

Università di Trieste
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di
Tecnica delle Costruzioni

EFFETTI DEL SECOND'ORDINE

Prof. Ing. Natalino Gattesco
Dott. Ing. Ingrid Boem

BIBLIOGRAFIA

Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2b, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.

Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.

Wight J., Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Sixth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2011.

Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.

INTRODUZIONE

Le migliori caratteristiche meccaniche ed il maggior sfruttamento delle stesse ha portato all'uso frequente di

ELEMENTI SNELLI

anche nelle strutture in calcestruzzo armato.



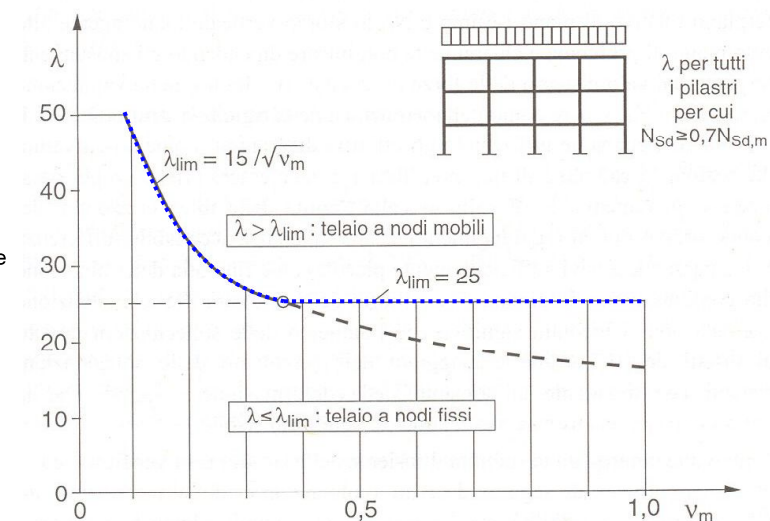
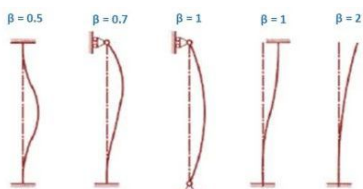
Particolare attenzione nella verifica di tali elementi quando sono soggetti a

PRESSOFLESSIONE

SNELLEZZA LIMITE

Gli elementi singoli semplicemente compressi vengono definiti snelli se il rapporto di snellezza supera il maggiore tra:

$$\lambda_{lim} = \max \left\{ \begin{array}{l} 25 \\ 15 \\ \sqrt{v_m} \end{array} \right.$$
$$\lambda = \frac{l_o}{i} \quad \begin{array}{l} \text{Luce libera di inflessione} \\ \text{Raggio d'inerzia (J/A)^{0.5}} \end{array}$$
$$v_m = \frac{N_{sd}}{f_{cd} A_c}$$



$$l_o = \beta \cdot l$$

SNELLEZZA LIMITE

Nel DM 17.01.2018 è indicato come snellezza limite per elementi singoli soggetti anche a flessione il valore

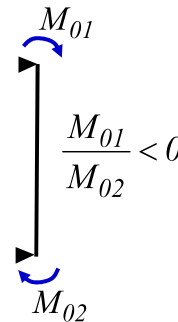
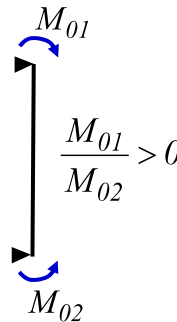
$$\lambda_{lim} = \frac{15.4 \cdot C}{\sqrt{v_m}}$$

$$v_m = \frac{N_{sd}}{f_{cd} A_c}$$

$$\lambda = \frac{l_o}{i}$$

$$C = 1.7 - \frac{M_{01}}{M_{02}}$$

$$0.7 \leq C \leq 2.7$$



EFFETTI SECOND'ORDINE TRASCURABILI

Gli effetti globali del second'ordine negli edifici possono essere trascurati se si ha:

$$P_{Ed} \leq 0.31 \cdot \frac{n}{n+1.6} \cdot \frac{\sum (E_{cd} I_c)}{L^2}$$

P_{Ed} carico verticale totale (su elementi controventati e di controvento)

n numero di piani

L altezza totale edificio sopra il vincolo ad incastro di base

E_{cd} valore di calcolo del modulo elastico del calcestruzzo

I_c momento d'inerzia degli elementi di controvento (sez. inter. reagente)

EFFETTI DEL SECOND'ORDINE

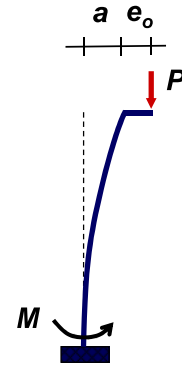
A causa degli spostamenti laterali prodotti dal momento flettente, l'azione assiale induce

SOLLECITAZIONI FLESSIONALI ADDIZIONALI

che aumentano al crescere della snellezza. Tali sollecitazioni vengono dette brevemente

EFFETTI DEL SECOND'ORDINE

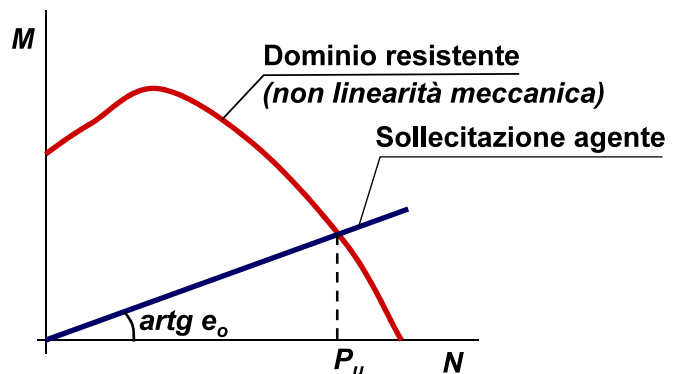
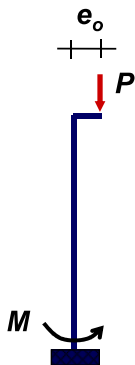
$$M = P \cdot e_0 + P \cdot a$$



ELEMENTI TOZZI

Si considera un'asta incastrata al piede, con sezione costante, soggetta ad un carico assiale eccentrico

Considerando l'asta indeformabile si ha la seguente situazione (*Momento del primo ordine*).

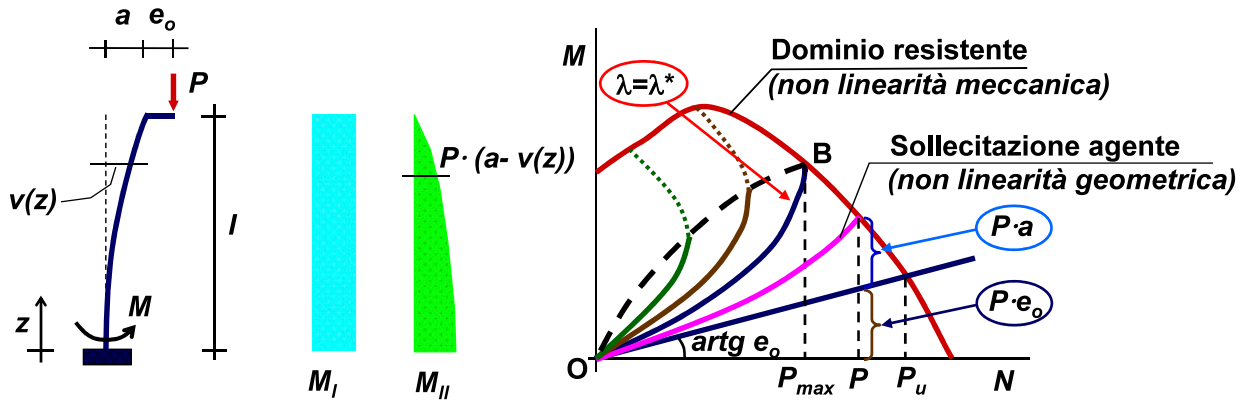


$$\left\{ \begin{array}{l} N = P \\ M = P \cdot e_0 \end{array} \right.$$

M agente lineare con N

ELEMENTI SNELLI

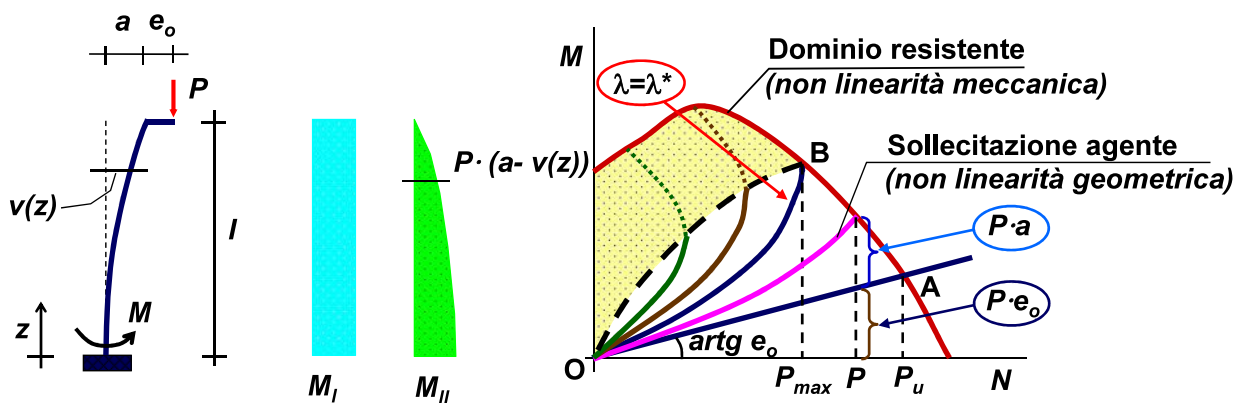
In realtà, l'asta si deforma lateralmente e di conseguenza si ha un incremento della sollecitazione flessionale al piede (*effetto del 2° ordine*). Nelle aste snelle non può essere trascurato questo effetto.



$$\begin{cases} N = P \\ M = P \cdot e_0 + P \cdot a = M_I + M_{II} \end{cases}$$

M agente non lineare con N

ELEMENTI SNELLI



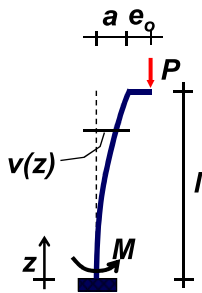
Se $\lambda \leq \lambda^*$ ➡ Rottura sezione al piede

Se $\lambda > \lambda^*$ ➡ Crisi elemento per instabilità

La zona del diagramma sopra la curva OB (*zona retinata*) rappresenta situazioni di equilibrio instabile.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Per determinare le curve è necessario valutare come varia a con P ,
risolvendo l'equazione differenziale



$$M_i(z) = K(v''(z)) \cdot v''(z) \rightarrow \text{Curvatura}$$

$$M_e(z) = P \cdot [e_0 + (a - v(z))]$$

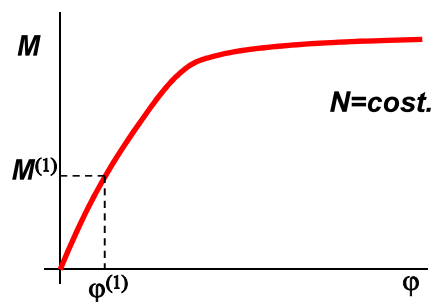
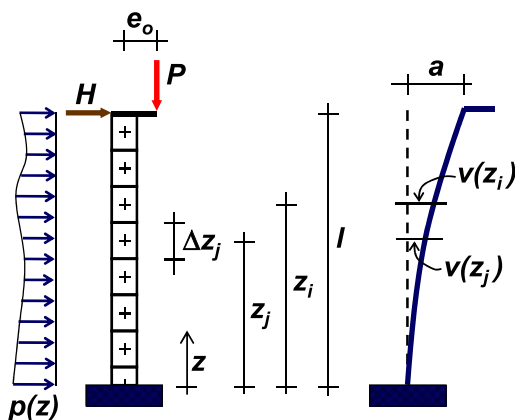
\downarrow
Rigidezza flessionale

$$K(v''(z)) \cdot v''(z) + P \cdot v(z) = P \cdot [e_0 + a]$$

- Procedura iterativa \Rightarrow Metodo Generale
- Procedure semplificate \Rightarrow Metodo Colonna Modello
 \Rightarrow Metodo Stato Equilibrio

METODO GENERALE

Discretizzazione dell'elemento in un numero finito di conci
Procedimento iterativo che conduce al rispetto di equilibrio
e congruenza in ogni concio



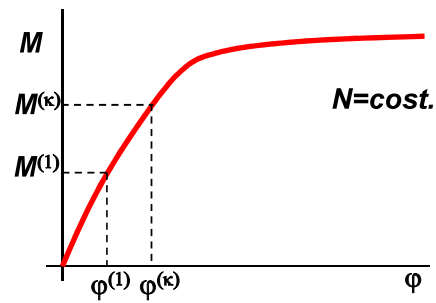
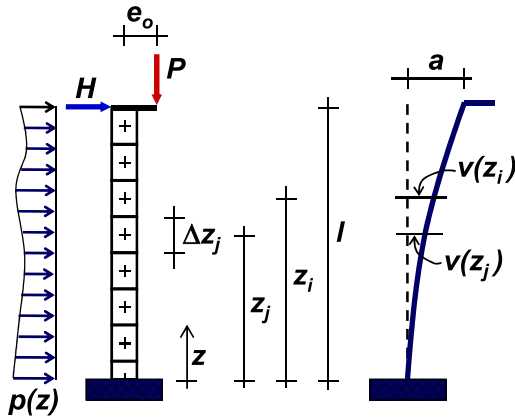
$$M^I(z_i) = N \cdot e_0 + H \cdot (l - z_i) + \int_{z_i}^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

$$M^{(1)}(z_i) = M^I(z_i)$$

$$v^{(1)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \phi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

$$a^{(1)} = \sum_{j=1}^n \phi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$

METODO GENERALE (passo k)



$$M^l(z_i) = N \cdot e_o + H \cdot (l - z_i) + \int_{z_i}^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

$$M^{(k)}(z_i) = M^l(z_i) + N \cdot [a^{(k-1)} - v^{(k-1)}(z_i)]$$

$$v^{(k)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

$$a^{(k)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$

$$\frac{M^{(k)} - M^{(k-1)}}{M^{(k)}} \leq \varepsilon_M$$

$$\frac{a^{(k)} - a^{(k-1)}}{a^{(k)}} \leq \varepsilon_a$$

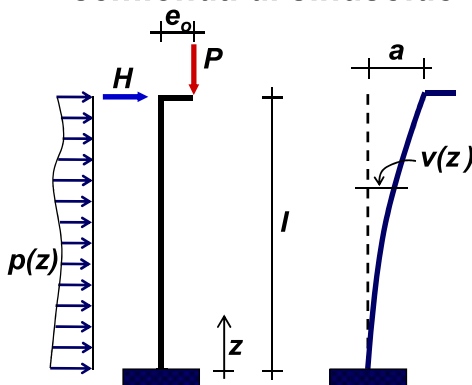
METODO DELLA COLONNA MODELLO

Applicabile a:

- elementi isostatici o riconducibili a tali
- sezione trasversale costante
- sforzo normale costante lungo l'asse

Si assegna a priori la deformata

- semionda di senoide con ampiezza indeterminata a



$$l_o = \beta \cdot l$$

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_o}\right)$$

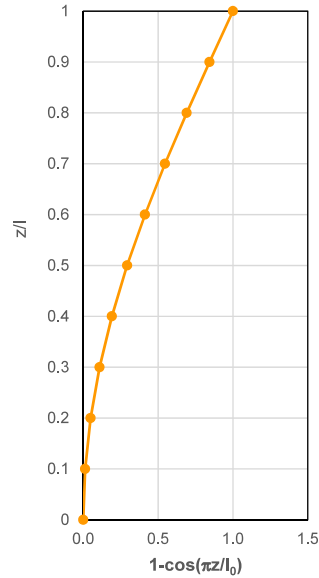
METODO DELLA COLONNA MODELLO

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_0}\right)$$

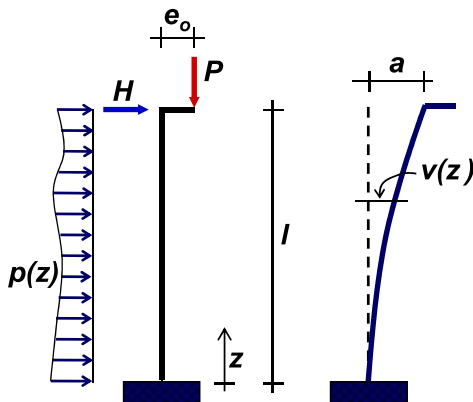
Esempio:



z/l	z/l_0	$\cos(\pi z/l_0)$	$1 - \cos(\pi z/l_0)$
0	0	1.000	0.000
0.1	0.05	0.988	0.012
0.2	0.1	0.951	0.049
0.3	0.15	0.891	0.109
0.4	0.2	0.809	0.191
0.5	0.25	0.707	0.293
0.6	0.3	0.588	0.412
0.7	0.35	0.454	0.546
0.8	0.4	0.309	0.691
0.9	0.45	0.156	0.844
1	0.5	0.000	1.000



METODO DELLA COLONNA MODELLO



Deformata:

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_0}\right)$$

Rotazione:

$$v'(z) = a \cdot \frac{\pi}{l_0} \sin \frac{\pi z}{l_0}$$

Curvatura:

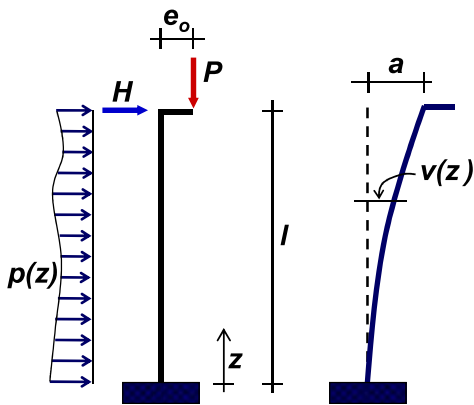
$$v''(z) = a \cdot \frac{\pi^2}{l_0^2} \cos \frac{\pi z}{l_0}$$

Indicando con $\varphi_0 = v''(0)$ la curvatura della sezione di base

(per $z=0$, $\cos \pi z/l_0 = 1$)

$$a = \frac{l_0^2}{\pi^2} \varphi_0$$

MOMENTO TOTALE ESTERNO



$$a = \frac{l_o^2}{\pi^2} \varphi_o$$

Per la sezione di base

$$M^I = N \cdot e_o + H \cdot l + \int_0^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

$$M^{II} = P \cdot a$$

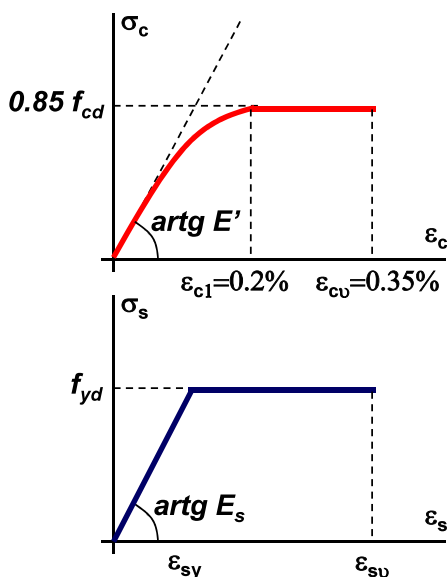
$$M_e = M^I + M^{II}$$

$$M^{II} = \frac{P \cdot l_o^2}{\pi^2} \cdot \varphi_o \approx \frac{P \cdot l_o^2}{10} \cdot \varphi_o$$

$$M_e(N, \varphi_o) \leq M_i(N, \varphi_o)$$

LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI

Per calcolare i diagrammi $M_i-\varphi-N$ si considerano i legami



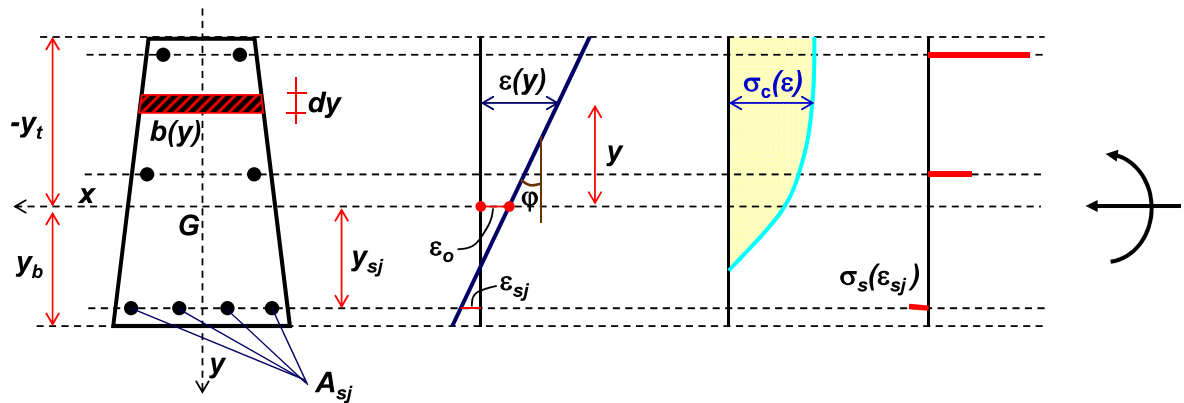
$$\sigma_c = 0.85 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \cdot f_{cd}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad E' = 850 \cdot f_{cd} \quad (\ll E_c)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

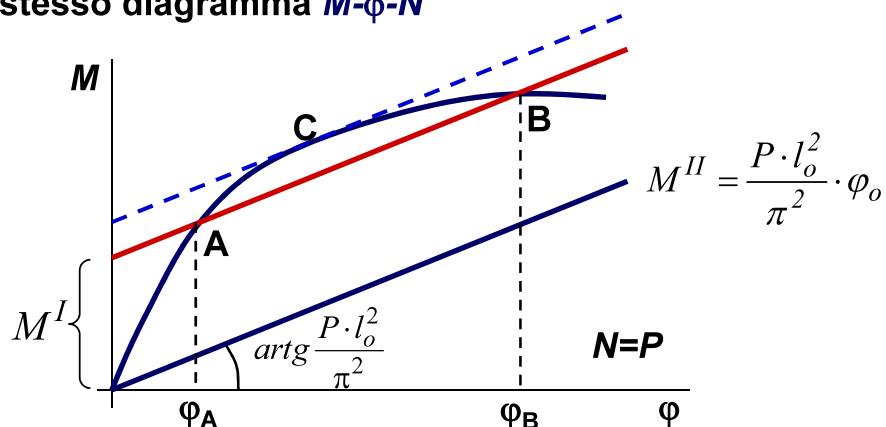
CALCOLO DIAGRAMMI $M-\phi-N$



$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 - \varphi \cdot y \\ N = \int_{-y_t}^{y_b} b(y) \cdot \sigma_c(\varepsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m A_{sj} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{sj}) \\ M = \int_{-y_t}^{y_b} y \cdot b(y) \cdot \sigma_c(\varepsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m y_{sj} \cdot A_{sj} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{sj}) \end{cases}$$

VERIFICA SEZIONE AL PIEDE

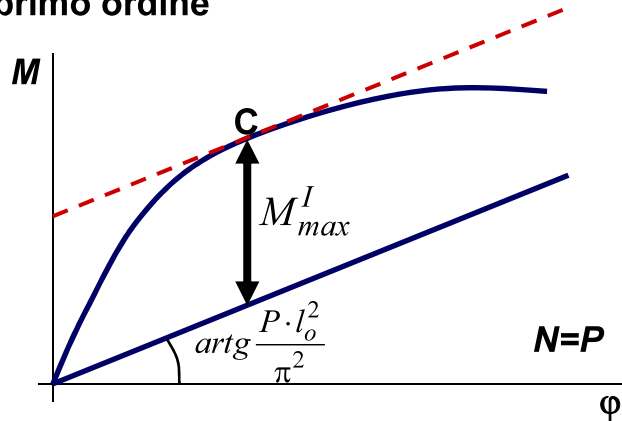
Si riportano le curve del momento interno M_i e del momento esterno M_e su uno stesso diagramma $M-\phi-N$



- A** equilibrio stabile
- B** equilibrio instabile
- C** equilibrio limite

MASSIMO MOMENTO DI 1° ORDINE

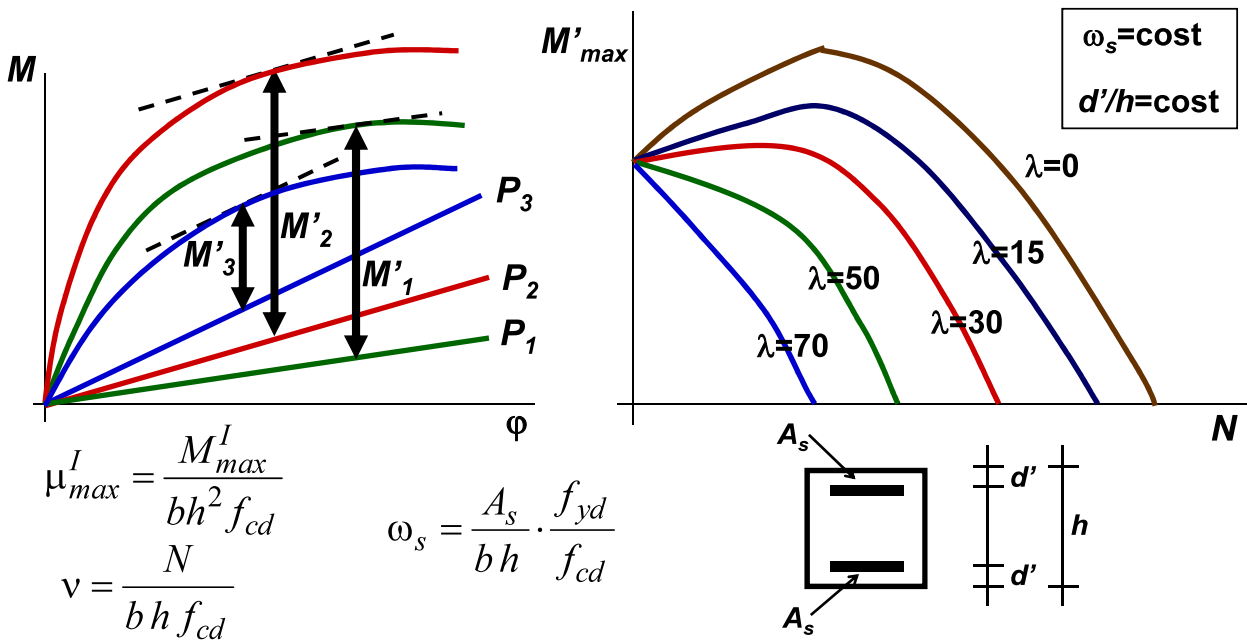
Il metodo della colonna modello consente di determinare il massimo momento del primo ordine



$$M_{max}^I = \max(M_i - M^{II})$$

DOMINI DI INTERAZIONE RIDOTTI

Calcolando i momenti di 1° ordine per vari valori di N



$$\mu_{max}^I = \frac{M_{max}^I}{bh^2 f_{cd}}$$

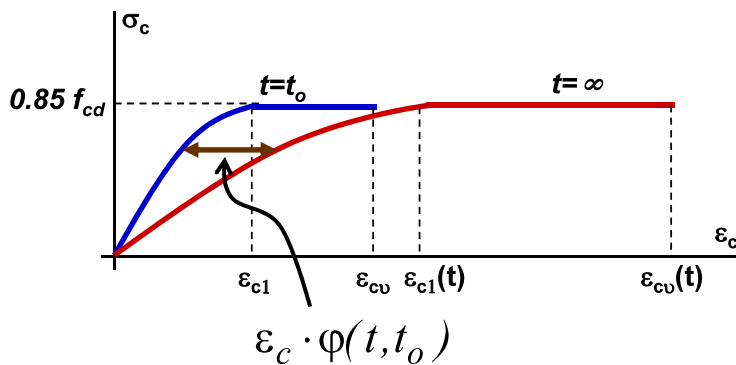
$$v = \frac{N}{bh f_{cd}}$$

$$\omega_s = \frac{A_s}{bh} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

INFLUENZA DELLA VISCOSITA'

La viscosità del calcestruzzo causa un incremento delle deformazioni flessionali aumentando, quindi, gli effetti di 2° ordine

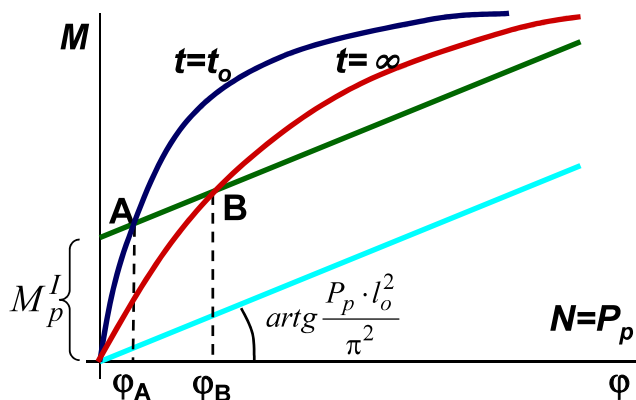
Un metodo approssimato per valutare questi effetti si basa sull'ipotesi di considerare per il calcestruzzo una legge costitutiva variata proporzionalmente al coefficiente di viscosità



$$\varepsilon_{c1}(t) = \varepsilon_{c1} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$$

$$\varepsilon_{cu}(t) = \varepsilon_{cu} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$$

ECCENTRICITA' ADDIZIONALE PER VISCOSITA'



P_p quota di carico permanente

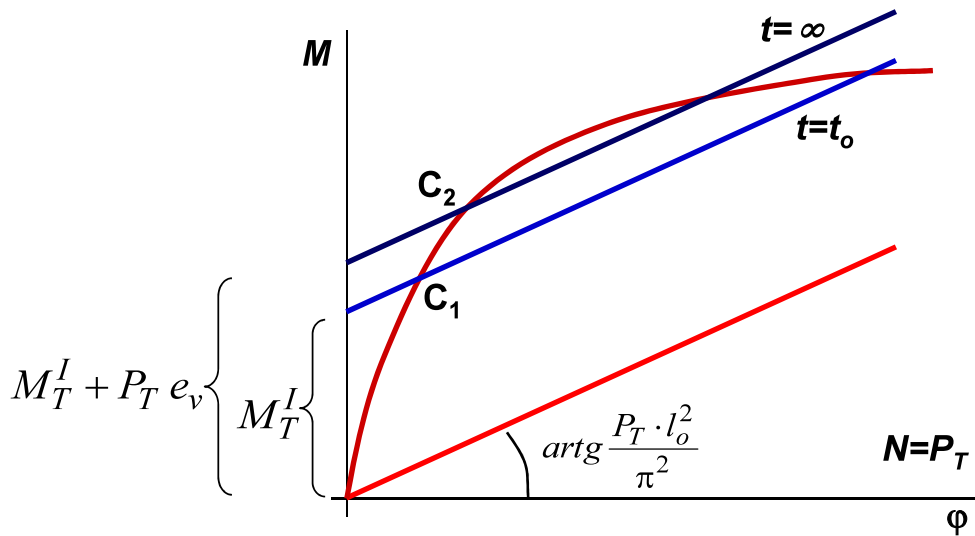
$$e_v = \frac{l_o^2}{\pi^2} \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$$

Più semplicemente è possibile definire e_v sulla base di una analisi viscoelastica lineare (Model Code 1990)

$$e_v = \frac{M_p^I}{N_p} \cdot \left[\exp \left(\frac{N_p}{N_E - N_p} \cdot \phi(t, t_0) \right) - 1 \right]$$

VERIFICA SEZIONE AL PIEDE

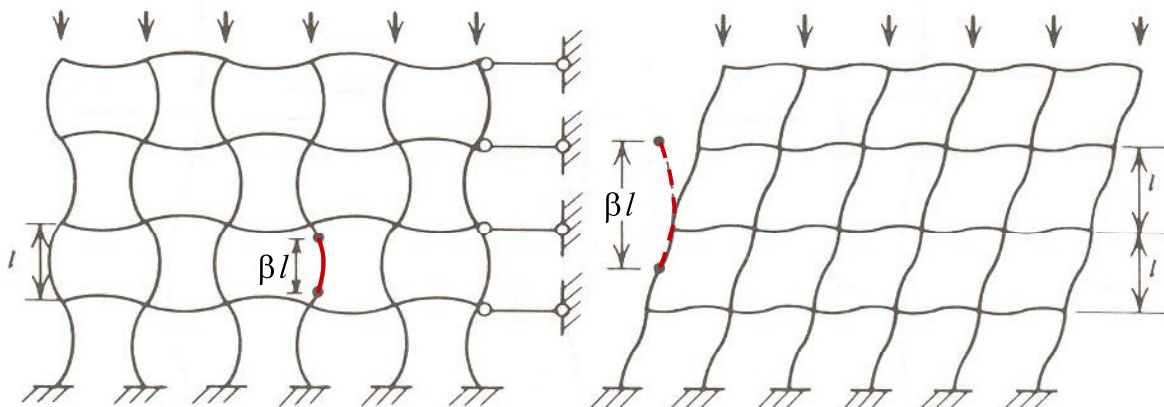
P_T carico totale (perm. + var.)



APPLICAZIONE METODI PER ELEMENTI SINGOLI

I metodi visti possono essere utilizzati anche per verificare i piedritti di strutture intelaiate calcolando un'equivalente lunghezza di libera inflessione l_o

$$l_o = \beta \cdot l$$



Telai a nodi fissi

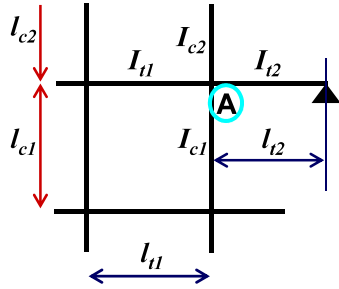
Telai a nodi mobili

METODO GRAFICO PER IL CALCOLO DI l_o

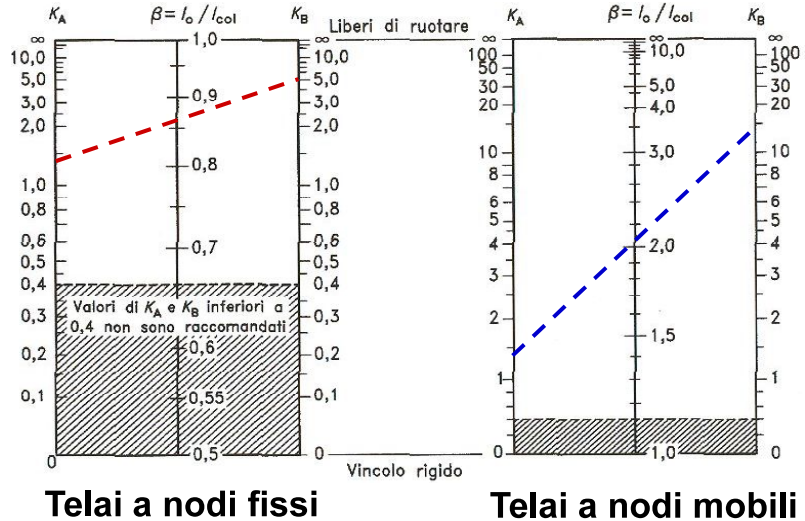
La lunghezza di libera inflessione l_o può essere ricavata con i nomogrammi proposti da Jackson e Moreland

$$k_A(o k_B) = \frac{\sum EI_c/l_c}{\sum \alpha EI_t/l_t}$$

$$l_o = \beta \cdot l$$



- $\alpha=1.0$ vincolo elast. o rigido
- $\alpha=0.5$ libero di ruotare
- $\alpha=0$ mensola



METODO GRAFICO PER IL CALCOLO DI l_o

La lunghezza di libera inflessione l_o può essere ricavata anche utilizzando le formule seguenti:

Telai a nodi fissi

$$k_A(o k_B) = \frac{\sum EI_c/l_c}{\sum \alpha EI_t/l_t}$$

$$l_o = \beta \cdot l$$

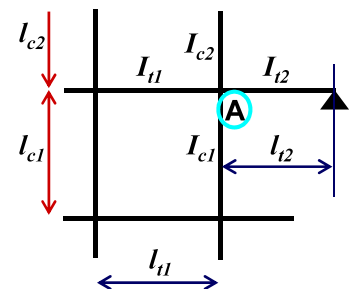
$$\beta = \min \begin{cases} 0.7 + 0.05 \cdot (k_A + k_B) \\ 0.85 + 0.05 \cdot k_{min} \end{cases} \quad (\leq 1.0)$$

- $\alpha=1.0$ vincolo elast. o rigido
- $\alpha=0.5$ libero di ruotare
- $\alpha=0$ mensola

Telai a nodi mobili

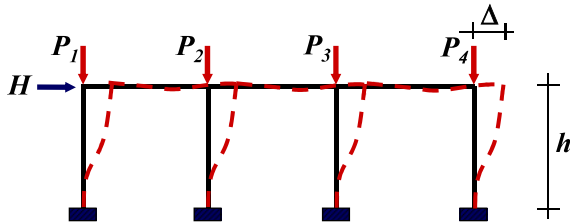
$$\beta = \frac{40 - k_A - k_B}{40} \cdot \sqrt{\frac{2 + k_A + k_B}{2}} \quad \text{per } \frac{k_A + k_B}{2} < 2$$

$$\beta = 0.9 \cdot \sqrt{\frac{2 + k_A + k_B}{2}} \quad \text{per } \frac{k_A + k_B}{2} \geq 2$$



METODO P-Δ

Per telai a maglie rettangolari è possibile utilizzare un metodo semplificato che tiene conto del 2° ordine con l'aggiunta di una forza orizzontale H .



$$H = \frac{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \cdot \Delta}{h}$$

Δ è lo spost. ottenuto da un'analisi lineare del 1° ordine

Si risolve di nuovo con l'aggiunta della forza H e si ricava un nuovo valore dello spostamento Δ ed una nuova H ; si procede così fino a convergenza.

METODO P-Δ

Per telai a più piani è possibile utilizzare un metodo semplificato che tiene conto del 2° ordine con l'aggiunta di una forza orizzontale ΔH .

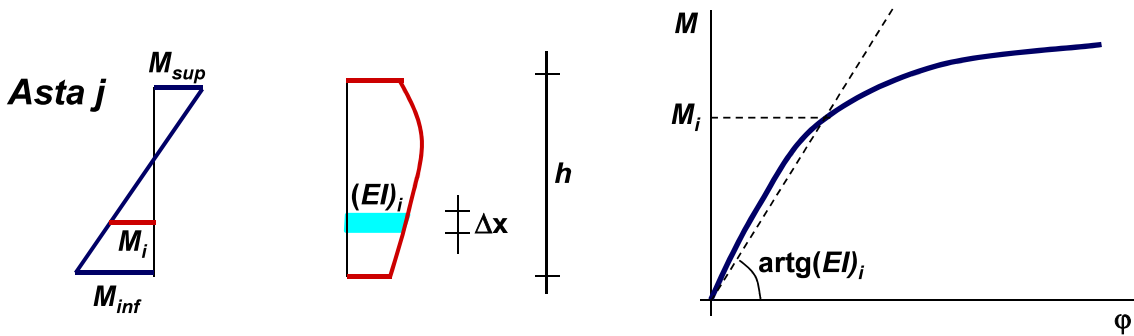
$$\Delta H_i = \frac{\sum_{j=1}^n N_{i-1,j} \cdot (\Delta_i - \Delta_{i-1})}{h_i} - \frac{\sum_{j=1}^n N_{i,j} \cdot (\Delta_{i+1} - \Delta_i)}{h_{i+1}}$$

$\Delta_i - \Delta_{i-1}$ è lo spost. interpiano relativo al piano i-esimo ottenuto da un'analisi lineare del 1° ordine, $N_{i,j}$ è lo sforzo assiale sul pilastro j al piano i .

Si risolve di nuovo con l'aggiunta delle forze ΔH_i e si ricava un nuovo valore degli spostamenti Δ_i ed una nuova ΔH_i ; si procede così fino a convergenza.

NON LINEARITA' MECCANICA

Per tener conto della non linearità meccanica si confrontano le rigidezze assunte con quelle equivalenti desunte dai legami $M-\phi-N$

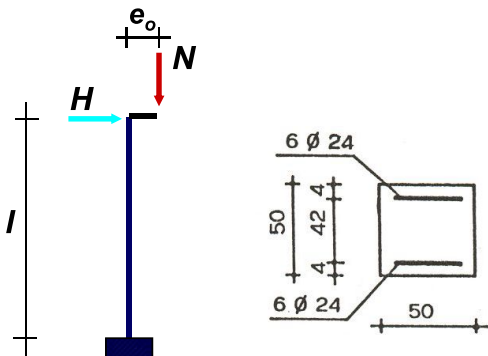


$$(EI)_{eq,j} = \frac{h}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{\Delta x}{(EI)_i} \right)}$$

$$(EI)_{adottato} \approx (EI)_{eq,j}$$

Valore rigidezza di primo tentativo	$EI = \frac{E_{cm} I_c}{2}$
-------------------------------------	-----------------------------

ESEMPIO 1: Colonna Modello



$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$\gamma_c = 1.5$

$f_{ys} = 430 \text{ MPa}$

$\gamma_s = 1.15$

$E_s = 206 \text{ GPa}$

$\varepsilon_{yd} = 0.182\%$

$N = 1200 \text{ kN}$

$I_1 = 4000 \text{ mm}^4$

$I_2 = 6500 \text{ mm}^4$

$I_3 = 9000 \text{ mm}^4$

$\lambda_1 = 55.4$

$\lambda_2 = 90.1$

$\lambda_3 = 124.7$

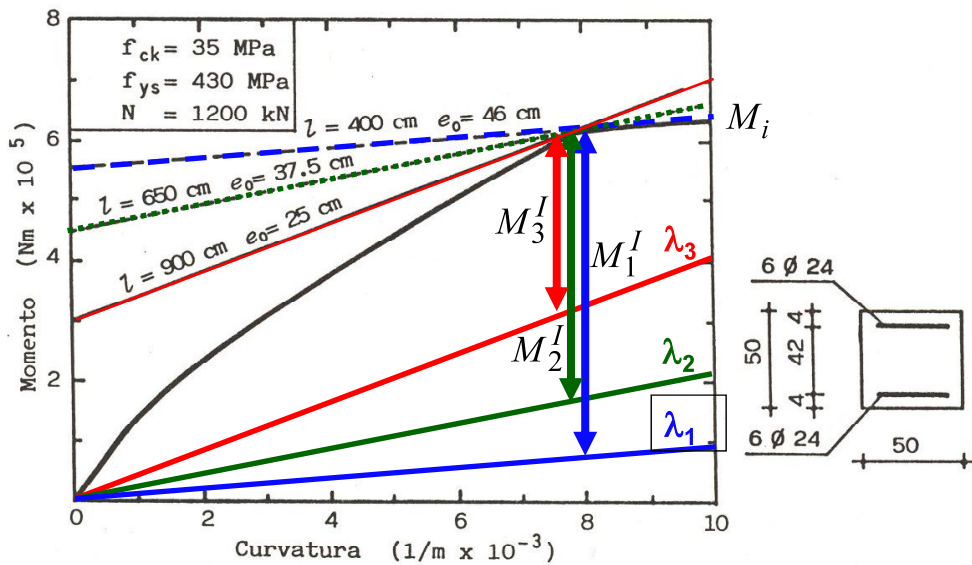
Si ricava il diagramma dei momenti interni $M_i - \phi - N$

Si determina il momento max. di 1° ordine per i tre casi

$$M_{max}^I = \max(M_i - M^{II})$$

$$\lambda = \beta l / i, \text{ con } \beta = 2 e i = (J/A)^{0.5} = 144.34 \quad (J = bh^3/12 \text{ e } A=bh)$$

ESEMPIO 1: max momento di 1° ordine

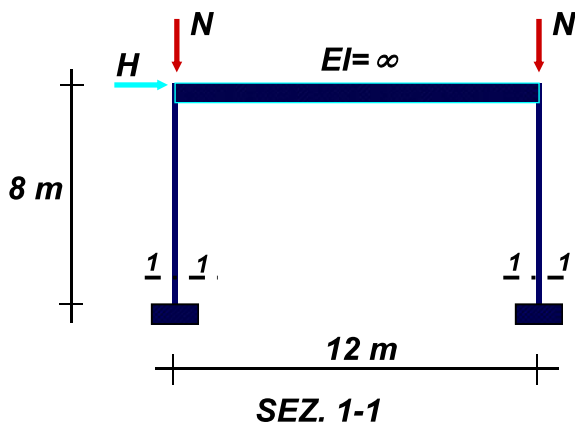


$$M_1^I = 552 \text{ kNm}$$

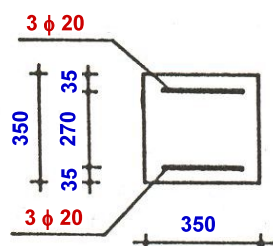
$$M_2^I = 450 \text{ kNm}$$

$$M_3^I = 300 \text{ kNm}$$

ESEMPIO 2: Portale a nodi spostabili



N (kN)	900
H (kN)	39.24
fys (MPa)	430
fck (MPa)	35
gammas	1.15
gammac	1.5
fyd (MPa)	374
0.85 fcd	19.8
Es (MPa)	206000
Ecm (MPa)	33500



Parametri caratteristici

Ic (mm ⁴)	1250520833
Ecm Ic (Nmm ²)	4.18924E+13
Ecm Ic/2 (Nmm ²)	2.09462E+13

$$\Delta = (H h^3 / 12EI) / n_c$$

$$\Delta(\text{passo1}) = (39.24 \cdot 10^3 \cdot 8000^3 / 12 \cdot 2.09462E+13) / 2 = 39.97$$

$$H = (N+N) \Delta / h$$

$$H(\text{passo1}) = (2 \cdot 900 \cdot 10^3 \cdot 39.97 / 8000) = 8993 \text{ kN}$$

ESEMPIO 2: Portale a nodi spostabili

Prima fase - Non linearità geometrica e linearità meccanica

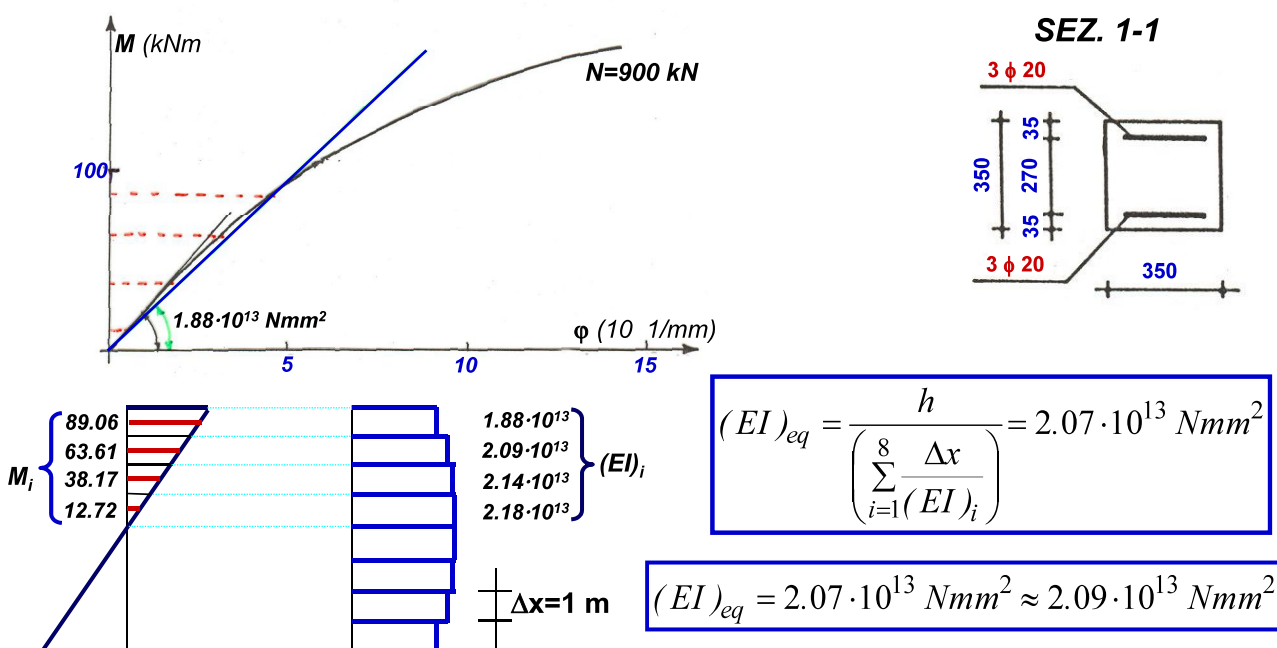
Passo 1		Passo 4	
Delta (mm)	39.97	Delta (mm)	51.70
DH (kN)	8.99	DH (kN)	11.63
Passo 2		Passo 5	
Delta (mm)	49.12	Delta (mm)	51.81
DH (kN)	11.05	DH (kN)	11.66
Passo 3		Passo 6	
Delta (mm)	51.22	Delta (mm)	51.84
DH (kN)	11.53	DH (kN)	11.66

Mmax (kNm) 101.8

$$M = Hh / 2 / n_c = (39.24 + 11.66) * 8 / 2 / 2 = 101.8 \text{ kNm}$$

ESEMPIO 2: Portale a nodi spostabili

Seconda fase – influenza non linearità meccanica



Verifica O.K.