

Lezione 5

Conseguenza logica

- Le tavole di verità possono essere usate anche per determinare la conseguenza logica.

- Diciamo che B è conseguenza logica di un insieme di premesse $\{A_1, \dots, A_n\}$, se in ogni caso in cui le premesse sono tutte vere, anche B è vera.

→ Questa è la caratterizzazione che abbiamo già dato di validità logica.

Ora però possiamo precisarla, con una chiara nozione di caso.

(Non più immaginazione)

Esempio,

Oggi e` lunedì' o oggi e` martedì`,
non si da il caso che oggi e` lunedì,

Quindi, oggi e` martedì`.

$(P \vee R), \neg P \vdash R$
(Sillogismo disgiuntivo)

P	R	$P \vee R$	$\sim P$	$\vdash R$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

- Commento (ogni riga rappresenta un caso possibile, ...).
- La tavola dimostra che ogni argomentazione di questa forma è valida

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi esiste

Dio esiste = A

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} (A \rightarrow \neg A) + A & & & A \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi non esiste

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} (A \rightarrow \neg A) + \neg A & & & A \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Se una forma argomentativa e` invalida ha **controesempi**.

(Casi in cui le premesse sono vere, ma la conclusione` falsa).

- Se piove, mi bagno. Mi bagno. **Quindi** piove.

$P \rightarrow Q, Q \vdash P$

→ Affermazione del conseguente.

P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	\vdash	P	
V	V	V	V	V	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	F	X
F	F	F	F	F	F	

- Se piove, mi bagno. Non piove. Quindi non mi bagno.

$$P \rightarrow Q, \neg P \vdash \neg Q$$

→ Negazione dell'antecedente.

- Fallacie.
- Sono simili a forme argomentative corrette:
Modus ponens e modus tollens.

- Modus ponens $P \rightarrow Q, P \vdash Q$
- Modus tollens $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

- Abbiamo una caratterizzazione precisa e formale della validità logica. (conseguenza logica).
- Sappiamo a che condizioni un argomento è valido, e abbiamo un metodo (le tavole di verità) per determinarlo).

- Per indicare che una conclusione B è conseguenza logica di un insieme di premesse, $\{A_1, \dots, A_n\}$ usiamo il simbolo:

\models

(senza indicazione di v e senza indici 0,1)

E scriviamo:

$\{A_1, \dots, A_n\} \models B$

- Vuol dire:
- non esiste una valutazione v , per cui $(v \models 1A1 \ \& \ \dots \ \& \ v \models 1An)$ e $v \models 0 B$.

- NOTA:

Una tautologia A sarà come una conseguenza logica dall'insieme vuoto di premesse.

$$\models A$$

- Nota

\models si usa quando si ha a che fare con le valutazioni, 1,0, cioè con la semantica (tavole di verità eccetera).

\vdash si usa quando si è al livello “sintattico” dell’argomento.
(si ragiona senza considerare esplicitamente i valori di verità)

Equivalenza logica
e
Algebra della logica

- Con la nozione di conseguenza logica, possiamo definire quella di **equivalenza logica**.
- A e B sono logicamente equivalenti, se hanno sempre le stesse valutazioni (per ragioni di sola logica).

- Ovvero, A e B sono logicamente equivalenti sse

$$A \models B \quad \text{e} \quad B \models A$$

$$(A \equiv B)$$

Che e' anche equivalente a:

$$\models (A \leftrightarrow B)$$

- Esempio:

Doppia negazione:

$$A \equiv \neg\neg A$$

$$A \equiv \neg\neg A$$

$$1 \quad 1$$

$$0 \quad 0$$

- L'equivalenza logica ci permette di stabilire alcune proprietà dei connettivi.

Congiunzione:

- commutativita'

$$(P \& Q) = || = (Q \& P)$$

- Associativita'

$$(P \& Q) \& R =||= P \& (Q \& R)$$

- Idempotenza

$$(P \& P) =||= P$$

Disgiunzione:

- Commutativita': $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$
- Associativita': $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
- Idempotenza: $(P \vee P) \equiv P$

- Interazioni tra connettivi.

Congiunzione e disgiunzione:

De Morgan:

$$\neg (P \& Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$(P \& Q) \equiv \neg (\neg P \vee \neg Q)$$

- **De Morgan**

$$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

- **Distributivita`:**

$$P \& (Q \vee R) =||= (P\&Q) \vee (P\&R)$$

$$P \vee (Q \& R) =||= (P\vee Q) \& (P\vee R)$$

conjunct tautologic ($A \wedge (B \vee \neg B)$) $\equiv A$

disjunct tautologic ($A \vee (B \vee \neg B)$) \equiv
 $(B \vee \neg B)$

conjunct contraobolitoriu

$$(A \wedge (B \wedge \neg B)) \equiv (B \wedge \neg B)$$

disjunct contraobolitoriu

$$(A \vee (B \wedge \neg B)) \equiv A$$

- Le proprietà introdotte possono essere usate per dimostrare equivalenze.

$$(A \wedge (\neg \neg A \vee A)) \equiv A$$

1) $(A \wedge (\neg \neg A \vee A))$ data

2) $(A \wedge (A \vee A))$ 1, doppia negazione

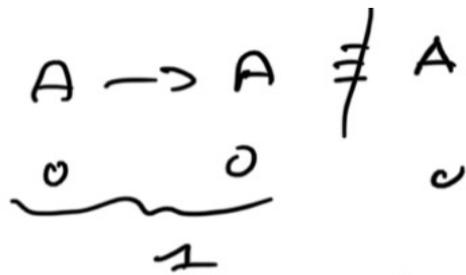
3) $(A \wedge A)$ 2, idempotenza \vee

4) A 3, idempotenza \wedge

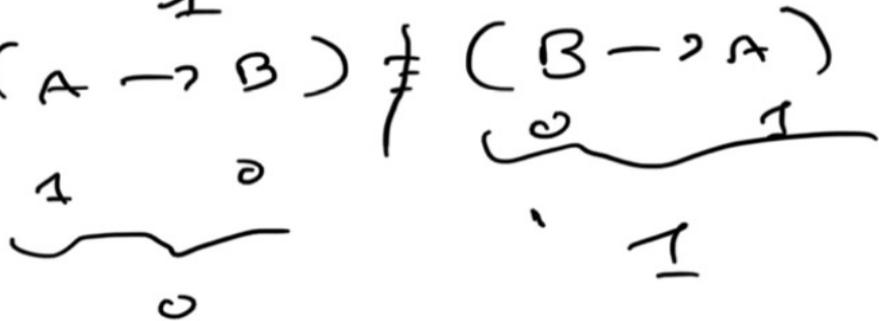
- **Condizionale**

Per il condizionale, Idempotenza, associativita e commutativita` **non** valgono.

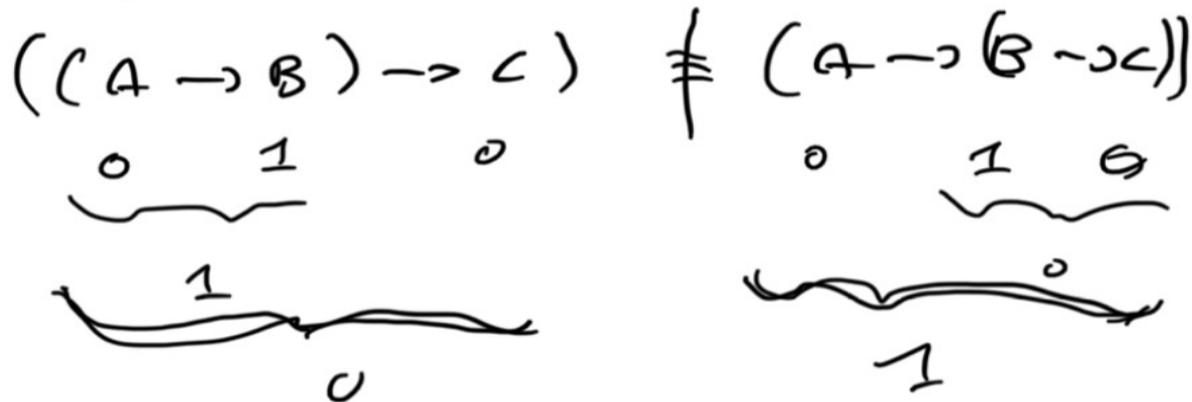
idempotenza $A \rightarrow A \neq A$?



commutatività $(A \rightarrow B) \neq (B \rightarrow A)$



associatività



- Äquivalenzen:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg A \rightarrow B \equiv A \vee B$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg (A \wedge \neg B)$$

$$\neg (A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$$

- **Sostitutivita`:**

Se $A \equiv B$

e D risulta da C, sostituendo delle occorrenze di A con B, allora

$D \equiv C$

(cioe` hai C (e basta) in cui occorre A,

e sostituisci ad A, B dentro C (dove A e B sono equivalenti) allora ottieni una nuova formula D, che e` equivalente a C)

(esempio)

- Si puo' dimostrare che se A e' una tautologia, in cui occorre una lettera enunciativa S , e B risulta da A per sostituzione (totale e uniforme) di S con una fbf F , anche B e' una tautologia.

→ Si puo` generalizzare a un insieme finito di lettere enunciative ($S_1 \dots S_n$)

- Si può generalizzare alla conseguenza logica.

(La tautologia è solo un caso limite a 0 premesse)

Dove sono gli argomenti trattati?

Elementi di teoria degli insiemi
[Appendice B del Lemmon]

(Linguaggi formali: Cap. II sez. 1 e sez. 3)

Equivalenze logiche: Appendice A del Lemmon,
□