Logica Lezione 7

Deduzione Naturale

Proposizionale

- Gli alberi semantici forniscono un algoritmo, spesso piu’ maneggevole delle tavole di verita`.

- Ma nessuno dei due strumenti mostra come la conclusione deriva o e` ottenuta dalle premesse.

- Come le premesse portano alla conclusione.

- Altri calcoli logici (proof theory) correggono questo.

  Tra cui:

  - Sistemi assiomatici

  - Calcolo delle sequenze (o sequenti)

  - Deduzione naturale

- La deduzione naturale ha, in particolare, il vantaggio di mimare il modo in cui naturalmente ragioniamo.
  - (e` un proposito solo ideale, non vuole essere psicologicamente adeguato).

→ Ci concentriamo sulla deduzione naturale.

- La deduzione naturale consiste di regole che ci dicono come, dalle premesse, per singoli passi elementari, possiamo derivare la conclusione.

- In genere, abbiamo regole di derivazione associate a ciascuna costante logica.

- Avremo, tipicamente, regole di **eliminazione,** (che ci dicono come eliminare un connettivo da una fbf),

- e regole di **introduzione** (che ci dicono come introdurre un connettivo da una fbf).

Sequenze

- Scrivendo le assunzioni di partenza a sinistra e la conclusione a destra.

  Ad esempio: $P, P \rightarrow Q \vdash Q$

  ---> Questo è chiamato "**sequente**" o “sequenza’.

  → Si noti che un sequente NON ci dice come Q possa essere derivato da $P, P \rightarrow Q$.

- Regole di derivazione

1. Regola di assunzione

1. Regola di assunzione

- La nostra prima regola è la regola di assunzione.

  → La chiamiamo: A

  – Questa regola è l'unica regola che <u>NON</u> è collegata a nessuna costante logica.

- La regola di assunzione ci dice che:

- in qualsiasi fase della derivazione, <u>possiamo introdurre qualsiasi fbf come assunzione</u>.

- Scriviamo semplicemente la fbf su una nuova riga:
  - **A destra** della frase scriviamo solo A.
  - **A sinistra** della riga si scrive il numero del passo a cui si applica la regola.
  - **All'estrema sinistra** ripetiamo questo numero senza parentesi.

Nota:

per applicare la regola dell'assunzione, NON utilizziamo nessun'altra premessa.

- Quindi A si basa solo su se stessa come presupposto.

  - Ecco perché all'estrema sinistra si scrive solo il numero del passo a cui viene applicato.

- Possiamo quindi iniziare una derivazione logica applicando la regola di assunzione:

1 (1) $P \rightarrow Q$ A

- Ciò significa che, in questo esempio, il nostro primo passo è assumere la fbf "$P \rightarrow Q$" in base alla regola di assunzione.

- Potremmo anche applicare questa regola nel mezzo di una derivazione:

	:	
..	(5) …	..
..	(6) …	..
7	(7) -R	A

- Ciò significa che alla settima riga assumiamo -R in base alla regola di assunzione.

- Questo NON equivale a dire che la premessa è vera!

→ La regola dell'assunzione NON dice che una certa fbf è vera, ma che possiamo avere un'argomento valido a partire da essa.

Congiunzione

- Esistono due regole legate alla &:

- Una regola di <u>introduzione</u>

  - La regola permette di mettere & in una fbf.

- E una regola di <u>eliminazione</u>.

  - Una regola per eliminare la & da una fbf.

&-Introduzione (&I)

- &I afferma che:

  date due fbf qualsiasi come premesse, possiamo derivare la loro congiunzione.

È una buona regola?

- Sì.

  È facile da controllare, data la tavola di verita`
  della congiunzione.

Esempio:

$P, Q \vdash P \& Q$

Esempio:

$P, Q \vdash P\&Q$

1	(1) P	A
2	(2) Q	A
1,2	(3) P&Q	1,2 &I

- Nota:

  in tutte le regole non importa quanto e` complessa la fbf.

  Le regole non si applicano solo a lettere enunciative, ma a fbf.

- Ad esempio, &I permette di passare

  da: (-R V P)

  a: (P → -Q) & (-R V P)

&-Eliminazione &-E

(qua manca &I)

- La regola di &-eliminazione permette di eliminare & da una congiunzione.

- Afferma che:

  data una congiunzione come fbf, e` possibile derivare uno (qualsiasi) dei congiunti come conclusione.

È una buona regola?

- Sì.

  Data la tavola di verita` di &.

Esempio:

$P\&Q \vdash P$

1	(1)	P&Q	A
1	(2)	P	1,&E

---> Chiaramente, analogamente, si può derivare Q.

&E e &I si possono usare anche nella stessa derivazione.

Esempio:

P & Q ⊦ Q & P

1	(1)	P&Q	A
1	(2)	P	1&E
1	(3)	Q	1&E
1	(4)	Q&P	3,2 &I

Regola di eliminazione di →

(o Modus (Ponendo) Ponens)

Nota:

la regola di *introduzione* di → e` piu` complicata e verra` introdotta piu` tardi.

MPP, MP o →E

- La regola del Modus Ponens afferma che:

- Date due premesse:

1. un condizionale,

e:

2. l'antecedente del condizionale,

\- MP ci permette di derivare il conseguente del condizionale.

Data la tavola di verita` del condizionale, e` chiaro che si tratta di una buona regola.

Esempio:

$P \rightarrow Q, P \vdash Q$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	Q	1,2 MPP

Esempio

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $Q \rightarrow R$	A
3	(3) P	A
1,3	(4) Q	1,3 MPP
1,2,3	(5) R	2,4 MPP

Doppia negazione DN
o eliminazione di -

- La doppia negazione è una regola di derivazione che riguarda la **negazione**.

- Più precisamente, quando ci sono due negazioni una dopo l'altra:

$$- - P$$

La regola di DN afferma che:

Data come <u>premessa</u> la **doppia negazione** di una fbf,

e` possibile derivare come <u>conclusione</u> la fbf stessa.

Possiamo avere DN anche nell’altra direzione.

(Nota: Lemmon, ma NON Varzi, la ammette)

Ovvero:

Data una qualsiasi fbf come premessa,

DN ci permette di derivare la sua **doppia negazione** come conclusione.

Modus (Tollendo) Tollens (MTT o MT)

- NOTA: Neanche questa regola (come DN per introdurre la negazione) e` presente in Varzi.

  Su queste due regole torneremo.

- Si tratta di una regola su **due** costanti logiche: la condizione $\rightarrow$ e la negazione -.

- La regola del MTT afferma che:

  Date due premesse:

  1. un condizionale

  e

  2. la **negazione del** conseguente,

- E` possibile derivare come conseguente la **negazione** dell’antecedente.

Per esempio:

$P \rightarrow Q, -Q \vdash -P$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1,2	(3)	$-P$	1,2 MTT

Altro esempio:

$P \rightarrow (Q \rightarrow R), P, -R \mid\!- -Q$

1	(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2) P	A
3	(3) $-R$	A
1,2	(4) $Q \rightarrow R$	1,2 MPP
1,2,3	(5) $-Q$	3,4 MTT

Esempio:

$P \rightarrow -Q, Q \vdash -P$

1	(1)	$P \rightarrow -Q$	A
2	(2)	Q	A
2	(3)	$- -Q$	2 DN
1,2	(4)	$-P$	1,3 MTT

V-Introduzione VI

VI afferma che:

Data **una qualsiasi** fbf come premessa, possiamo ricavare la disgiunzione di quella fbf con **una qualsiasi** fbf.

--→Le assunzioni sono le stesse delle fbf usate come premesse.

- Ad esempio, da P come premessa, possiamo derivare:

1 (1) P A

1 (2) $P \vee (-R \rightarrow Q)$ 1,VI

  - <u>Nota: non fa differenza quale fbf scegliamo come nuovo disgiunto.</u>

- E` una buona regola?

  Potremmo aggiungere qualsiasi cosa!

- Si`. Si veda la tavola di verita` della disgiunzione.

V-eliminazione - VE

Ci si potrebbe aspettare che anche questa sia una regola piuttosto semplice,

ma in realtà è elaborata.

- Siano A, B e C tre fbf qualsiasi,

  e supponiamo:

  - (a) che ci sia data A V B,
  - (b) che da A si possa ricavare C,
  - (c) che anche da B si possa ricavare C.

---> Allora possiamo derivare C direttamente da A V B.

- Per applicare la regola, **a destra**, dobbiamo citare cinque righe:

(i) la linea in cui compare la disgiunzione AVB;

(ii) la linea in cui si assume A;

(iii) la linea in cui C deriva da A;

(iv) la linea in cui si assume B;

(v) la linea in cui C deriva da B.

- E **a sinistra** scriviamo le <u>assunzioni</u>:

(i) qualsiasi assunzione su cui si basa AVB;

(ii) qualsiasi assunzione su cui C si basa nella sua derivazione da A, (ma **non** A stesso;)

(iii) qualsiasi ipotesi su cui C si basa nella sua derivazione da B (ma **non** B stesso).

→ NOTA: A e B da sole NON assunzioni!
Sono solo "ipotesi" temporanee.

- Questa regola corrisponde a un tipo di ragionamento molto naturale e semplice:

  Il ragionamento per casi.

- Il punto cruciale è che NON abbiamo bisogno di per sapere quale, esattamente, tra A e B sia vero, perché tanto, in entrambi i casi, anche C è segue.

---> Ecco perché si tratta di un "ragionamento per casi".

Esempio:

$P \vee Q \vdash Q \vee P$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \vee P$	2 VI
4	(4)	Q	A
4	(5)	$Q \vee P$	4VI
1	(6)	$Q \vee P$	1,2,3,4,5 VE

Le prossime due regole, introduzione di → (PC) e introduzione di - (RAA), sono le piu` difficili.

In particolare, bisogna porre attenzione a cosa succede alle assunzioni.

Prova condizionale CP o introduzione di →

Ecco l'idea della regola:

1. Prendete l'<u>antecedente</u> del condizionale che volete dimostrare come ipotesi (assunzione temporanea),

2. ricavate il suo <u>conseguente</u> come conclusione.

3. Questa è una prova del condizionale desiderato.

- In altre parole:

  se dimostriamo che Q è il caso, <u>basandoci sulla</u>
- <u>assunzione P</u>,

- possiamo concludere che

- se P, allora Q

Prova condizionale CP

CP o →I, afferma che:

data una fbf B che ha A come assunzione.

allora e' possibile derivare A → B come conclusione

dove A → B si basa **solo** sulle <u>restanti assunzioni</u>, se presenti. (Ovvero esclusa A).

Prova condizionale CP

NOTA:

una volta applicata CP, A smette di essere una assunzione.

Viene **scaricata**.

Cioe`, una volta che A sia “assorbita” nel condizionale, “sparisce” dalle assunzioni.

Si “trasforma” da assunzione ad antecedente.

Ad esempio:

$P \rightarrow Q \vdash -Q \rightarrow -P$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $-Q$	A
1,2	(3) $-P$	1,2 MTT
1	(4) $-Q \rightarrow -P$	2,3CP

NOTA!!!

A sinistra,

<u>l'assunzione 2 alla riga (3) scompare e rimane solo l’assunzione </u>1.

- In un'applicazione di CP, il numero di assunzioni diminuisce di uno,

- L'assunzione è detta **scaricata**.

Esempio:

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2) Q	A
3	(3) P	A
1,3	(4) $Q \rightarrow R$	1,3 MPP
1,2,3	(5) R	2,4 MPP
1,2	(6) $P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7) $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP

$Q \rightarrow R \ \ \vdash \ (-Q \rightarrow -P) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$Q \rightarrow R$	A
2	(2)	$-Q \rightarrow -P$	A
3	(3)	P	A
3	(4)	$- -P$	3 DN
2,3	(5)	$- -Q$	2,4 MTT
2,3	(6)	Q	5 DN
1,2,3	(7)	R	1,6 MPP
1,2	(8)	$P \rightarrow R$	3,7 CP
1	(9)	$(-Q \rightarrow -P) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,8 CP

CP permette anche di avere zero assunzioni!

$\vdash P \rightarrow P$

1 (1) P A

(2) $P \rightarrow P$ 1,1CP

Reductio ad absurdum (RAA)

O introduzione di -

- Ora introduciamo una regola che è estremamente potente.

  - Viene utilizzata spesso in matematica e nel ragionamento.

  - È la regola della *Reductio ad Absurdum*.

In primo luogo, definiamo la nozione di:

Contraddizione.

Una contraddizione e` una congiunzione in cui un congiunto e` la negazione dell’altro.

RAA afferma che:

Se da una fbf con assunzione B, possiamo ricavare (magari con altre assunzioni), una contraddizione ,

allora possiamo derivare -B,

solo dalle altre assunzioni, se presenti.

---> NOTA BENE: B non è più una delle assunzioni. Viene scaricata.

Esempio:

$P \rightarrow -P \vdash -P$

1	(1)	$P \rightarrow -P$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$-P$	1,2 MPP
1,2	(4)	$P \& -P$	2,3 &I
1	(5)	$-P$	2,4 RAA

Esempio:

$P \rightarrow Q\ ,\ P \rightarrow -Q \vdash -P$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $P \rightarrow -Q$	A
3	(3) P	A
1,3	(4) Q	1,3 MPP
2,3	(5) $-Q$	2,3 MPP
1,2,3	(6) $Q\&-Q$	4,5 &I
1,2	(7) $-P$	3,6 RAA

- RAA è molto utile se si vuole ricavare una conclusione *negata*.

  - Invece di cercare di dimostrare direttamente la negazione desiderata (ad esempio -P),

  - assumiamo la proposizione affermativa (P) e ne ricaviamo una contraddizione.

  - Poi applichiamo la RAA, ottenendo -P.

- Chiaramente, si può anche utilizzare RAA per ottenere una fbf affermativa,

(Non negata)**.**

Possiamo semplicemente assumere una fbf **negata** (come -P) e ricavarne <u>una contraddizione</u>.

Quindi, in base alla RAA, possiamo concludere:

- -P, e poi, tramite DN derivare P.

RAA è uno strumento molto potente.

Dovrebbe essere utilizzata come risorsa di ultima istanza.

quando qualsiasi altro approccio non funziona.

Il bicondizionale

- Per il bicondizionale non daremo regole specifiche.

- Sappiamo infatti che un bicondizionale $A \leftrightarrow B$ e` equivalente a $(A \rightarrow B)$ & $(B \rightarrow A)$.

  Quindi possiamo usare le regole per $\rightarrow$ e per &.

$\leftrightarrow$ Introduzione

- La Def. $\leftrightarrow$ afferma che è possibile scrivere un bicondizionale in una derivazione,

  in qualsiasi momento avete derivato, in una fase precedente della derivazione, la congiunzione di entrambe le direzioni di un condizionale.

  - E viceversa.

  - ---> Chiaramente le assunzioni sono le stesse dei due condizionali.

↔ Eliminazione

- Analogamente, si può utilizzare la Def. ↔ per ottenere una regola di *eliminazione*.

- Ogni volta che si ha un bicondizionale si può eliminarlo a favore di due condizionali.

- Questo completa la presentazione delle regole.

Alcuni trucchi

1\.

È meglio iniziare la derivazione con tutti le assunzioni elencate nel sequente.

- Ad esempio,

$Q \rightarrow R \vdash (-Q \rightarrow -P) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Iniziare con tutte le assunzioni, (in questo caso, solo $Q \rightarrow R$).

2.

Assumere alcuni, o addirittura tutti, gli antecedenti dei condizionali nella conclusione (se presenti).

- Perché?

    Perché, utilizzando PC, è possibile spingerli alla conclusione e si scaricheranno.

    Quindi, non saranno più assunzioni.

3.

Se la conclusione e’ negata si puo’ provare ad assumere la negazione e ottenerla con RAA.

→ Meglio pero’ fare prima qualche tentativo senza RAA.

4.

Provare a usare RAA, se non si trova altro modo di derivare la conclusione.

Esempio.

$$P \rightarrow Q \ , \ P \rightarrow -Q \ \ \vdash \ \ -P$$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $P \rightarrow -Q$	A
3	(3) P	A
1,3	(4) Q	1,3 MPP
2,3	(5) $-Q$	2,3 MPP
1,2,3	(6) $Q\&-Q$	4,5 &I
1,2	(7) $-P$	3,6 RAA

Esempio

$$P \rightarrow -P \vdash -P$$

1	(1) $P \rightarrow -P$	A
2	(2) P	A
1,2	(3) -P	1,2 MPP
1,2	(4) P&-P	2,3 &I
1	(5)-P	2,4 RAA

Regole derivate

- Non tutte le regole che abbiamo dato sono essenziali.
- Abbiamo infatti dato piu’ regole del necessario.

In particolare, MTT e DN (quando usata per **introdurre** la negazione) sono ridondanti.

Cosa vuol dire?

Vuol dire che anche senza quelle regole potremmo derivare le stesse sequenze.

Ovvero, le stesse regole MTT ed DN (per introduzione) si possono replicare con le restanti regole.

Ad esempio:

si dimostri la seguente sequenza senza usare MTT o DN (introduzione):

$$P \rightarrow Q, -Q \vdash -P$$

(Suggerimento, si assuma P e si usi RAA)

Essendo questa un’ applicazione minima del MTT mostra come, con un processo analogo, ogni applicazione di MTT potrebbe essere rimpiazzata da una derivazione che ne fa a meno.

- Quindi, ogni volta che usiamo MTT potremmo, invece, scrivere l’analogo della derivazione sopra.

In altre parole, MTT e` una **regola derivata**.

Discorso analogo per DN usata per introdurre la negazione.

- Si provi cioe' a dimostrare P $\vdash$ -- P senza usare DN (per introdurre la negazione) o il MTT.

  (Si assuma -P e si usi RAA)

E DN per eliminare la negazione?

- Si derivi -- P $\vdash$ P, senza usare DN (per eliminare) o MTT.

    - Non si riesce!

    Il motivo e’ she RAA permette solo di introdurre, cioe’ di aumentare il numero di negazioni, mai di diminuirlo.

Vi sono anche altre regole derivate, oltre a MTT e DN (per introdurre).

Ad esempio, il **sillogismo disgiuntivo** (SD).

$P \vee Q, -P \vdash Q$

→ Per mostrare che SD e` derivabile usando solo le regole precedenti, e' opportuno prima avere un'altra importante regola derivata, l'*ex falso quodlibe*t.

Ex falso quodlibet (esplosione)

P, -P $\vdash$ Q

1	(1)	P	A
2	(2)	-P	A
3	(3)	-Q	A
1,2	(4)	P&-P	1,2 &I
1,2	(5)	--Q	4,3 RAA
1,2	(6)	Q	DN

La derivazione sopra potrebbe sembrare strana, o anche sbagliata.

- Al passo 5 si nega l’assunzione 3, -Q, che non e’ un’assunzione che a sinistra figura tra le assunzioni della contraddizione. Perche’ e’ corretta?

Si ragioni cosi'

1.

Dopo il passo 4 si scriva la sequenza derivata.

Si avra':

$P,-P,-Q \vdash P \& -P$

Quindi -Q e' proprio una delle assunzioni, e quindi si puo' negare per RAA.

2. Si noti che e’ la stessa cosa che succede con CP.

Anche li` si puo` assorbire qualsiasi assunzione introdotta con A, non solo quelle riportate a sinistra di una certa formula.

3.

Se ancora sembra strano, questa e' l'osservazione cruciale.

Immaginiamo che questo non ci vada, perche' l'assunzione "non c'entra niente".

Dovremmo bloccare la possibilita' di aggiungere assunzioni che non vengono poi usate nella derivazione.

Ma questo vuol difre che argomenti del genere verrebbero considerati non corretti:

Piove, nevica.

Quindi piove.

- Perche' nevica, non e' usato per derivare la conclusione.

4.

Infine, questo ci mostra che l’irrilevanza delle premesse non e’ quel che ci ineterssa nella validita’ logica.

Quel che ci importa e’ solo che se le premesse sono vere, anche alo conclusione lo e’.

→ Infatti, si verifichi, con tavole di verita’, che P, -P $\models$ Q e’ una argomento semanticamente valido.

Sillogismo Disgiuntivo

P V Q, -P $\vdash$ Q

1	(1) P V Q	A
2	(2) -P	A
3	(3) Q	A
4	(4) P	A
2,4	(5) P&-P	2,4&I
2,4	(6) Q	5, Ex falso
1,2	(7) Q	1,3, (3), 4,6 VI

Altri esempi di regole derivate sono ottenuti dalle proprieta’ algebriche, ad esempio le seguenti

Leggi di De Morgan

$- (P \vee Q) \dashv\vdash (-P \& -Q)$

$- (P\&Q) \dashv\vdash (-P \vee -Q)$

Conversioni

$P \rightarrow Q \dashv\vdash -P \vee Q$

$P \rightarrow Q \dashv\vdash -(P \,\&\, -Q)$

Paradossi dell' implicazione

$P \vdash Q \rightarrow P$

$-P \vdash P \rightarrow Q$ (usando l'ex falso)

Le regole derivate sono molte.

Anzi, in linea di principio, ogni sequenza valida potrebbe essere trattata come una regola derivata!

Alcune regole derivate sono particolarmente utili.

E` quindi utile avere un nome per ognuna di esse e ricorrere ad esse, aggiungendole alle regole non derivate.

MTT e DN sono esempi, ma anche SD (Sillogismo Disgiuntivo).

Possiamo quindi estendere il nostro calcolo permettendoci l’uso di regole derivate.

- In linea di principio sono evitabili, e in quanto tali sono legittime.

Si noti che per avere regole derivate, e’ necessario dimostrarle in forma generale usando formule ben formate, non lettere enunciative (come fatto sopra).

→ Nella derivazione, di fatto cambia poco.

Un’altra cautela con le regole derivate e’ fare attenzione alle assunzioni da scrivere a sinistra, che dipendono dalle regole con cui si e’ derivata una sequenza.

→ Per semplicita’ nelle nostre derivazioni, noi useremo solo le regole introdotte esplicitamente (che includono MT e DN) e non usereme regole derivate (come SD).

Nozioni del calcolo

- Abbiamo visto che alcune regole permettono di diminuire il numero di assunzioni, fino al punto di arrivare a 0.

- Quando questo succede abbiamo un caso limite di sequenza valida, una sequenza che ha 0 premesse.

La conclusione di una sequenza valida con 0 premesse, e` detta **Teorema**.

→ Meglio, “Teorema logico”, perche’ i teoremi matematici non hanno 0 assunzioni. Hanno infatti assunzioni matematiche (gli assiomi matematici). Mentre quelli logici valgono senza assunzioni.

Ogni sequenza valida si puo` convertire in un teorema.

- E` sufficiente aggiungere passi di PC alla fine per scaricare tutte le assunzioni.
- In questo modo un argomento valido e` convertito in un teorema con forma condizionale.

- Ad esempio

$(P \rightarrow Q)$, $-Q \vdash -P)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1,2	(3)	$-P$	1,2 MTT

- Puo` essere trasformato in $(P \rightarrow Q) \vdash (-Q \rightarrow -P)$

1	(4)	$-Q \rightarrow -P$	2,3 CP

E poi in $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (-Q \rightarrow -P)$

(5) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (-Q \rightarrow -P)$ 1,4 CP

Questa procedura permette di dimostrare un importante (Meta)teorema:

Il (meta) **teorema di deduzione:**

Per ogni fbf A1,...An, B,

se {A1,...An} $\vdash$ B, allora $\vdash$ (A1 &(… & An)) → B

(Altre formulazioni sono possibili, come quella in cui si hanno molto condizionali incassati invece di congiunzioni.)

Si puo` dimostrare anche l’altra direzione, ovvero:

Se $\vdash (A1 \,\&(\ldots \& An)) \rightarrow B$, allora $\{A1,...An\} \vdash B$

Questo mostra che vi e` uno stretto rapporto tra argomenti (validi) e condizionali.

Pur essendo diversi, sono strettamente legati, ed in un senso preciso, equivalenti.

Teoremi

Come con le regole derivate, si puo' trarre vantaggio dell'aver dimostrato teoremi.

Non poggiandosi su assunzioni, possiamo usarli nelle nostre derivazioni.

E' quindi utile avere nomi per alcuni teoremi significativi.

Ne vediamo alcuni.

Non contraddizione

$\vdash$ -(P & -P)

1	(1)	P& -P	A
	(2)	-(P& -P)	1,1 RAA

Terzo escluso

$\vdash$ P V -P

1	(1) -(PV-P)	A
2	(2) P	A
2	(3) PV-P	2VI
1,2	(4) (PV-P) & -(PV-P)	3,1 &I
1	(5) -P	2,4 RAA
1	(6) PV-P	5VI
1	(7) (PV-P)&-(PV-P)	6,1 &I
	(8) - -(PV -P)	1,7 RAA
	(9) PV-P	8 DN

Consequentia mirabilis

$\vdash (-A \rightarrow A) \rightarrow A$