Meccanica Classica

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ valore di un set di variabili dinamiche

$\updownarrow$

Pto $(\bar{p}, \bar{q})$ nello spazio delle fasi

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati (fasi)
descritto da $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$

Eq. della dinamica

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

permette di predire la posizione della particella (e il valore di ogni altra variabile dinamica)

Meccanica Quantistica:

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ distribuzione statistica dei risultati di misura delle variabili dinamiche

$\updownarrow$

FUNZIONE D'ONDA $\psi(\bar{x})$

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati
descritto da $\psi(\bar{x}, t)$

Eq. della dinamica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{x}) \right) \psi(\bar{x}, t)$$

permette di predire la probab. di misurare la particella nella posizione x: $|\psi(\bar{x})|^2$

$\psi(\bar{x})$ funzione a valori complessi

$\downarrow$
STATO
del SISTEMA

$\psi(\bar{x})$ ci dà informazioni sulla distribut. statistica della variabile dinamica X

Restringiamoci per semplicità a una particella che vive in 1 dimensione, il cui stato è descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$.

La probabilità che la particella si trovi nell'intervallo Δ è data da

$$P(x \in \Delta) = \int_\Delta dx \, \underbrace{K|\psi(x)|^2}_{\text{densità di probabilità}} \qquad K \in \mathbb{C}$$

K è t.c. la probabilità di trovare la particella in plesso valore di x è uguale a 1:

$$\underbrace{K \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x)|^2 = 1}_{\psi \in L^2(\mathbb{R})} \Rightarrow K^{-1} = \int_{\mathbb{R}} dx \, |\psi(x)|^2 \equiv \|\psi\|^2$$

Affinché ψ rappresenti uno stato ψ deve essere L^2

- Densità di probab. è $\dfrac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|^2}$

Se ψ è t.c. $\|\psi\|^2 = 1$, allora ψ si dice funz. d'onda NORMALIZZATA

Notiamo che $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ sono due funz. d'onda diverse che danno la stessa densità di probab.

Domanda: $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ descrivono lo stesso stato?

- Essendo $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, posso esprimerla per mezzo della TRASFORMATA DI FOURIER

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \underbrace{e^{ikx}}_{\substack{\text{onda piana} \\ \text{monocromatica} \\ \text{che trasporta impulso } p = \hbar k}} \hat{\psi}(k)$$

cambiamo variab. integraz. $k = p/\hbar$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, e^{ipx/\hbar} \underbrace{\frac{1}{\hbar^{1/2}}\hat{\psi}(p/\hbar)}_{\equiv \tilde{\psi}(p)}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, e^{ipx/\hbar} \, \tilde{\psi}(p)$$

Sovrapposizione di onde a impulso definito con peso $\tilde{\psi}(p)$

$$1 = \int |\psi(x)|^2 dx = \int |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$$

$$\tilde{\psi} \in L^2$$

→ possiamo interpretare $|\tilde{\psi}(p)|^2$ come dens. prob. della distribuz. degli impulsi

• Trasf. di Fourier è biunivoca → è equivalente conoscere $\psi(x)$ o $\tilde{\psi}(p)$
- $\tilde{\psi}(p)$ è la funz. d'onda in rep. p
- $\psi(x)$ " " " " " " x

Possiamo tornare alla domanda precedente:
$\psi(x)$ e $\psi(x)e^{i\alpha(x)}$ hanno trasf. di F. diverse
→ danno distribut. stat. in p diverse.

Rimangono due tipi di ambiguità (diverse ψ che danno lo stesso stato):

1) Se ψ e ψ' differiscono su un insieme di misura nulla, allora gli integrali del tipo $\int_\Delta |\psi(x)|^2 dx$ non cambiano

2) ψ e $\psi' = \beta\psi$ (β cost.) danno le stesse distrib. stat.

$$\frac{|\psi|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{|\beta\psi|^2}{\|\beta\psi\|^2}$$

→ relazione di equiv.

$\psi_1 \sim \psi_2$ se $\exists \beta$ t.c. $\psi_2(x) = \beta\,\psi_1(x)$

⇝ classi di equiv.

$$\hat{\psi} = \{\beta\,\psi(x) \mid \beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0\} \leftrightarrow \text{STATO del SISTEMA}$$

Per lavorare con gli stati (classi di equiv.) di solito si sceglie un RAPPRESENTANTE della classe

(tipicam. rappresentante a norma unitaria, funz. d'onda normalizzata)

- $\psi \in L^2$. Inoltre vogliamo che ψ si comporti come l'AMPIEZZA di un'onda, cioè che valga il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE, cioè combin. lin. di funzioni d'onda devi essere una funz. d'onda $\rightsquigarrow$ ψ deve appartenere a uno SPAZIO VETTORIALE

$\rightsquigarrow$ $L^2(\mathbb{R})$ è uno sp. vett.

- $L^2(\mathbb{R})$ è uno SPAZIO DI HILBERT : sp. vett. (a dim. ∞) con un prodotto scalare hermitiano

$$(\psi, \phi) = \int dx\, \psi^*(x)\, \phi(x) = (\phi, \psi)^* \quad \psi, \phi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$$

Prodotto scalare permette di def. una norma:

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int dx\, \psi^*(x)\, \psi(x) = \int dx\, |\psi(x)|^2$$