Logica Lezione 8

Meta-Logica

(Consistenza e Completezza)

- Abbiamo già sottolineato la differenza tra $\vdash$ e $\models$.

- Si tratta di nozioni diverse, definite in termini diversi e riferite a costruzioni diverse:

- \- Derivazioni ($\vdash$) e tavole di verità ($\models$)
- \- Sintassi ($\vdash$) e semantica ($\models$)

- Ma, allo stesso tempo, sappiamo di averli sviluppati per lo stesso scopo:

- determinare quali argomenti sono validi.

- Ci aspettiamo che entrambi colgano cosa sono gli argomenti validi.

- E ci auguriamo che diano risposte convergenti!
- Se un'argomento da A a B è logicamente valida allora:

- $A \vdash B$ **e** $A \models B$

- Analogamente, se qualcosa è una legge logica, ci aspettiamo che
- $\vdash A$ **e** $\models A$

- ,Speriamo anzi che che coincidano:
- Se A $\vdash$ B, allora A $\models$ B, e viceversa.

E se $\vdash$ A, allora $\models$ A, e viceversa.

(ovvero teoremi e tautologie coincidano).

- In altre parole, ci aspettiamo che $\vdash$ e $\models$ identifichino lo stesso insieme di argomenti.

- Ma è tutt'altro che scontato che sia così.

- Dimostrare questo (e altri fatti SULLA logica) è
- il compito della **meta-logica**.

- ("meta" per "oltre")

- Nota la differenza tra logica e meta-logica.

- L’argomenti di studio della logica:
  - quali argomenti sono validi?

- La meta-logica invece studia la logica stessa!
  - (cioè, le derivazioni e i metodi delle tavole di verità coincidono?).

- È impossibile fare meta-logica, se la logica non è definita in modo rigoroso.

- Per questo motivo la meta-logica è possibile solo se la logica è matematicamente ben definita.

- Definizioni matematiche di derivazioni, di valutazioni semantiche, di tautologia ecc...

- In questa sede, ci limitiamo ad abbozzare tali definizioni e a saltare una trattazione puramente matematica.

- Ma abbiamo detto più volte che un trattamento matematico (teorico degli insiemi) così rigoroso è possibile.

- I meta-teoremi più importanti sulla logica proposizionale sono due:

- (meta)**teorema di correttezza**

- e il

- (meta)**teorema di completezza**

Nota:

si tratta di META-teoremi e non di teoremi, perché non dimostriamo una fbf con al deduzione naturale,

ma una proprietà generale delle nostre derivazioni logiche e della nostra semantica formale.

1. Teorema di correttezza

- Supponiamo di dimostrare un teorema $\vdash$ A.

- Possiamo essere sicuri che A è sempre vero?
  - (cioè che la sua tavola di verità dà sempre 1?, cioe’ che e’ una tautologia?).

- In altre parole,
- possiamo dimostrare che
- se $\vdash A$,
-
- allora $\models A$?

- Sì.
- E questo è il teorema di correttezza.

- Dimostra che tutte le nostre derivazioni di **teoremi** dimostrano solo **tautologie**.

- Si dimostra per induzione.
  - → Quindi è fondamentale che l'insieme delle fbf sia un insieme induttivo.
  - (Saltiamo la dimostrazione)

Teorema di correttezza generale

- Possiamo anche dimostrarlo più in generale per i *sequenti*, mostrando che

- se
- $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$

- Allora
- $A_1, A_2, ..., A_n \models B$

Teorema di completezza

- Supponiamo ora di avere un argomento che che sappiamo essere *semanticamente valido*.

- Esiste anche una *derivazione* corrispondente?

- Forse si potrebbe verificare una situazione del genere:
- l'argomento è semanticamente valido,
- ma non possiamo trovare una derivazione perché, non c’e’.

- Come facciamo a sapere che le nostre derivazioni sono
- sufficientemente potenti da coprire tutti gli argomenti logicamente validi?

- Come facciamo a sapere che, se l'argomento è valido, esiste sempre una derivazione?

- Come facciamo a sapere che il nostro calcolo è quindi **completo** in questo senso?
- Cioe’ abbiamo tutte le regole che ci servono per ottenere tutti gli argomenti logicamente validi?

- Questo è il contenuto della teorema di **completezza**

- Esso afferma che se un argomento da A_1 ,A_2 ,...,A_n a B è semanticamente valido,
- allora esiste una derivazione logica dalle premesse A_1 ,A_2 ,...,A_n a B.

- In altre parole,

- il teorema di completezza afferma che
- se $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$

- allora
- $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$

- Analogamente al caso del teorema di correttzza, esiste anche una versione più ristretta del teorema di completezza:

- se una proposizione è una tautologia, allora è anche un teorema del calcolo.

  - Se $\models A$
  - allora $\vdash A$

- La dimostrazione e’ particolarmente laboriosa, e matematicamente non banale.

- (Noi saltiamo la dimostrazione)

- Si noti che, insieme, i due (meta)teoremi dicono qualcosa di molto importante sulla nostra logica e sul calcolo in particolare:

- Dicono che il nostro calcolo è **corretto** (tutti i suoi risultati sono buoni, sono semanticamente validi)
- ed è **completo** (copre tutti gli argomenti validi).

- Il fatto che la nostra logica abbia queste caratteristiche è
- notevole!

- Nota
- puo’ darsi che questi risultati non vi suonino molto sorprendenti, perché vi aspettavate che reggessero fin dall'inizio.

- Ma non sono ovvi e anzi per alcune teorie questi meta-teoremi possono fallire! (la logica del second’ordine non e’ completa!)

- Anche l’aritmetica (e in generale la matematica) non e’ completa in questo senso!

Per l’aritmetica non c’e un calcolo $\vdash$, per cui $\vdash$ e $\models$ coincidono.

(Questo e’ il famoso teorema di incompletezza dell’aritmetica di Gödel).

- Si noti che e’ spiacevole, ma non disastroso che non si abbia la completezza.
-
- Ma assolutamente non possiamo rinunciare alla correttezza.
- Altrimenti significa che le nostre derivazioni possono anche dimostrare argomenti non validi e falsi teoremi.
  - ---> Allora il calcolo non è corretto!

- Ma possiamo convivere con un calcolo incompleto.
  - Un calcolo incompleto è qualcosa di corretto, ma non abbastanza forte da dare tutto ciò che vogliamo.

- Tutto ciò che dimostra è buono, ma non dimostra tutti i buoni risultati.