

# Lezione 5

# Conseguenza logica

- Le tavole di verità possono essere usate anche per determinare la conseguenza logica.

- Diciamo che  $B$  è conseguenza logica di un insieme di premesse  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , se in ogni caso in cui le premesse sono tutte vere, anche  $B$  è vera.

→ Questa è la caratterizzazione che abbiamo già dato di validità logica.

Ora però possiamo precisarla, con una chiara nozione di caso.

(Non più immaginazione)

Esempio,

Oggi e` lunedì' o oggi e` martedì`,  
non si da il caso che oggi e` lunedì,

**Quindi, oggi e` martedì`.**

$(P \vee R), \neg P \vdash R$   
(Sillogismo disgiuntivo)

$P$	$R$	$P \vee R$	$\sim P$	$\vdash R$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

- Commento (ogni riga rappresenta un caso possibile, ...).
- La tavola dimostra che ogni argomentazione di questa forma è valida

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi esiste

Dio esiste = A

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc|c} (A \rightarrow \neg A) + A & & & & A \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi non esiste

$$\begin{array}{ccc|c} (A \rightarrow \neg A) + \neg A & & & A \\ \hline 0 & 0 & & 1 \\ \Rightarrow 1 & 1 & & 0 \end{array}$$



- Se una forma argomentativa e` invalida ha **controesempi**.

(Casi in cui le premesse sono vere, ma la conclusione` falsa).

- Se piove, mi bagno. Mi bagno. **Quindi** piove.

$P \rightarrow Q, Q \vdash P$

→ Affermazione del conseguente.

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$Q$	$\vdash$	$P$	
V	V	V	V	V	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	F	V	V	F	<b>X</b>
F	F	F	F	F	F	

- Se piove, mi bagno. Non piove. Quindi non mi bagno.

$P \rightarrow Q, \neg P \vdash \neg Q$

→ Negazione dell'antecedente.

- Fallacie.
- Sono simili a forme argomentative corrette:  
**Modus ponens e modus tollens.**

- Modus ponens  $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- Modus tollens  $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

- Abbiamo una caratterizzazione precisa e formale della validità logica. (conseguenza logica).
- Sappiamo a che condizioni un argomento è valido, e abbiamo un metodo (le tavole di verità) per determinarlo).

- Per indicare che una conclusione  $B$  è conseguenza logica di un insieme di premesse,  $\{A_1, \dots, A_n\}$  usiamo il simbolo:

$\models$

(senza indicazione di  $v$  e senza indici 0,1)

E scriviamo:

$\{A_1, \dots, A_n\} \models B$



- Vuol dire:
- non esiste una valutazione  $v$ , per cui  
( $v \models A_1 \ \& \ \dots \ \& \ v \models A_n$ ) e  $v \models 0 \ B$ .

- NOTA:

Una tautologia  $A$  sarà come una conseguenza logica dall'insieme vuoto di premesse.

$$\models A$$

- Nota

$\models$  si usa quando si ha a che fare con le valutazioni, 1,0, cioè con la semantica (tavole di verità eccetera).

$\vdash$  si usa quando si è al livello “sintattico” dell’argomento.  
(si ragiona senza considerare esplicitamente i valori di verità)

Equivalenza logica

e

Algebra della logica

- Con la nozione di conseguenza logica, possiamo definire quella di **equivalenza logica**.
- A e B sono logicamente equivalenti, se hanno sempre le stesse valutazioni (per ragioni di sola logica).

- Ovvero, A e B sono logicamente equivalenti sse

$$A \models B \quad \text{e} \quad B \models A$$

$$(A \models B)$$

Che e' anche equivalente a:

$$\models (A \leftrightarrow B)$$

- Esempio:

Doppia negazione:

$$A \equiv \neg\neg A$$

$$A \equiv \neg\neg A$$

$$1 \quad 1$$

$$0 \quad 0$$

- L'equivalenza logica ci permette di stabilire alcune proprietà dei connettivi.



# Congiunzione:

- commutativita'

$$(P \& Q) = || = (Q \& P)$$

- Associativita'

$$(P \& Q) \& R =||= P \& (Q \& R)$$

- Idempotenza

$$(P \& P) =||= P$$

## Disgiunzione:

- Commutativita':  $(P \vee Q) = || = (Q \vee P)$
- Associativita':  $(P \vee Q) \vee R = || = P \vee (Q \vee R)$
- Idempotenza:  $(P \vee P) = || = P$

- Interazioni tra connettivi.

Congiunzione e disgiunzione:

**De Morgan:**

$$\neg (P \& Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$$

$$(P \& Q) \equiv \neg (\neg P \vee \neg Q)$$

- **De Morgan**

$$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

- **Distributivita`:**

$$P \& (Q \vee R) = || = (P \& Q) \vee (P \& R)$$

$$P \vee (Q \& R) = || = (P \vee Q) \& (P \vee R)$$

conjunct tautologic ( $A \wedge (B \vee \neg B)$ )  $\equiv A$

disjunct tautologic ( $A \vee (B \vee \neg B)$ )  $\equiv$   
 $(B \vee \neg B)$

conjunct contraobolitoriu

$$(A \wedge (B \wedge \neg B)) \equiv (B \wedge \neg B)$$

disjunct contraobolitoriu

$$(A \vee (B \wedge \neg B)) \equiv A$$

- Le proprietà introdotte possono essere usate per dimostrare equivalenze.

$$(A \wedge (\neg \neg A \vee A)) \equiv A$$

1)  $(A \wedge (\neg \neg A \vee A))$  data

2)  $(A \wedge (A \vee A))$  1, doppia negazione

3)  $(A \wedge A)$  2, idempotenza  $\vee$

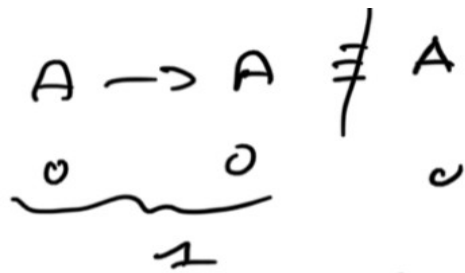
4)  $A$  3, idempotenza  $\wedge$



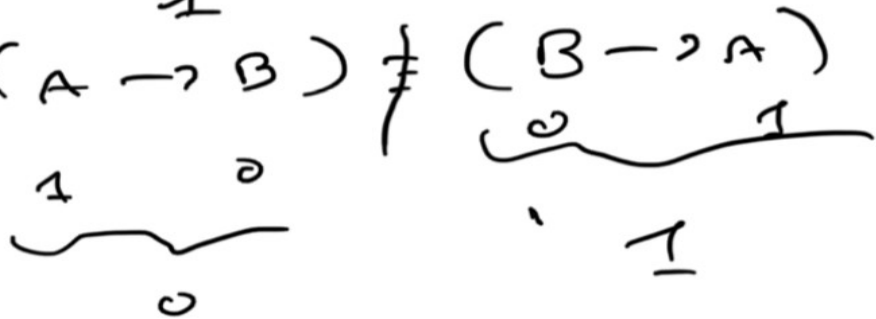
- **Condizionale**

Per il condizionale, Idempotenza, associativita e commutativita` **non** valgono.

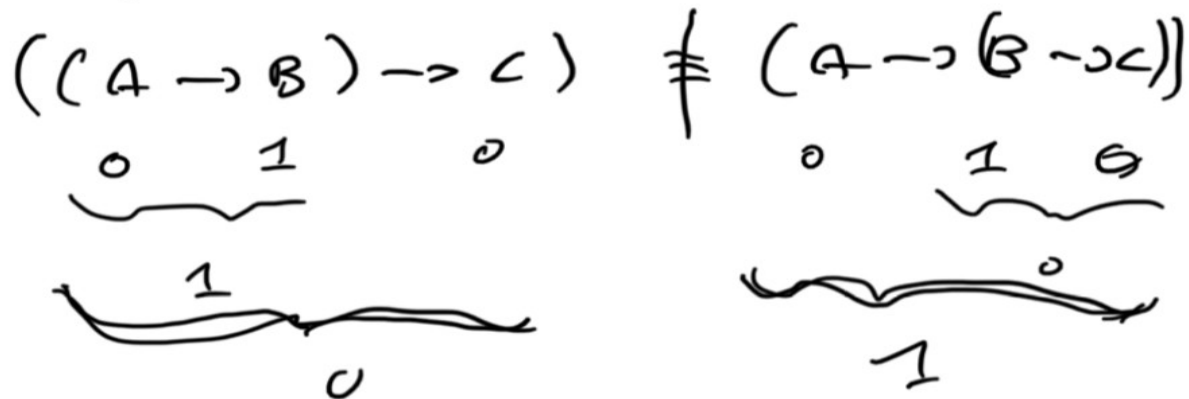
idempotenza  $A \rightarrow A \neq A$  ?



commutatività  $(A \rightarrow B) \neq (B \rightarrow A)$



associatività



- Äquivalenzen:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg A \rightarrow B \equiv A \vee B$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg (A \wedge \neg B)$$

$$\neg (A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$$

- **Sostitutivita`:**

Se  $A \equiv B$

e D risulta da C, sostituendo delle occorrenze di A con B, allora

$D \equiv C$

(cioe` hai C (e basta) in cui occorre A,

e sostituisci ad A, B dentro C (dove A e B sono equivalenti) allora ottieni una nuova formula D, che e` equivalente a C)

(esempio)

- Si puo' dimostrare che se  $A$  e' una tautologia, in cui occorre una lettera enunciativa  $S$ , e  $B$  risulta da  $A$  per sostituzione (totale e uniforme) di  $S$  con una fbf  $F$ , anche  $B$  e' una tautologia.

→ Si puo` generalizzare a un insieme finito di lettere enunciative ( $S_1 \dots S_n$ )

- Si può generalizzare alla conseguenza logica.

(La tautologia è solo un caso limite a 0 premesse)

---

Dove sono gli argomenti trattati?

Elementi di teoria degli insiemi  
[Appendice B del Lemmon]

(Riaggregati formali: Cap. II sez. 1 e sez. 3)

Equivalenze logiche: Appendice A del Lemmon,  
□