La matrice Q si può costruire

combinando più trasformazioni elementari

di Householder: $Q = (H_p H_{p-1} \dots H_2 H_1)'$

— . —

Il problema del passare da $X \to X^*$

consiste nel scegliere un vettore

per inserire zeri nella matrice $X$

$X^* = QX$

VEDIAMO COSA SUCCEDE CONSIDERANDO UN VETTORE $\underline{x}$

Dato un vettore $\underset{(n \times 1)}{\underline{x}} = (x_1, x_2, \dots x_n)'$

Si tratta di scegliere un vettore $\underline{u}$

e quindi una matrice $H$ in modo che

$H\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t, 0 \dots 0)'$

per $t \in N^+$, $1 \le t \le n$

$X_Q = X^*$

Vale a dire si sceglie una matrice

che "agisca" su un vettore $\underline{x}$ ~~[illegible]~~

in modo che le prime $t$ componenti

siano le uniche diverse da zero

Si tratta quindi di selezionare $\underline{u}$ e quindi $H$ in modo che la trasformazione soddisfi la:

$$(H\underline{x})_i = h_i = \begin{cases} x_i & i < t \\ h_t & i = t \\ 0 & i > t \end{cases}$$

ora $$h_t^2 = \sum_{i=t}^{n} x_i^2$$

infatti

$\|H\underline{x}\|_2^2 = \|\underline{x}\|_2^2$ per l'ortogonalità di $H$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \sum_{i=1}^{t-1} x_i^2 + h_t^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

da cui $$h_t^2 = \sum_{i=t}^{n} x_i^2$$

Affinché si verifichi la condizione

$$h_i = \begin{cases} x_i & i < t \\ h_t & i = t \\ 0 & i > t \end{cases}$$

si devono scegliere le componenti del vettore $\underline{u}$ in tale modo

$$u_i = \begin{cases} 0 & i < t \\ x_t \pm s & i = t \\ x_i & i > t \end{cases}$$

con $s^2 = \sum_{i=t}^{n} x_i^2$ $s$ pivot value.

~~Infatti~~ : Devo calcolare $H$? no

$$H = \left( I - 2 \frac{\underline{u}\,\underline{u}'}{\|\underline{u}\|_2^2} \right)$$

$$= \left( \underline{I} - 2 \frac{\underline{u}\,\underline{u}'}{\underline{u}'\underline{u}} \right)$$

da cui si ricava

per un vettore $\underline{x}$:

$$H\,\underline{x} = \underline{x} - 2\,\underline{u}\left(\frac{\underline{u}'\,\underline{x}}{\|\underline{u}\|_2^2}\right)$$

poniamo $\dfrac{\underline{u}'\,\underline{x}}{\|\underline{u}\|^2} = c$

$\Rightarrow \quad H\,\underline{x} = \underline{x} - 2\,c\,\underline{u}$

Si dimostra che $c = \frac{1}{2}$

Infatti consideriamo la suddivisione del vettore $\underline{x}$ nei sottovettori

$\underline{x}_U$ — prime $(t-1)$ componenti di $\underline{x}$

$x_t$ — $t$-esima componente

$\underline{x}_L$ — ultime $(n-t)$ componenti di $\underline{x}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_U \\ x_t \\ \underline{x}_L \end{pmatrix}$$

analogamente per $\underline{u}$

$\underline{0}$ prime $(t-1)$ componenti

$x_t \pm s$ $t$-esima componente

$\underline{x}_L$ ultime $(n-t)$ componenti

$$\Rightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ x_t \pm s \\ \underline{x}_L \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=t+1}^{n} x_i^2$$

$$\|\underline{u}\|_2^2 = x_t^2 \pm 2x_t s + s^2 + \|\underline{x}_L\|_2^2$$
$$= 2(\pm x_t s + s^2)$$

$\|\underline{u}\|_2^2$ è un multiplo di $s$

poiché $\underline{u} \neq \underline{0} \Rightarrow s \neq 0$

$s$ PIVOT VALUE

$\Rightarrow$ $c$ è dato da:

$$c = \frac{\underline{u}'\underline{x}}{\|\underline{u}\|_2^2}$$

$$= \left(\underline{0}'\underline{x}_u + (x_t \pm s)\, x_t + \|\underline{x}_L\|_2^2\right) / \|\underline{u}\|_2^2$$

$$= \frac{(\pm x_t s + s^2)}{2(\pm x_t s + s^2)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $$H\underline{x} = \underline{x} - 2c\underline{u} = \underline{x} - \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \\ \mp s \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H\underline{x} = \underline{x} - 2\underline{c}\,\underline{u} = \underline{x} - \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \\ \pm s \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

Vale a dire si è ottenuto quello che si voleva.

<u>La scelta</u> <u>del segno</u> <u>per s</u>

Per specificare completamente $H$ si deve selezionare il segno di $\underline{s}$

<u>Algebricamente</u> una o l'altra scelta produce una matrice di rotazione con le proprietà desiderate, ma

la scelta è <u>numericamente</u>

segno$(s)$ = segno$(X_r)$

Se $\underline{s}$ è scelto in modo che il suo segno

né opposto né parallelo di $x_r$ $\Rightarrow$ si possono

verificare delle compensazioni

$\Rightarrow$ il segno di $s$ deve essere scelto in modo

da armonizzare con il segno di $x_r$

Vale a dire

segno $(s)$ = segno $(x_r)$

(Dimostrazione PARLETT)

# I CALCOLI CON LE MATRICI DI H.

Le trasformazioni di Householder
che si sono viste sono matrici $(n \times n)$
ma la trasformazione di cui
abbiamo bisogno è una matrice Q
formata da p di tali matrici.

Questo calcolo
potrebbe sembrare dispendioso in termini
di tempo di calcolo, di spazio di
memoria e di precisione numerica (poiché
la maggior parte dei calcoli comportano
prodotti interni).

Per fortuna le trasformazioni di
Householder hanno una struttura
particolare di modo che non è mai
necessario ~~formare~~ calcolare le H esplicitamente

PROBLEMA:

Come costruire una particolare matrice H al variare di t.

Vale a dire: come costruire la serie di matrici H per arrivare alla $X^*$

$$\underset{(n \times p)}{X} = [X_1 \; X_2 \; \ldots\ldots \; X_p]$$

poniamo $X_j = X_j^{(0)}$

$$X = X^{(0)} = [X_1^{(0)} \; X_2^{(0)} \; \ldots\ldots \; X_p^{(0)}]$$

↑

matrice di partenza

La prima trasformazione di Householder

Sia $X^{(0)} \equiv X = [X_1 \, X_2 \ldots X_p]$

$$\equiv [X_1^{(0)} \, X_2^{(0)} \ldots X_p^{(0)}]$$

Si costruisce
la prima matrice di Householder $H_1$
in modo che la prima colonna
composte da
ne risulti zeri tranne il primo
elemento.

$H_1$ deve essere ovviamente una funzione
di $X_1$ (I$^a$ colonna)
Applicando $H_1$ a $X$ (ovvero
moltiplicando $H_1$ per $X$) otteniamo

$$X^{(1)} = H_1 X^{(0)} = [X_1^{(1)} \, X_2^{(1)} \ldots X_p^{(1)}]$$

in cui $X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$

Nel successivo passo si tratta di costruire una matrice di Householder $H_2$ in cui le ultime $(n-2)$ posizioni di $X_2^{(1)}$ sono nulle mentre la prima posizione resta inalterata

$$X^{(2)} = H_2 X^{(1)} = [X_1^{(2)} X_2^{(2)} \dots X_p^{(2)}]$$

Per cui le prime due colonne di $X^{(2)}$ hanno la forma:

$$[X_1^{(2)} X_2^{(2)}] = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ 0 & x_2^2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuando -- al passo $i$

si tratta di costruire la matrice di Householder

$H_j$ in cui le colonne $X_j^{(j-1)}$ ha le ultime $(n-j)$ posizioni uguali a zero.

Ora

$$X^{(j)} = H_j \, X^{(j-1)}$$

$$X^{(j)} = \begin{array}{r} \left.\begin{matrix} \\ *\,(j \times j) \\ \\ \end{matrix}\right\{ \\ \left.\begin{matrix} (n-j)\times j \end{matrix}\right\{ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_j^1 \\ & x_2^2 & & & \\ & & x_3^3 & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & x_j^j \\ \hline & & O & & \end{array}\right]$$

NB: $H_j$ non modifica le prime $(j-1)$ colonne alle quali è applicata.

* TRIANGOLARE SUPERIORE

AL TERMINE DEL PROCESSO

$$X^* \equiv X^{(p)} = H_p H_{p-1} \cdots H_2 H_1 X$$

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & \cdots & x_p^1 \\ 0 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & \cdots & x_p^2 \\ 0 & 0 & x_3^3 & \cdots & \cdots & x_p^3 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & x_p^p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q è il prodotto delle matrici H
ma in generale non è necessario
calcolare la Q in maniera esplicita
e neppure le H matrici.
Poiché $H_j$ non riguarda le prime $(j-1)$
colonne esse non devono essere calcolate
di volta in volta; applicando
$H_j$ a $X_j^{(j-1)}$ basta sostituire

il j-esimo valore in quella colonna
con (∓ s) e metterlo nelle
rimanenti (i−j) posizioni

— · —