TRASFORMAZIONI DI GAUSS

DEF.

Si consideri un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

con $x_t \neq 0$. Se
$1 \leq t \leq n$

$$\alpha_i = \frac{x_i}{x_t} \qquad \text{per } i = t+1, \ldots, n$$

e

$$M_t = I - \underline{\alpha}\, \underline{e}_t'$$

$$\underline{\alpha}' = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{t \text{ volte}}, \alpha_{t+1} \ldots, \alpha_n)$$

$$\Rightarrow \quad M_t \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ x_{t+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

M_t è una TRASFORMAZIONE DI GAUSS

$\underline{\alpha}$ è IL VETTORE DI GAUSS

La moltiplicazione di un vettore per una trasformazione di Gauss è particolarmente semplice

Se $\underline{x} \in R^n$

e $M = I - \underline{\alpha}\, \underline{e}_t'$

$\Rightarrow \quad M\underline{x} = (I - \underline{\alpha}\, \underline{e}_t')\,\underline{x} = \underline{x} - x_t\,\underline{\alpha}$

Analogamente la moltiplicazione di una matrice per una trasformazione di Gauss:

Se $X \in R^{n \times p}$

e $\underline{\alpha} = (0, 0, \ldots 0, \alpha_{t+1}, \ldots \alpha_n)'$

$M = I - \underline{\alpha}\, \underline{e}_t'$

$\Rightarrow M X = (I - \underline{\alpha}\, \underline{e}_t')\, X$

OSS)

Una matrice trasformata di GAUSS M_t è una matrice triangolare inferiore unitaria:

$$M_t \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\alpha_{t+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & & -\alpha_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

OSS)

Per passare da $X \xrightarrow[e]{} X^*$

si può utilizzare il prodotto di trasformazioni di Gauss

$$M = M_t \cdot \ldots \cdot M_1$$

con $M_i = I_n - \underline{\alpha}^{(i)} \underline{e}_i'$

$$X^* = M X$$
$$= (M_t \cdot \ldots \cdot M_1) X$$

Un aspetto interessante di M è che si può in alternativa memorizzare le prime t colonne della matrice M^{-1}

$$M^{-1} = M_1^{-1} \cdots M_t^{-1}$$

questo poiché

$$M_i^{-1} = I + \underline{\alpha}^{(i)} \underline{e}_i'$$

e risulta $e_j' \alpha^{(i)} = 0 \quad \forall j < i$

$$\Rightarrow M^{-1} = (I + \underline{\alpha}^1 \underline{e}_1') \cdots (I + \underline{\alpha}^t \underline{e}_t')$$
$$= I + \sum_{i=1}^{t} \underline{\alpha}^{(i)} \underline{e}_i'$$

Si osservi che invece di costruire esplicitamente la matrice M conviene lasciarla fattorizzata per ottenere un risparmio di memoria e una limitazione alla propagazione degli errori;

OSS)

$$|\hat{\underline{\alpha}} - \underline{\alpha}| \leq u\,|\alpha|$$