FUNZIONI GENERATRICI di trasf. canoniche

Consideriamo la trasf.

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} \end{cases}$$

Vediamo che possiamo invertire la prima eq. per ricavare $\tilde{p}$ in funzione di p. Otteniamo

$$\tilde{p} = \frac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}}$$

Se poi sostituiamo nella seconda eq. abbiamo

$$q = p\,\mathrm{tg}\,\tilde{q}$$

Quindi un modo equivalente di dare la trasf. è fornire le relazioni

$$\begin{cases} \tilde{p} = \dfrac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}} \\ q = p\,\mathrm{tg}\,\tilde{q} \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \tilde{p} = \tilde{p}(p,\tilde{q}) \\ \hat{q} = \tilde{q}(p,\tilde{q}) \end{cases}$$

In questo modo posso usare $(p,\tilde{q})$ come coord. indipendenti sullo spazio delle fasi (anche se non sono coord. canoniche, cioè le eq. del moto per i moti $(p(t),\tilde{q}(t))$ espresse in queste coord. non sono nella forma delle eq. di Hamilton).

Questa cosa la posso generalizzare a un caso generico e scegliendo come coord. indip. tra le diverse coppie

$(q,\tilde{q})$ $\quad(\tilde{p},q)$ $\quad(p,\tilde{q})$ $\quad(p,\tilde{p})$!

Facciamo la scelta $(\tilde{p}, q)$ come coordinate indipendenti e diamo la trasf. di coord. nella forma

$$\begin{cases} p_h = \rho_h(\tilde{p}, q, t) \\ \tilde{q}_k = \tilde{\mu}_k(\tilde{p}, q, t) \end{cases} \xrightarrow{\text{inversione}} \quad \begin{aligned} p_h &= u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \equiv \rho_h(\tilde{p}, v(\tilde{p}, \tilde{q}, t), t) \\ q_k &= v_k(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{aligned}$$

Possiamo pensare di definire le funzioni ρ_h e $\tilde{\mu}_k$ a partire da una funzione $F_2(\tilde{p}, q, t)$ come

$$\rho_h(\tilde{p}, q, t) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\mu_k(\tilde{p}, q, t) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k}(\tilde{p}, q, t)$$

Per invertire $\tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}, q, t)$ nelle q, bisogna che $\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_h \partial q_k}\right) \neq 0$.

<u>Prop</u>. Quando una trasf. di coord. sullo sp. delle fasi è definita in maniera implicita da

$$(\circ) \quad \begin{cases} p_h = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t) \\ \tilde{q}_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k}(\tilde{p}, q, t) \end{cases} \quad \text{con } \det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p} \partial q}\right) \neq 0$$

allora tale trasf. è CANONICA con $K = \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.

La funzione $F_2(\tilde{p}, q, t)$ è detta FUNZIONE GENERATRICE della trasf. canonica.

Dim. Riscriviamo (0) in termini delle funz. $u(\tilde{p},\tilde{q},t)$ e $v(\tilde{p},\tilde{p},t)$ che def. la trasf. canonica $p = u(\tilde{p},\hat{q},t)$ e $q = v(\tilde{p},\tilde{q},t)$

$$(0)' \begin{cases} u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, v(\tilde{p},\tilde{q},t),t) \\ \tilde{q}_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k}(\tilde{p}, v(\tilde{p},\hat{q},t),t) \end{cases}$$

Affinché sia canonica, dobbiamo dimostrare che le par. di Poisson fondam. sono preservate, cioè che

$$\{v_h, u_k\} = \delta_{hk} \qquad \{v_h, v_k\} = 0 \qquad \{u_h, u_k\} = 0$$

Per far ciò deriviamo prima le $(0)'$, ottenendo altre relazioni che le funz. u e v devono soddisfare:

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial u_h}{\partial \tilde{p}_l} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial \tilde{p}_l} + \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial q_m} \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{p}_l}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial u_h}{\partial \tilde{q}_l} = \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial q_m} \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{q}_l}$$

$$\begin{cases} u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, v(\tilde{p},\tilde{q},t),t) \\ \tilde{q}_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k}(\tilde{p}, v(\tilde{p},\hat{q},t),t) \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \delta_{kl} = \sum_m \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial q_m} \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{q}_l}$$

$$\text{(IV)} \quad 0 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial \tilde{p}_l} + \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial q_m} \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{p}_l}$$

Definiamo

$$A_{hm} \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial q_m} \qquad B_{km} \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial q_m} \qquad C_{kl} \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial \tilde{p}_l}$$

Allora:

$$(\mathrm{III}) \Rightarrow \quad \frac{\partial v_m}{\partial \tilde q_l} = (B^{-1})_{ml}$$

$$(\mathrm{IV}) \Rightarrow \quad \frac{\partial v_m}{\partial \tilde p_l} = -(B^{-1}C)_{ml}$$

$$(\mathrm{II}) \Rightarrow \quad \frac{\partial u_n}{\partial \tilde q_l} = (AB^{-1})_{nl}$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \quad \frac{\partial u_n}{\partial \tilde p_l} = (B^T)_{nl} - (AB^{-1}C)_{nl}$$

In particolare, da qte relaz possiamo ricavare lo Jacobiano della trasf. can. $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde x_j}$

$$J = \begin{pmatrix} B^T - AB^{-1}C & AB^{-1} \\ -B^{-1}C & B^{-1} \end{pmatrix}$$

Possiamo ora calcolare le par. di Poisson fondamentali:

$$\{v_m, u_n\} = \sum_l \left(\frac{\partial v_m}{\partial \tilde q_l}\frac{\partial u_n}{\partial \tilde p_l} - \frac{\partial v_m}{\partial \tilde p_l}\frac{\partial u_n}{\partial \tilde q_l} \right) =$$

$$= \Big[\underbrace{B^{-1}(B}_{=\mathbb{1}} - \cancel{\underbrace{C^T}_{=C} B^{-T}} \underbrace{A^T}_{=A}) + B^{-1} \cancel{C B^{-T}} A^T \Big]_{mn}$$

$$= \delta_{mn}$$ ← In particolare, la trasf. con. è UNIVALENTE

$$\{v_m, v_n\} = \left[-B^{-1}C^T B^{-T} + B^{-1} C B^{-T} \right]_{mn} = 0$$

$$\{u_m, u_n\} = \left[AB^{-1}(B - C^T B^{-T} A^T) - (B^T - AB^{-1}C) B^{-T} A^T \right] = 0$$

La nuova Hamiltoniana è $K(\tilde p, \tilde q, t) = \tilde H(\tilde p, \tilde q, t) + K_0(\tilde p, \tilde q, t)$.

Dove $K_0(\tilde p, \tilde q, t)$ è t.c. $E \nabla_{\tilde x} K_0 = \frac{\partial \tilde w}{\partial t}(w(\tilde x, t), t)$ (*).

Dimostriamo che $K_0(\tilde p, \tilde q) = \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde p, v(\tilde p, \tilde q, t))$ soddisfa (*)

- Calcoliamo il termine di destra in $(*)$:

$$w_i(\tilde{w}(x,t),t) = x_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriviamo} \\ \partial/\partial t}}{\Rightarrow} \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = -J\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

- Quindi dimostrare $(*)$ corrisponde a dimostrare che

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -JE\nabla_{\tilde{x}}\frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (*)'$$

- Deriviamo $(\circ)'$ per t e definiamo $a_k = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial t}$ $\quad b_h = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial t}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_h}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial t} + \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial q_m}\frac{\partial v_m}{\partial t} \\ 0 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial t} + \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_k \partial q_m}\frac{\partial v_m}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b - AB^{-1}a \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -B^{-1}a \end{cases}$$

- $$\frac{\partial w}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - AB^{-1}a \\ -B^{-1}a \end{pmatrix}$$

- $$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}_k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial t \partial \tilde{p}_k} + \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial t \partial q_m}\frac{\partial v_m}{\partial \tilde{p}_k} = a_k - (B^{-1}C)^T b$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_h}\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = \sum_m \frac{\partial^2 F_2}{\partial t \partial q_m}\frac{\partial v_m}{\partial \tilde{q}_h} = (B^{-T}b)_h$$

$$\Rightarrow \nabla_{\tilde{x}}\frac{\partial F_2}{\partial t} = \begin{pmatrix} a - CB^{-T}b \\ B^{-T}b \end{pmatrix}$$

- $$-JE\nabla_{\tilde{x}}\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\begin{pmatrix} B^T - AB^{-1}C & AB^{-1} \\ -B^{-1}C & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - CB^{-T}b \\ B^{-T}b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -B^T + AB^{-1}C & -AB^{-1} \\ B^{-1}C & -B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-T}b \\ a - CB^{-T}b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b - AB^{-1}CB^{-T}b - AB^{-1}a + AB^{-1}CB^{-T}b \\ -B^{-1}CB^{-T}b - B^{-1}a + B^{-1}CB^{-T}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - AB^{-1}a \\ -B^{-1}a \end{pmatrix}$$

il che verifica $(*)'$.

//

Funzioni tipo F_2 generano la maggior parte delle trasf. interessanti:

- Identità: $F_2(\tilde{p}, q, t) = \sum_k \tilde{p}_k q_k$: $\quad p_h = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_h} = \tilde{p}_h \qquad \tilde{q}_h = \dfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = q_h$

- Trasf. puntuali estese : $F_2 = \sum_k \tilde{p}_k \hat{v}_k(q, t)$:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_k \tilde{p}_k \frac{\partial \hat{v}_k(q,t)}{\partial q_h} \qquad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = \hat{v}_h(q, t)$$

Con dim. analoga a F_2, si può dim. che trasf. canoniche in forma implicita si possono ottenere anche con funz. di altro tipo:

$$F_1(q, \tilde{q}, t) \to \begin{cases} p_h = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_h} \\ \tilde{p}_k = -\dfrac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_k} \end{cases} \qquad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$F_3(p, \tilde{q}, t) \to \begin{cases} q_h = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_h} \\ \tilde{p}_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_k} \end{cases} \qquad F_4(p, \tilde{p}, t) \to \begin{cases} q_h = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_h} \\ \tilde{q}_k = \dfrac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_k} \end{cases}$$

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t} \qquad\qquad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

EQ. DI HAMILTON-JACOBI

Le trasformazioni canoniche (o) coniugano l'Hamiltoniana $H(p,q,t)$ nell'Hamiltoniana

$$K(\tilde p,\tilde q,t) = H(u(\tilde p,\tilde q,t), v(\tilde p,\tilde q,t),t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde p, v(\tilde p,\tilde q,t),t)$$

↳ Qta espressione può essere anche scritta nelle coord. $\tilde p, q$:

$$K\left(\tilde p, \frac{\partial F_2}{\partial \tilde p}, t\right) = H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde p, q) \qquad (*)$$

Un problema importante da risolvere è:

→ dato un sist. Ham. con Hamiltoniana H, qual è la trasf. canonica (se $\exists$) che coniuga H in $\underline{K=0}$?

Trovata qta trasf. can., diciamo $p = u(\tilde p,\tilde q,t)$ e $q = v(\tilde p,\tilde q,t)$ che coniuga H in $K=0$, allora le eq. di Hamilton in K sono triviali:

$$\begin{cases} \dot{\tilde p}_k = 0 \\ \dot{\tilde q}_h = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tilde p_k(t) = \tilde p_k^0 \\ \tilde q_h(t) = \tilde q_h^0 \end{cases}$$

Nelle coordinate (p,q) il moto è dunque dato da

$$\begin{cases} p_\ell(t) = u_\ell(\tilde p^0, \tilde q^0, t) \\ q_\ell(t) = v_\ell(\tilde p, \tilde q^0, t) \end{cases}$$

← moto determinato completam. dalla trasf. canonica

Le funzioni generatrici ci danno un'equazione che ci permette di determinare tale trasf. canonica.

Infatti, guardando la relazione $(\star)$ si vede che se $F_2(\tilde{p},q,t)$ soddisfa

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}(\tilde{p},q,t),\ q\ ,t\right)+\frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p},q)=0 \qquad (\neq)$$

allora F_2 genera una trasf. can. che coniuga H in $K=0$.

L'eq. $(\neq)$ è chiamata EQ. DI HAMILTON-JACOBI ed è un'eq. alle derivate parziali per F_2.
Risolvere l'eq. di Hamilton-Jacobi è un modo alternativo di risolvere le equazioni del moto.

SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Ham. a n gradi di libertà è detto INTEGRABILE se esiste una trasf. canonica

$$p_h = u_h(J,\varphi) \qquad q_h = v_h(J,\varphi)$$

con u e v periodiche nelle coord. φ_h

con $(J_1,\dots,J_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$ (TORO n-dimensionale) dette variabili AZIONE-ANGOLO, t.c. l'Hamiltoniana coniugata ad $H(p,q)$ è una funz. K che dipende solo dalle $J \rightarrow K = K(J)$.

Allora nelle coord. AZIONE-ANGOLO le eq. di Ham. sono (φ sono coord. cicliche)

$$\begin{cases} \dot{J}_h = 0 \\ \dot{\varphi}_h = \frac{\partial K(J)}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} J_h(t) &= J_h^0 \\ \varphi_h(t) &= \omega_h(J^0)\,t + \varphi_0 \end{aligned}$$

In qsta situazione, $J_1,\dots,J_n$ sono n COST. DEL MOTO che sono in INVOLUZIONE, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h,k$.

T^n è un TORO n-dim. $\Big(T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}}\Big)$:

le variabili φ_h sono degli ANGOLI di PERIODO 2π

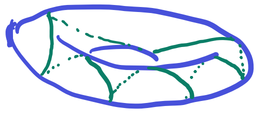
$\Rightarrow$ $\varphi_h(t)$ sono funzioni PERIODICHE di periodo $T_h = \dfrac{2\pi}{\omega_h(J)}$

(T_h è il tempo in cui $\varphi_h(T_h) = \varphi_h(0) + 2\pi$.)

$\rightarrow$ Per un SIST. INTEGRABILE, le traiettorie in T^*Q sono LIMITATE e QUASI-PERIODICHE. Le traiettorie giacciono su insiemi di livello $J_h = J_h^0$ e sono dei cerchi nelle dirz. φ_h.

Tali insiemi di livello sono copie di T^n. Le traiettorie sono curve in tale T^n.

Es. $n=2$ T^2



Il moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_h è RAZIONALE.

Siccome le traiettorie sono indipendenti dal sistema di coord. che uso per descriverle, il moto in (p,q) è pure un moto limitato e quasi-periodico (è ovviam. difficile vederlo in tal coord.).

TEOREMA. Preso sist. Ham. a n gradi di lib.

- Ammettiamo che ESISTANO n COST. DEL MOTO $f_i(p,q)$ $i=1,\dots,n$ INDIPENDENTI e IN INVOLUZIONE $\{f_i,f_j\}=0$ $\forall i,j=1,\dots,n$

- Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, l'insieme di livello $\mathcal{M}_{\bar{a}}=\{f_i(p,q)=a_i\}$ sia COMPATTO e CONNESSO

$\Rightarrow$ Il sistema è INTEGRABILE

(Arnold)

$M_{\bar{a}}$ è parametrizzato dagli angoli φ_h. Variando φ_h ottengo una curva γ_h in $M_{\bar{a}}$.

Def. Le VARIABILI AZIONE sono def. da $J_h=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_h}\sum_{l=1}^{n}p_l\,dq_l$

J_h dipendono solo dalle cost. del moto f_i e sono anche loro indip. e in involuzione.

→ si dimostra che le variabili CANONICAM. CONIUGATE alle J_h sono proprio ANGOLI DI PERIODO 2π.

$$\Rightarrow \quad T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

Esempi di sistemi INTEGRABILI

- Corpo in un campo di FORZE CENTRALI con $V = V(r)$ in $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$,

  Esistono 3 cost. del moto in involuzione:

  $$\{H, M_z\} = 0 \qquad \{H, \bar{M}^2\} = 0 \qquad \{M_z, \bar{M}^2\} = 0.$$

- Trottola di Lagrange $(n=3)$.

  Esistono 3 cost. del moto in involuzione:

  $$\{H, p_\varphi\} = 0 \qquad \{H, p_\psi\} = 0 \qquad \underbrace{\{p_\varphi, p_\psi\} = 0}$$

  p_φ e p_ψ sono mom. coniugati

- Tutti i sistemi a 1-dim. $(n=1)$ con H indip. da t.

  Esiste 1 cost. del moto H.

<u>Osservazione</u>. I sistemi integrabili sopra elencati sono in genere risolvibili con altri approcci rispetto quello Hamiltoniano. Uno potrebbe domandarsi perché sviluppare un tale formalismo allora.

Inoltre, i sistemi in natura sono tipicamente non-integrabili. Però, spesso sono APPROSSIMABILI con sist. integrabili e il formalismo Hamiltoniano è molto utile per trattare una tale approssimazione (TEORIA DELLE PERTURBAZIONI).

APPENDICE: Funzione $F_1(q,\tilde{q},t)$

Consideriamo una funzione $F_1(q,\tilde{q},t)$; essa definisce una trasf. di coord. in maniera implicita con

$$
\left\{\begin{aligned}
p_h(q,\tilde{q},t) &= \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q,\tilde{q},t) \\
\tilde{p}_k(q,\tilde{q},t) &= -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_k}(q,\tilde{q},t)
\end{aligned}\right.
\quad (\star) \quad \text{con} \quad \det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde{q}_k}\right) \neq 0
$$

Verifichiamo che una trasf. così definita è una trasf. CANONICA.

Riscriviamo $(\star)$ in termini delle coord. $\tilde{p},\tilde{q}$ e delle funzioni $p(\tilde{p},\tilde{q},t)$, $q(\tilde{p},\tilde{q},t)$:

$$
\left\{\begin{aligned}
p_h(\tilde{p},\tilde{q},t) &= \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q(\tilde{p},\tilde{q},t),\tilde{q},t) \\
\tilde{p}_k &= -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_k}(q(\tilde{p},\tilde{q},t),\tilde{q},t)
\end{aligned}\right.
$$

Derivando in $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$, si ottengono le seguenti relaz. che le $p(\tilde{p},\tilde{q},t)$ e $q(\tilde{p},\tilde{p},t)$ soddisfano

$$
\frac{\partial p_h}{\partial \tilde{p}_\ell} = \sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{p}_\ell} \qquad\qquad \delta_{k\ell} = -\sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{p}_\ell}
$$

$$
\frac{\partial p_h}{\partial \tilde{q}_\ell} = \sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{q}_\ell} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde{q}_\ell} \qquad\qquad 0 = \sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{q}_\ell} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial \tilde{q}_\ell}
$$

Definiamo

$$A_{hm} \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial q_m} \qquad B_{km} \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial q_m} \qquad C_{ke} \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial \tilde{q}_e}$$

Allora:

$$\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{p}_e} = -(B^{-1})_{me} \qquad \frac{\partial q_m}{\partial \tilde{q}_e} = -(B^{-1}C)_{me}$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial \tilde{p}_e} = -(AB^{-1})_{he} \qquad \frac{\partial p_h}{\partial \tilde{q}_e} = -(AB^{-1}C)_{he} + B^T_{he}$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} -AB^{-1} & -AB^{-1}C + B^T \\ -B^{-1} & -B^{-1}C \end{pmatrix}$$

Ora siamo pronti a dimostrare che le Parentesi di Poisson fondamentali sono PRESERVATE:

$$\{q_m, p_h\} = \sum_e \left(\frac{\partial q_m}{\partial \tilde{q}_e}\frac{\partial p_h}{\partial \tilde{p}_e} - \frac{\partial q_m}{\partial \tilde{p}_e}\frac{\partial p_h}{\partial \tilde{q}_e} \right) =$$

$$= \sum_e (B^{-1}C)_{me}(AB^{-1})_{he} - \sum_e (B^{-1})_{me}\left((AB^{-1}C)_{he} - B^T_{he}\right)$$

$$= \left(AB^{-1}\underbrace{C^T}_{=C}B^{-T} - AB^{-1}CB^{-T} + B^{-1}B\right)_{mh} = \delta_{mh}$$

$$\{q_m, q_h\} = \sum_e (B^{-1}C)_{me} B^{-1}_{he} - \sum_e (B^{-1}C)_{he} B^{-1}_{me} =$$

$$= (B^{-1}CB^{-T})_{mh} - (B^{-1}C^TB^{-T})_{mh} = 0$$

$$\{p_m, p_h\} = \sum_e \left[(AB^{-1}C)_{me} - B^T_{me}\right](AB^{-1})_{he} - \sum_e \left[(AB^{-1}C)_{he} - B^T_{he}\right](AB^{-1})_{me} =$$

$$= (AB^{-1}CB^{-T}A^T)_{mh} - (B^TB^{-T}A)_{mh} - (AB^{-1}C^TB^{-T}A^T)_{mh} + (AB^{-1}B)_{mh} = 0$$

//

Deriviamo ora rispetto al tempo e definiamo $a_h = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial t}$, $b_k = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial t}$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial t} + \sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial t} \\ 0 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial t} + \sum_m \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_k \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial q_m}{\partial t} = -(B^{-1} b)_m$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial t} = a_h - (A B^{-1} b)_h$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \begin{pmatrix} a - AB^{-1}b \\ -B^{-1}b \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -AB^{-1} & -AB^{-1}C + B^T \\ -B^{-1} & -B^{-1}C \end{pmatrix} \leftarrow \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}$$

$$x = w(\tilde{w}(x,t),t) \rightarrow 0 = J \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -J^{-1} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = K_0 \quad \rightsquigarrow \quad E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial \tilde{q}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-T} a \\ -(CB^{-T})a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (CB^{-T})a - b \\ -B^{-T} a \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -J \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \begin{pmatrix} AB^{-1} & AB^{-1}C - B^T \\ B^{-1} & B^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (CB^{-T})a - b \\ -B^{-T} a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AB^{-1}CB^{-T}a - AB^{-1}b - AB^{-1}CB^{-T}a + a \\ B^{-1}CB^{-T}a - B^{-1}b - B^{-1}CB^{-T}a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a - AB^{-1}b \\ -B^{-1}b \end{pmatrix} \quad //$$