

Crisi della meccanica classica e avvento della meccanica quantistica

Roberto Valandro

Università degli Studi di Trieste - Dipartimento di Fisica
Corso di Laurea in Fisica
Il Anno II Semestre

[Ref: G.Sartori, "Lezioni di Meccanica Quantistica", Ed. Libreria Cortina Padova;
S. Forte e L. Rottoli, "Fisica Quantistica", Ed. Zanichelli]

Introduzione - Stato delle cose

Interazione tra teoria ed esperimento:

- * Necessità di andare oltre una teoria ben affermata inizia quando tale teoria non spiega qualche esperimento.
- * In questo caso, necessario cercare una nuova teoria, che predica anche risultati già verificati della vecchia teoria.
- * La nuova teoria predice anche fenomeni non ancora osservati, che devono essere testati in laboratorio.

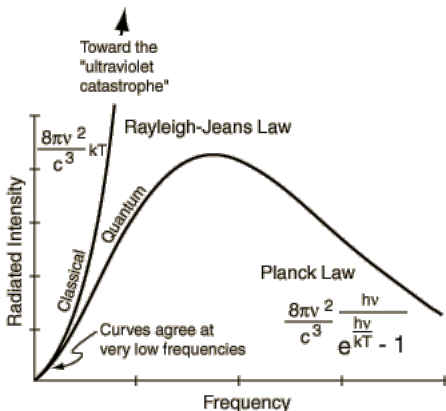
Situazione alla fine del XIX sec

- 1) C'erano tre teorie che funzionavano: meccanica Newtoniana, meccanica statistica/termodinamica e l'elettromagnetismo di Maxwell.
- 2) C'era una chiara distinzione tra particelle e onde.
Esperimenti di diffrazione da cristalli provarono la natura ondulatoria dei raggi-X; la natura particellare dell'elettrone da esperimento di Thomson.

I problemi iniziano quando nuovi fenomeni **non possono** essere spiegati dalle teorie vigenti.

Irraggiamento del corpo nero

- **Corpo nero:** assorbe totalità della radiazione che riceve.
- La **distribuzione spettrale** dell'irraggiamento elettromagnetico del corpo nero era stata misurata a fine 1800 e risultata insanabilmente **in disaccordo con le previsioni teoriche della termodinamica statistica** (catastrofe ultravioletta).



Irraggiamento del corpo nero

Nel 1900 *Planck* ottiene una curva corretta di emissione, assumendo che gli **scambi di energia fra materia e radiazione potessero avvenire solo per quantità discrete e indivisibili (*quanti*)**:

$$E_\nu = h\nu$$

- o La costante h (*costante di Planck*) ha le dimensioni di un'azione:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571800(13) \times 10^{34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- o Sembrava resuscitare vecchia teoria corpuscolare della luce: spiegazione di Planck fu male accolta all'inizio.

Effetto fotoelettrico

All'inizio del 1900 si sapeva sperimentalmente che se la luce (visibile o UV) incide su un metallo alcalino, causa **emissione di elettroni**:

- ▶ **Energia cinetica** di e^- espulsi è **indipendente da intensità** della radiazione incidente.
- ▶ Energia cinetica di e^- **dipende da frequenza ν** della radiazione incidente: quando $\nu < \nu_{\text{soglia}}$ il fenomeno non si manifesta; sopra la soglia, l'energia cinetica è $\propto \nu$.

Per la teoria classica, qualitativamente e^- assorbono con continuità energia dalla radiazione incidente fino a raggiungere energia cinetica maggiore alla barriera di potenziale che li intrappola nel metallo. Ma:

- 1) perché con sufficiente intensità di radiazione non si riesce ad estrarre, indipendentemente da ν ?
- 2) perché energia di e^- espulsi non aumenta con intensità di radiazione?

Effetto fotoelettrico

Nel 1905 A. Einstein suggerisce che :

- 1) Fascio di luce monocromatico a frequenza ν è formato da **corpuscoli d'energia $h\nu$ detti fotoni**.
- 2) Interazione della luce con la materia consiste in processi di **assorbimento ed emissione di interi fotoni**: scambi di energia solo per quantità *discrete*.
- 3) Detto W lavoro necessario ad estrarre e^- dal metallo, energia cinetica dopo espulsione è

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W \quad \text{dove } h \text{ è cost di Planck}$$

Spiegato

- Effetto soglia.
- Energia cinetica $\propto \nu$.
- Intensità radiazione \propto numero di e^- espulsi.

Dualità onda-corpuscolo

- ▶ A livello macroscopico la teoria ondulatoria della luce era ok, ma a livello microscopico si manifestava una natura corpuscolare.
- ▶ Visibile con esperimento di interferenza. Si vede che la **luce su schermo localmente produce chiazze di assorbimento**, ma in un tempo 'lungo' si vedono semplicemente delle frange.
- ▶ L'annerimento è proporzionale all'intensità della luce incidente; nell'interpretazione corpuscolare esso dovrebbe dipendere dal numero di fotoni che arrivano, cioè dalla **probabilità che il fotone arrivi là**. Cioè

$$\text{Intensità} \propto \text{probabilità}$$

Dualità onda-corpuscolo:

La **distribuzione statistica** dei fotoni nello spazio segue un comportamento **ondulatorio**, mentre il modo di **scambiare energia e impulso** all'atto della rivelazione è **corpuscolare**.

Onde di materia

Abbiamo visto che la luce ha natura sia ondulatoria che particellare.

De Broglie (1923), fede nell'universalità, formula l'ipotesi che le **particelle materiali possano manifestare comportamento ondulatorio**

→ a una particella di energia E e impulso \vec{p} andava associata un'onda **piana monocromatica**

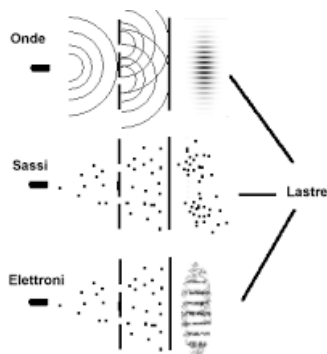
$$\psi_t(\vec{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}$$

t.c. $E = h\nu = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, per cui

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{h}{|\vec{p}|}$$

- Grano di polvere: $d = 1\mu m$, $v = 1mm/s$, $m = 10^{-25}kg \Rightarrow \lambda = 6.6 \cdot 10^{-6}A$.
- Elettrone: $m_e = 0.9 \cdot 10^{-30}kg$ accelerato da $V \geq 100V \Rightarrow \lambda \sim \lambda_{raggi-X}$ (stessi fenomeni di diffrazione).

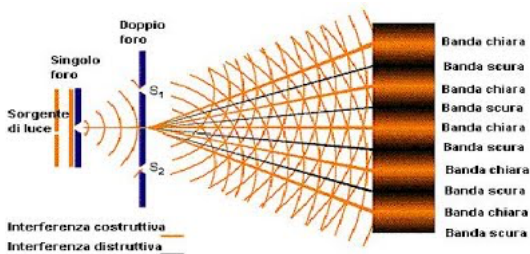
Fenditure di Young



L'esperimento viene compiuto in tre casi

- A) Sorgente emette onde sferiche classiche (per es. superficie liquido).
- B) Sorgente emette corpuscoli classici in direzioni casuali.
- C) Sorgente emette particelle quantistiche (per es. elettroni, con opportuna distanza tra le fenditure).

Fenditure di Young. A) onde classiche



Ampiezza d'onda $A_1(x)$, $A_2(x)$, A_{1+2} , con relazione

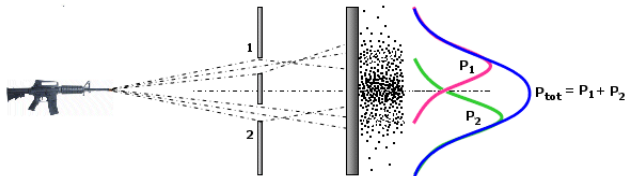
$$A_{1+2}(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

Intensità è data da modulo quadro, $I = |A|^2$ e $A = |A|e^{i\theta}$:

$$I_{1+2}(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)} \cos(\theta_1(x) - \theta_2(x))$$

- ▶ Energia arriva in maniera continua sullo schermo.
- ▶ Fenomeni di interferenza.

Fenditure di Young. B) corpuscoli

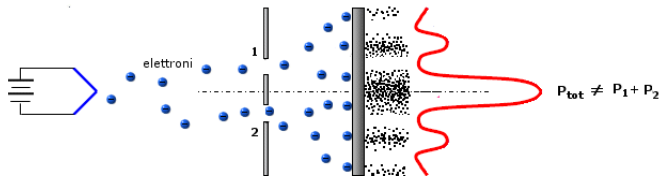


- * Corpuscoli emessi in direzioni casuali.
- * Se chiudiamo uno dei due fori, distribuzione data da $p_1(x)$ o $p_2(x)$.
- * Se entrambe fenditure aperte, distribuzione è

$$p_{tot}(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

- ▶ Energia arriva sullo schermo in maniera localizzata.
- ▶ Non ci sono fenomeni di interferenza.

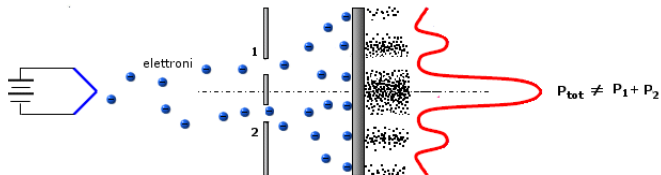
Fenditure di Young. C) elettroni



Si osservano frange di interferenza, anche se energia localizzata.

- 1) Se **ostruisco entrambe fenditure**, nessun segnale sullo schermo \Rightarrow **le particelle passano necessariamente per qualche fenditura**.
- 2) Quando **apro una sola fenditura**, se la sorgente non è troppo intensa, particelle provocano **scariche singole** e danno **distribuzione statistica simile al caso B**). Si può affermare che **particelle passano per la fenditura aperta** (sorgente di elettroni vicino a fenditura).

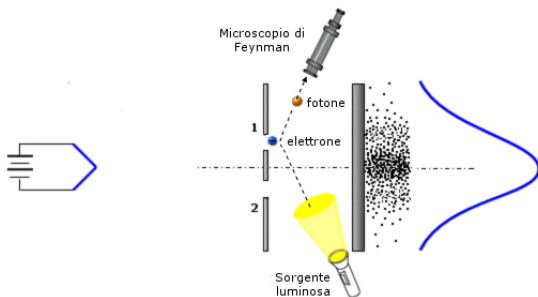
Fenditure di Young. C) elettroni



Si osservano frange di interferenza, anche se energia localizzata.

- 3a) Quando **entrambe fenditure aperte**, ancora **singole scariche**, ma **distribuzione statistica come caso A)**. C'è interazione tra elettroni?
- 3b) Si **riduce intensità sorgente finché particelle emesse una alla volta** (no **interazione tra elettroni**). Questo non modifica frange interferenza. Se ne deduce che **le particelle interagiscono con lo schermo in modo corpuscolare ma si distribuiscono secondo legge statistica tipicamente ondulatoria**.

Fenditure di Young. C) elettroni



- 4) Se quando le fenditure sono entrambe aperte **si cerca di stabilire attraverso quale passa** (sorgente di fotoni in prossimità di una fenditura), ogni **fenomeno di interferenza viene annullato**, e ritrovo distribuzione del caso B).

Fenditure di Young. Conclusioni (I)

Ripetizione dell'esperimento porta sempre alla stessa distribuzione di probabilità: quindi **la probabilità è governata da una legge fisica**. Tuttavia in ogni evento **il punto in cui la particella viene rilevata è casuale**. Siamo quindi portati a concludere che **ciò che caratterizza lo stato del sistema è la distribuzione dei possibili risultati della misura**.

Quindi:

- I sistemi quantistici hanno comportamento intrinsecamente **casuale**: non possiamo determinare a priori quale sia risultato della misura.
- I sistemi sono caratterizzati da uno **stato**, che permette di calcolare e predire la probabilità dei risultati delle misure.
- Lo stato del sistema si comporta come un'**onda**: sistemi composti da sottosistemi (due fenditure) soddisfano principio di sovrapposizione.

Fenditure di Young. Conclusioni (II)

Torniamo sulla **misura** (sistema interagisce con un apparato di misura):

- Quando si esegue una misura del sistema, il suo stato cambia “**collassando**”; finché il collasso non avviene, le diverse alternative interferiscono, ma dopo aver eseguito misura l’interferenza scompare.
- Lo **stato del sistema** rappresenta **l’informazione che noi abbiamo su di esso**. Quando osserviamo quale evento si è realizzato, l’informazione che abbiamo sul sistema cambia: avviene il collasso.
- Nel caso delle fenditure, possiamo predire probabilità che la singola particella colpisca un dato punto x dello schermo; questa probabilità è determinata dallo stato del sistema. Quando andiamo a **misurare** attraverso quale fenditura passa (cioè il valore della posizione x all’atto di attraversare le fenditure), **cambiamo lo stato del sistema** e infatti otteniamo una diversa distribuzione di posizioni sullo schermo.

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Esperimento: fascio di luce, formato da onde piane polarizzate (che avanzano nel verso positivo di asse z), viene fatto passare attraverso un analizzatore di polarizzazione A , che trasmette onde polarizzate lungo x , mentre assorbe quelle polarizzate lungo y .

- Ampiezza del campo elettrico incidente è

$$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{\epsilon} e^{i(kz - \omega t)}$$

con $\vec{\epsilon}$ è polarizzazione che giace nel piano xy (e $\|\vec{\epsilon}\|^2 \propto I_{\text{in}}$):

$$\vec{\epsilon} = \epsilon (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$$

- L'ampiezza del campo trasmesso è

$$\vec{E}_{\text{tr}} = \epsilon \cos \theta \vec{e}_x$$

per cui l'intensità del fascio **trasmesso** è

$$I_{\text{tr}} = \epsilon^2 \cos^2 \theta = I_{\text{in}} \cos^2 \theta$$

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Cerchiamo di descrivere il fenomeno secondo la **meccanica quantistica**, considerando la luce incidente come un fascio di fotoni, il cui stato è determinato dall'onda elettromagnetica.

- ▶ I fotoni che passano l'analizzatore sono raccolti dal rivelatore posto dietro l'analizzatore.
- ▶ Per ogni singolo fotone ci sono due possibilità
 - 1) L'intero fotone **attraversa** l'analizzatore e il rivelatore registra l'arrivo di un intero fotone (risultato di misura pari a 1).
 - 2) L'intero fotone **viene assorbito** dall'analizzatore e il rivelatore non dà segnali (risultato di misura pari a 0).

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

- ▶ Non è possibile a priori prevedere se un fotone passerà, ma possiamo dire che dopo un numero sufficientemente alto di passaggi, la frazione che passa sarà determinata da legge classica (probabilità \propto intensità):

$$\lim_{N_{\text{in}} \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{tr}}}{N_{\text{in}}} = \cos^2 \theta \quad \left(\vec{E}_{\text{in}} = e^{i(kz - \omega t)} \epsilon (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \right)$$

- ▶ Un fotone polarizzato lungo asse x (o y) ha probabilità 1 (o 0) di essere trasmesso (unici casi in cui risultato misura è predicibile con certezza dalla conoscenza dello stato iniziale).

Se mettiamo su linea del fascio analizzatore B , pure orientato lungo x , esso vedrà uscire da A fascio di fotoni polarizzati lungo x . Un fotone che passa per A , passerà sicuramente anche per B .

⇒ Lo stato di ogni fotone viene drasticamente modificato dalla misura.

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Estraiamo dall'esperimento i seguenti insegnamenti di carattere generale:

- 1) Lo strumento di misura dà uno spettro di possibili **valori (quantizzati) per la quantità misurata**, che chiameremo **autovalori** [$\{0, 1\}$ nell'esempio].
- 2) Ad ogni autovalore corrisponde un **autostato** del sistema, uno stato nel quale la misura della variabile dinamica dà con certezza come risultato l'autovalore corrispondente.
- 3) Uno stato generico è sovrapposizione di autostati [$\vec{E} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ nell'esempio].
- 4) La misura modifica lo stato del sistema.
- 5) **Le sole previsioni che si possono fare sul risultato sono di tipo probabilistico**. Non è quindi lecito affermare che una variabile dinamica ha o aveva un certo valore, ma solo che una misura della variabile dinamica ha dato un certo risultato. **I valori delle variabili dinamiche non sono attributi dello stato, ma piuttosto potenzialità realizzate all'atto della misura**.
- 6) La probabilità di ottenere uno degli autovalori è il quadrato della componente del vettore rappresentativo dello stato prima della misura nella direzione del vettore rappresentativo dell'autostato corrispondente all'autovalore del risultato di misura: **regola di decomposizione spettrale**. [$\cos^2 \theta$ per \vec{e}_x e $\sin^2 \theta$ per \vec{e}_y nell'esempio].

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

È necessario rinunciare a una teoria che consenta di determinare gli stati dei sistemi fisici assegnando i valori di un insieme di variabili dinamiche fondamentali del sistema (p_h, q_h) .

Bisognerà accontentarsi di una teoria nella quale gli **stati** di un sistema sono **determinati dalla conoscenza delle distribuzioni statistiche dei possibili risultati di misure di un insieme di variabili dinamiche fondamentali** del sistema.

Onde di materia

Lo **stato** del sistema è dato da distribuzione di probabilità dei risultati di possibili misure, cioè da intensità di un'onda, ovvero dalla sua ampiezza Ψ .

il valore dell'**intensità dell'onda** associata a una particella è in ogni punto proporzionale alla **densità di probabilità** di trovare la particella in quel punto.

Prendiamo un'onda monocromatica $\Psi_t(x) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

- ▶ Si propaga in direzione \vec{k} , con lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$.
- ▶ I piani di fase costante $\varphi \equiv \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(k)t = \text{cost}$:
 - * sono $\perp \vec{k}$,
 - * si propagano con velocità di fase $v_\varphi = \frac{\omega(k)}{|\vec{k}|}$.

Difficile conciliare quest'onda con le proprietà di localizzazione del corpuscolo. Infatti

$$\left| e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right| = 1 \quad \text{dovunque.}$$

Onde di materia

Rinunciamo all'idea che il corpuscolo abbia energia e impulso perfettamente definiti (così da trovare un compromesso e mantenere localizzazione):

Usiamo una **sovrapposizione lineare di onde piane di frequenze molte prossime a una fissata ν_0** : **pacchetto d'onda** t.c.

- 1) supporto ad un certo istante t_0 contenuto in regione dello spazio arbitrariamente piccola;
- 2) per tempi limitati, regione R_t in cui funzione d'onda $\neq 0$ è piccola;

Definiamo

$$\Psi_t(\vec{x}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(k)t)} \quad (1)$$

- ◇ $\phi(\vec{k})$ funzione complessa che pesa per ogni \vec{k} il contributo della relativa onda piana.
- ◇ Affinchè (1) sia ben definita, bisogna che $\int d^3k |\phi(\vec{k})|^2 < \infty$ (L^2).
- ◇ $\omega(k)$ è la frequenza.

Esaminiamo funzione d'onda all'istante $t = 0$

$$\Psi_0(\vec{x}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

- Con le ipotesi precedenti, l'integrale converge e definisce una **funzione $\Psi_0(\vec{x})$ modulo quadro sommabile (L^2)**.
- La **trasformata di Fourier** è invertibile:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \Psi_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

possiamo sempre scegliere $\phi(\vec{k})$ tale che $\Psi_0(\vec{x})$ abbia supporto limitato (e di misura non-nulla).

- Per ragioni di regolarità, anche Ψ_t (per tempi brevi) ha supporto limitato.

Pacchetto d'onda in 1 dimensione

Mettiamoci per semplicità in una dimensione, $\phi(k) = |\phi(k)| e^{i\alpha(k)}$:

$$\Psi_t(x) = \int dk |\phi(k)| e^{i\varphi(k,x)} \quad \text{dove} \quad \varphi(k,x) = kx - \omega(k)t + \alpha(k) \in \mathbb{R}$$

Re e Im dell'integrando proporzionali a $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$.

Supponiamo che $|\phi(k)|$ abbia picco pronunciato in un intervallo \mathcal{I} di larghezza Δk centrato in k_0 e praticamente nullo fuori.

- ▶ Se per un certo x , il numero di oscillazioni di integrando in \mathcal{I} è elevato, i contributi positivi e negativi si compensano $\Rightarrow \Psi_t(x) \sim 0$.
- ▶ Al tempo t , il valore di x per cui il modulo dell'integrale assume valore massimo, è il valore che rende stazionaria $\varphi(k)$ in k_0

$$x_0(t) = \omega'(k_0)t - \alpha'(k_0) \quad \rightarrow \quad \text{centro del pacchetto d'onda}$$

- ▶ Intervallo delle x dove $\Psi_t(x) \neq 0$ è t.c.

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 1$$

- ▶ Il centro del pacchetto d'onda si muove di moto $x_0(t)$. Quindi velocità

$$v_g = \dot{x}_0(t) = \omega'(k_0)$$

che va identificata con velocità della particella, cioè $v = \frac{p}{m}$.



Pacchetto d'onda in 1 dimensione

Quindi

$$v_g = \omega'(k_0) = \frac{p}{m}$$

Ipotizziamo che l'impulso della particella sia proporzionale a k_0 :

$$p = \alpha k_0 \quad \Rightarrow \quad \omega'(k_0) = \frac{\alpha k_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega(k_0) = \frac{1}{\alpha} \frac{p^2}{2m}$$

Se vogliamo che energia della particella, $E = \frac{p^2}{2m}$ sia, come per i fotoni, $E = \hbar\omega(k_0)$, si deve assumere che $\alpha = \hbar$ e quindi

$$p = \hbar k$$

Equazione di Schrödinger

Vogliamo trovare equazione differenziale di cui $\Psi_t(\vec{x})$ è soluzione.

Chiamiamo $\Psi_t(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}, t)$

Finora abbiamo visto che $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ e $\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{\vec{p}^2}{2m\hbar}$.

Definiamo $\Phi(\vec{p}) \equiv \hbar^3 \phi\left(\frac{\vec{p}}{\hbar}\right)$. Quindi

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Deriviamo rispetto a t :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \int d^3p E \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} = \int d^3p \frac{\vec{p}^2}{2m} \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Calcoliamo il laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \left(-\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} \right) \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Quindi l'equazione cercata è $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t)$.

Equazione di Schrödinger

Abbiamo utilizzato relazione per la particella libera, cioè $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Per una particella in un campo di forze con potenziale $V(\vec{x})$ abbiamo

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

Allora l'equazione per la funzione d'onda diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t)$$

Questa è detta **equazione di Schrödinger**.