IL PROBLEMA DEI MINIMI QUADRATI

Dato il modello $\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$

$\underline{y}$ $(n \times 1)$ $\quad X$ $(n \times p)$ $\quad \underline{\beta}$ $(p \times 1)$ $\quad \underline{\varepsilon}$ $(n \times 1)$

$\hat{\underline{\beta}}$ è una soluzione secondo il metodo dei minimi quadrati se:

$$\min_{\beta} \| \underline{y} - X\underline{\beta} \|_2^2 = \| \underline{y} - X\hat{\underline{\beta}} \|_2^2 \quad (*)$$

fz continua e differenziabile in β

OSS: $\| \underline{x} \|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$ NORMA EUCLIDEA AL QUADRATO

$$\| \underline{x} \|_2^2 = (\underline{x}' \underline{x})$$

(*) Si può passare da questo problema ad un problema equivalente utilizzando particolari trasformazioni lineari: le <u>trasformazioni ortogonali</u>

OSS | Una matrice Q $(n \times n)$ si di[ce]
ortogonale se

$$Q Q' = Q' Q = I_n$$

Due importanti proprietà delle mat[rici]
ortogonali sono

a) $\| Q \underline{x} \|_2^2 = \| \underline{x} \|_2^2 \qquad \forall \underline{x} \in R^n$

b) $\| \underset{\uparrow}{Q} X \underset{\uparrow}{Z} \|_2^2 = \| X \|_2^2 \qquad \forall X \in R^{m \times n}$
ORTOGONALI
$Q \in R^{m \times m}, Z \in R^{n \times n}$

Si possono applicare questi risultati
nel caso della regressione

Se $\underline{y} = X \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad \underline{\varepsilon} \sim (\underline{0}, \sigma^2 I_n)$

allora

$$Q \underline{y} = Q X \underline{\beta} + Q \underline{\varepsilon}$$

che si può scrivere

$$\underline{y}^* = X^* \underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^* \qquad \underline{\varepsilon}^* \sim (\underline{0}, \sigma^2 I_n)$$

$\Rightarrow$ Il problema dei minimi quadrati dive[nta]

$$\|Q\underline{x}\|_2^2 = \underline{x}'Q'Q\underline{x} = x'x = \|x\|_2^2$$

PROPIETA' MATRICE ORTOGONALE:

$A^{-1} = A'$

$A'A = I$

$|A| = \pm 1$

$$\begin{cases} \underline{a}_i'\underline{a}_j = 0 & i \neq j \\ \underline{a}_i'\underline{a}_i = 1 \end{cases}$$

$\underline{a}_{(i)}'\underline{a}_{(j)} = 0 \quad i \neq j$

$\underline{a}_{(i)}'\underline{a}_{(i)} = 1$

$C = AB$ è ortogonale se A e B sono ortogonali

DA

$$\min_{\underline{\beta}} \| \underline{y} - X\underline{\beta} \|_2^2 = \| \underline{y} - X\hat{\underline{\beta}} \|_2^2$$

A

$$\min_{\underline{\beta}} \| Q(\underline{y} - X\underline{\beta}) \|_2^2 = \min_{\beta} \| Q\underline{y} - QX\underline{\beta} \|_2^2$$

$$= \min_{\underline{\beta}} \| \underline{y}^* - X^*\underline{\beta} \|_2^2$$

PROBLEMI EQUIVALENTI

Una soluzione per il primo problema lo è anche per il secondo

Si può sfruttare questo fatto per scegliere una trasformazione ortogonale Q che rende il problema dei minimi quadrati più facile da risolvere e che allo stesso tempo porti ad una soluzione più stabile

TH1 Sia $\underset{(n \times p)}{X}$ la matrice dei

regressori di rango $p < n$

e sia Q una matrice ortogonale

scelta in modo che

$$X^* = Q X$$

sia della forma:

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ 0 \end{pmatrix}$$ con $\underset{(p \times p)}{X_1^*}$ triangolare superiore

$\Rightarrow$ La soluzione $\hat{\underline{\beta}}$ che rende

minima la:

$$\| \underline{y} - X \underline{\beta} \|_2^2$$

è data da:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X_1^*)^{-1} \underline{y}_1^*$$

e questa soluzione è unica.

Il seguente teorema permette di esprimere la soluzione del proble[ma] OLS utilizzando la fattorizzazione ortogonale

~~Teorema~~

Sia $\underset{(n \times p)}{X}$ la matrice dei regressori di rango $p < n$

e che la matrice Q sia scelta in modo che $X^* = QX$ sia della form[a]

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \underset{(p \times p)}{X_1^*} \text{ triangolare superiore}$$

NB: Q matrice ortogonale

$$\Rightarrow \quad \underline{Y}^* = X^* \underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^*$$

si può scrivere

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_1^* \\ \underline{Y}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix} \underline{\beta} + \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_1^* \\ \underline{\varepsilon}_2^* \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_1^* \\ \underline{Y}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \underline{\beta} + \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_1^* \\ \underline{\varepsilon}_2^* \end{pmatrix}$$

ora Q è ortogonale $\Rightarrow$ si può fare il seguente passaggio:

$$\| \underline{Y} \|_2^2 = \| Q \underline{Y} \|_2^2 = \| \underline{Y}^* \|_2^2 = \| \underline{Y}_1^* \|^2 + \| \underline{Y}_2^* \|$$

ORA

risulta che:

$$\| \underline{Y} - X \underline{\beta} \|_2^2 = \| Q (\underline{Y} - X \underline{\beta}) \|_2^2 =$$

$$= \| Q \underline{Y} - Q X \underline{\beta} \|_2^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \underline{Y}_1^* \\ \underline{Y}_2^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1^* \underline{\beta} \\ X_2^* \underline{\beta} \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

si può scrivere

$$= \| \underline{Y}_1^* - X_1^* \underline{\beta} \|_2^2 + \| \underline{Y}_2^* - X_2^* \underline{\beta} \|_2^2$$

$$= \| \underline{Y}_1^* - X_1^* \underline{\beta} \|_2^2 + \| \underline{Y}_2^* \|_2^2$$

Il vettore $\hat{\underline{\beta}}$ che minimizza questa ultima espressione minimizza anche il problema di partenza.

ora ripetendo

$$\| \underline{Y} - X\beta \|_2^2 = \dots \| \underline{Y}_1^* - X_1^* \underline{\beta} \|_2^2 + \underbrace{\| Y_2^* \|_2^2}$$

non è coinvolto $\underline{\beta}$ in questo termine

=> si tratta di minimizzare solo

$$\| \underline{Y}_1^* - X_1^* \beta \|_2^2$$

nell'ipotesi che rango$(X) = p$

- la soluzione a questo problema di minimizzazione è data da:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X_1^*)^{-1} \underline{Y}_1^*$$

OSS):

$\underset{(n \times p)}{X}$ con $n \geq p$

si può decomporre in un prodotto tra:

Q matrice ortogonale

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

con X_1^* upper-triangular
triangolare superiore

$\Rightarrow X^* = QX$ per cui

$$X = Q'X^*$$

$$\overset{!}{=} \underset{(n \times p)}{Q_1'} \underset{(p \times p)}{X_1^*}$$

L'ultima decomposizione si scrive di solito $\boxed{X = QR}$

NELLA LETTERATURA PROPRIA DELLA ANALISI NUMERICA

SI CHIAMA DECOMPOSIZIONE QR

Con la DECOMPOSIZIONE QR si trasforma il problema dei minimi quadrati in un sistema triangolare superiore applicando una rotazione alle colonne della matrice X

PROBLEMA

Come costruire la matrice ortogonale Q