GENERALIZZAZIONE DI METODI UNIVARIATI

Per la maggior parte i metodi per risolvere sistemi non lineari sono generalizzazione dei metodi univariati.

ES. NEWTON-RAPHSON

Si ipotizzi che

- $l(\underline{\theta})$ log verosimiglianza sia tale per cui:

  Esiste la derivata prima e seconda (continua)

Sia $\underline{\theta}$ un vettore dei parametri che si deve stimare

$g(\underline{\theta}^{(0)}) = \ell'(\underline{\theta}^{(0)})$ è il gradiente della log-verosimiglianza in $\underline{\theta}^{(0)}$

$$g(\underline{\theta}^{(0)}) = \ell'(\underline{\theta}^{(0)}) = \left.\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}}\right|_{\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(0)}}$$

$H(\underline{\theta}^{(0)})$ è l'hessiano (matrice simmetrica di solito definita non negativa)

$$H(\underline{\theta}^{(0)}) = \left.\frac{\partial^2 \ell(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}\, \partial \underline{\theta}'}\right|_{\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(0)}}$$

Si consideri l'approssimazione di Taylor al secondo ordine

(*)
$$l(\underline{\theta}) \simeq l(\underline{\theta}^{(0)}) + \overbrace{l'(\underline{\theta}^{(0)})^T}^{g(\underline{\theta}^{(0)})^T}[\underline{\theta} - \underline{\theta}^{(0)}] + \frac{1}{2}[\underline{\theta} - \underline{\theta}^{(0)}]^T H(\underline{\theta}^{(0)})[\underline{\theta} - \underline{\theta}^{(0)}]$$

Si cerca $\underline{\theta}$ in modo che massimizzare la (*)

$$l'(\underline{\theta}) \simeq \underbrace{l'(\underline{\theta}^{(0)})}_{g(\underline{\theta}^{(0)})} + H(\underline{\theta}^{(0)})[\underline{\theta} - \underline{\theta}^{(0)}] = 0$$

$\underline{\theta}^{(0)}$ sia il valore iniziale (stima iniziale)

una stima migliore per $\underline{\theta}$ sarà $\underline{\theta}^{(1)}$:

$$\underline{\theta}^{(1)} - \underline{\theta}^{(0)} = -[H(\underline{\theta}^{(0)})]^{-1} \underbrace{g(\underline{\theta}^{(0)})}_{l'(\underline{\theta}^{(0)})}$$

$$\Rightarrow \underline{\theta}^{1} = \underline{\theta}^{(0)} - [H(\underline{\theta}^{(0)})]^{-1} \underbrace{l'(\underline{\theta}^{(0)})}_{g(\underline{\theta}^{(0)})}$$