 - \frac{2k}{mr} (\bar{p} \times \bar{M}) \cdot \bar{r}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(\bar{p}^2 \bar{M}^2 - \cancel{(\bar{p} \cdot \bar{M})^2}\right) + k^2 - \frac{2k}{mr}\bar{M}^2 =$$

$$= \frac{2\bar{M}^2}{m}\left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right) + k^2 = \frac{2H\bar{M}^2}{m} + k^2$$

Verifichiamo $(\cdot\cdot)$

$$\{M_s, V_k\} = \epsilon_{skl} V_l$$

$$A_i = \frac{1}{m} \epsilon_{imn} p_m M_n - k\frac{x_i}{r}$$

$$\{A_i, A_j\} = \frac{1}{m^2} \epsilon_{imn} \epsilon_{jrs} \{p_m M_n, p_r M_s\} - \frac{k}{m} \epsilon_{imn} \left\{p_m M_n, \frac{x_j}{r}\right\}$$

$$- \frac{k}{m} \epsilon_{jrs} \left\{\frac{x_i}{r}, p_r M_s\right\} + k^2 \underbrace{\cancel{\left\{\frac{x_i}{r}, \frac{x_j}{r}\right\}}}_{=0}$$

$$\{p_m M_n, p_r M_s\} = p_m \{M_n, p_r\} M_s + p_m \{M_n, M_s\} p_r + M_n \{p_m, M_s\} p_r$$

$$= p_m M_s \epsilon_{nrk} p_k - p_r M_n \epsilon_{smq} p_q + p_m p_r \epsilon_{nsb} M_b$$

$$\frac{1}{m^2} \epsilon_{imn} \epsilon_{jrs} \{p_m M_n, p_r M_s\} = \Big\{ p_m p_k M_s \epsilon_{jrs} (\delta_{ri}\delta_{km} - \delta_{rm}\delta_{ki})$$

$$\epsilon_{ijm} M_m = \epsilon_{ijn}\, \epsilon_{nrs}\, x_r p_s = x_i p_j - x_j p_i$$

$$- p_r p_q M_n (\delta_{mj}\delta_{qr} - \delta_{mr}\delta_{qj})\, \epsilon_{imn}$$
$$+ p_m p_r M_b (\delta_{si}\delta_{bm} - \delta_{sm}\delta_{bi})\, \epsilon_{jrs} \Big\} \cdot 1/m^2$$

$$= \Big\{ \epsilon_{jis}\, \bar{p}^2 M_s - p_i p_r M_s\, \epsilon_{jrs} - \bar{p}^2 M_n \epsilon_{ijn} + p_m p_j M_n\, \epsilon_{imn}$$
$$+ \bar{p}\cdot\bar{M}\, \epsilon_{jri}\, p_r - \cancel{p_s p_r M_i}\, \epsilon_{jrs} \Big\} 1/m^2$$

$$= \Big\{ - p_i \epsilon_{jrs} p_r M_s + p_j\, \epsilon_{irs} p_r M_s + \epsilon_{ijn} \big(\underbrace{\cancel{\bar{p}\cdot\bar{M}}}_{=0}\, p_n - 2\bar{p}^2 M_n \big) \Big\} 1/m^2$$

$$\epsilon_{irs} p_j p_r M_s = \epsilon_{irs}\, \epsilon_{smn}\, p_j p_r x_m p_n =$$
$$= p_j p_r x_m p_n (\delta_{im}\delta_{rn} - \delta_{in}\delta_{rm}) =$$
$$= x_i p_j \bar{p}^2 - p_i p_j\, \bar{x}\cdot\bar{p}$$

$$= (x_i p_j - x_j p_i) \frac{\bar{p}^2}{m^2} - 2\, \epsilon_{ijm} M_n \frac{\bar{p}^2}{m^2} = -\frac{2}{m}\, \epsilon_{ije} M_e \frac{\bar{p}^2}{2m}$$

$$\{p_m, \tfrac{1}{r}\} = -\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{1}{\sqrt{\cdots}} = \frac{1}{2r^3} 2x_m = x_m / r^3$$

$$\epsilon_{imn} \cdot \{ p_m M_n, \frac{x_j}{r} \} = \Big(-\delta_{mj} \frac{M_n}{r} + p_m\, \epsilon_{njr} \frac{x_r}{r} + M_n x_j \overbrace{\{p_m, \tfrac{1}{r}\}}^{x_m/r^3} \Big) \cdot \epsilon_{imn} =$$
$$= - \epsilon_{ijn} \frac{M_n}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r}\, \bar{p}\cdot\bar{x} - p_j \frac{x_i}{r} + \epsilon_{imn}\, x_m M_n x_j \cdot \frac{1}{r^3}$$
$$= - \epsilon_{ijn} \frac{M_n}{r} + \delta_{ij} \frac{\bar{p}\cdot\bar{x}}{r} - p_j \frac{x_i}{r} + \frac{1}{r^3} \big(x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - p_i x_j r^2 \big)$$
$$= -\frac{x_i}{r} p_j + \cancel{\frac{x_j}{r} p_i} + \delta_{ij} \frac{\bar{p}\cdot\bar{x}}{r} + \frac{1}{r^3} x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - \frac{x_i}{r} p_j - \cancel{\frac{x_j}{r} p_i}$$
$$= -\frac{2}{r} x_i p_j + \cancel{\frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p}\cdot\bar{x}} + \cancel{\frac{1}{r^3} x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p}}$$

$$\epsilon_{jrs} \{ \frac{x_i}{r}, p_r M_s \} = -\epsilon_{jmn} \{ p_m M_n, \frac{x_i}{r} \} = - \uparrow \text{ con } i \leftrightarrow j$$
$$= \frac{2}{r} x_j p_i - \cancel{\frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p}\cdot\bar{x}} - \cancel{\frac{1}{r^3} x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p}}$$

$$-\frac{k}{m} (\ldots + \ldots) = +\frac{2k}{mr} (x_i p_j - x_j p_i) = +\frac{2k}{mr}\, \epsilon_{ije} M_e$$

$$\epsilon_{imn} x_m M_n x_j = \epsilon_{imn}\, \epsilon_{nrs}\, x_m x_j x_r p_s =$$
$$= x_m x_j x_r p_s (\delta_{ir}\delta_{ms} - \delta_{is}\delta_{mr}) =$$
$$= x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - p_i x_j r^2$$

$$\Rightarrow \quad \{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m}\epsilon_{ijl} M_l \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \quad //$$