Lezione 5

Conseguenza logica

- Le tavole di verita` possono essere usate anche per determinare la conseguenza logica.

- Diciamo che B e` conseguenza logica di un insieme di premesse {A1,…,An}, se in ogni caso in cui le premesse sono tutte vere, anche B e` vera.

→ Questa e’ la caratterizzazione che abbiamo gia` dato di validita` logica.

Ora pero` possiamo precisarla, con una chiara nozione di caso.

(Non piu’ immaginazione)

Esempio,

Oggi e` lunedi’ o oggi e` martedi`,
non si da il caso che oggi e` lunedi,

Quindi, oggi e` martedi`.

(P v R), -P |- R

(Sillogismo disgiuntivo)

P	R	P	$\vee$	$R,$	$\sim P$	$\vdash$	R
V	V	V	V	V	F		V
V	F	V	V	F	F		F
F	V	F	V	V	V		V
F	F	F	F	F	V		F

- Commento (ogni riga rappresenta un caso possibile, ...).

- La tavola dimostra che ogni argomentazione di questa forma è valida

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi esiste

Dio esiste = A

A	$\to$	$\neg A$	$\vdash A$	A
1	0	0	1	1
$\Rightarrow$ 0	1	1	0	0

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi non esiste

$(A \to \neg A)$	$\vdash \neg A$	A
0	0	1
$\Rightarrow$ 1	1	0

- Se una forma argomentativa e` invalida ha **controesempi**.

  (Casi in cui le premesse sono vere, ma la conclusione` falsa).

- Se piove, mi bagno. Mi bagno. **Quindi** piove.

  $P \rightarrow Q, Q \vdash P$

  → Affermazione del conseguente.

P	Q	P	$\to$	$Q,$	Q	$\vdash$	P	
V	V	V	V	V	V		V	
V	F	V	F	F	F		V	
F	V	F	V	V	V		F	×
F	F	F	V	F	F		F	

- Se piove, mi bagno. Non piove. Quindi non mi bagno.

  $P \rightarrow Q, -P \mid\!- -Q$

  → Negazione dell’antecedente.

- Fallacie.

- Sono simili a forme argomentative corrette: **Modus ponens** e **modus tollens**.

- Modus ponens $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- Modus tollens $P \rightarrow Q, -Q \vdash -P$

- Abbiamo una caratterizzazione precisa e formale della validita’ logica. (conseguenza logica).

- Sappiamo a che condizioni un argomento e` valido, e abbiamo un metodo (le tavole di verita’) per determinarlo).

- Per indicare che una conclusione B e` conseguenza logica di un insieme di premesse, {A1, …, An} usiamo il simbolo:

  |=

  (senza indicazione di v e senza indici 0,1)

  E scriviamo:

  {A1, …, An} |= B

- Vuol dire:

- non esiste una valutazione v, per cui
  (v |=1A1 & … & v|=1An) e v |=0 B.

- NOTA:

  Una tautologia A sara` come una conseguenza logica dall’insieme vuoto di premesse.

  $\models A$

- Nota

  |= si usa quando si ha a che fare con le valutazioni, 1,0, cioe' con la semantica (tavole di verita' eccetera).

  |- si usa quando si e' al livello "sintattico' dell'argomento.

  (si ragiona senza considerare esplicitamente i valori di verita')

Equivalenza logica

e

Algebra della logica

- Con la nozione di conseguenza logica, possiamo definire quella di **equivalenza logica**.

- A e B sono logicamente equivalenti, se hanno sempre le stesse valutazioni (per ragioni di sola logica).

- Ovvero, A e B sono logicamente equivalenti sse

  A |= B   e   B |= A

  (A =||=B)

  Che e’ anche equivalente a:

  |= (A ↔ B)

- Esempio:

  Doppia negazione:

  A =||= - - A

$A \equiv \neg\neg A$

1 1

0 0

- L’equivalenza logica ci permette di stabilire alcune proprieta’ dei connettivi.

Congiunzione:

- commutitivita’

(P&Q) =||= (Q&P)

- Associativita’

  (P & Q) & R =||= P & (Q & R)

- Idempotenza

  (P & P) =||= P

Disgiunzione:

- Commutativita': (PvQ) =||= (QvP)
- Associativita': (PvQ) v R =||= P v (Q v R)
- Idempotenza: (PvP) =||= P

- Interazioni tra connettivi.

Congiunzione e disgiunzione:

De Morgan:

- (P&Q) =||= (-P v -Q)

(P&Q) =||= - (-P v -Q)

- **De Morgan**

  $- (PvQ) =||= (-P \ \& \ -Q)$

  $(PvQ) =||= -(-P \ \& \ -Q)$

- **Distributivita`:**

  P & (Q v R) =||= (P&Q) v (P&R)

  P v (Q & R) =||= (PvQ) & (PvR)

Congiunti tautologico $(A \wedge (B \vee \neg B)) \equiv A$

disgiunti tautologico $(A \vee (B \vee \neg B)) \equiv$

$(B \vee \neg B)$

congiunti contraddittorio

$(A \wedge (B \wedge \neg B)) \equiv$

$(B \wedge \neg B)$

disgiunti contraddittorio

$(A \vee (B \wedge \neg B)) \equiv A$

- Le proprieta` introdotte possono essere usate per dimostrare equivalenze.

$$(A \wedge (\neg\neg A \vee A)) \equiv A$$

1) $(A \wedge (\neg\neg A \vee A))$ data
2) $(A \wedge (A \vee A))$ 1, doppia negazione
3) $(A \wedge A)$ 2, idempotenza $\vee$
4) 1 3, idempotenza $\wedge$

- **Condizionale**

  Per il condizionale, Idempotenza, associativita e commutativita` **non** valgono.

idempotenza $\underbrace{\underset{0}{A} \to \underset{0}{A}}_{1} \not\equiv \underset{0}{A}$?

commutatività $(\underbrace{\underset{1}{A} \to \underset{0}{B}}_{0}) \not\equiv (\underbrace{\underset{0}{B} \to \underset{1}{A}}_{1})$

associatività

$$(\underbrace{(\underbrace{\underset{0}{A} \to \underset{1}{B}}_{1}) \to \underset{0}{C}}_{0}) \not\equiv (\underbrace{\underset{0}{A} \to (\underbrace{\underset{1}{B} \to \underset{0}{C}}_{0})}_{1})$$

- Equivalenze:

$A \rightarrow B$ =||= -A v B

-A $\rightarrow$ B =||= A v B

$$A \rightarrow B \;=||=\; -(A \,\&\, -B)$$

$$-(A \rightarrow B) \;=||=\; (A \,\&\, -B)$$

- **Sostitutivita`:**

  Se A =||= B

  e D risulta da C, sostituendo delle occorrenze di A con B, allora

  D =||= C

  (cioe` hai C (e basta) in cui occorre A,

  e sostituisci ad A, B dentro C (dove A e B sono equivalenti) allora ottieni una nuova formula D, che e` equivalente a C)

  (esempio)

- Si puo’ dimostrare che se A e` una tautologia, in cui occorre una lettera enunciativa S, e B risulta da A per sostituzione (totale e uniforme) di S con una fbf F, anche B e’ una tautologia.

→ Si puo` generalizzare a un insieme finito di lettere enunciative (S1… Sn)

- Si puo` generalizzare alla consequenza logica.

  (La tautologia e` solo un caso limite a 0 premesse)

Dove sono gli argomenti trattati?

Elementi di teoria degli insiemi
[Appendice B del Lemmon]

Linguaggi formali: Cap. II Sez. 1 e Sez. 3

Equivalenze logiche: Appendice A del Lemmon,