LE COMPONENTI PRINCIPALI E IL PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Le componenti principali si riferiscono ad un insieme di variabili incorrelate formate prendendo combinazioni lineari delle variabili di partenza.

Le variabili originarie si possono rappresentare tramite le componenti principali il che può rendere più facile il calcolo e l'interpretazione.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Il problema del calcolo degli autovalori e degli autovettori è quasi sempre associato a matrici reali semidefinite positive.

OSS
autovalori o radici caratteristiche o radici latenti
autovettori o vettori caratteristici o vettori latenti

Gli algoritmi per ottenere gli autovalori e gli autovettori sono correlati con il problema di trovare SVD.

La moderna teoria per il calcolo degli autovalori e autovettori inizia nel 1961 con i lavori di FRANCIS

Il lavoro principale si deve a WILKINSON (1965):

"The Algebraic Eigenvalue Problem"

I lavori seguenti sono sintetizzati in quello di

GOLUB - VAN LOAN (1983)

"Matrix computation"

Gli autovalori di una matrice sono ②
le p radici del polinomio caratteristico

$$|A - \lambda I|$$

DATA UNA MATRICE A

L'insieme delle radici si indica con
$\lambda(A)$ se $\lambda(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_p\}$

$$\mathrm{Det}(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_p$$

I vettori $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

sono gli autovettori.

Un autovettore definisce un sottospazio unidimensionale invariante rispetto alla premoltiplicazione per A.

<u>OSS)</u>
Più in generale un sottospazio
$S \subset R^p$:

$$\underline{x} \in S \Rightarrow A\underline{x} \in S$$

si dice invariante (rispetto A)

OSS)

Se $AX = XB$ $\quad (X \in \mathbb{R}^{p \times n})$ $(B \in \mathbb{R}^{n \times n})$ $(A \in \mathbb{R}^{p \times p})$

RANGO DI X

$\Rightarrow \mathcal{R}(X)$ è invariante

e inoltre

$$By = \lambda y \Rightarrow A(Xy) = \lambda(Xy)$$

Perciò se X è a rango pieno

$\Rightarrow AX = XB \Rightarrow \lambda(B) \subset \lambda(A)$

Se X è quadrata e non singolare

$\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$

e A e $B = X^{-1}AX$

sono simili o similari

X è detta TRASFORMAZIONE-SIMILARE

Utilizzando le trasformazioni similari

si può ridurre una data matrice

in diverse forme canoniche

$\Downarrow$

TH.

Matrici simili hanno gli stessi autovalori

DIM)

Siano A e B due matrici simili

$$B = X^{-1} A X$$

A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico. Infatti:

$$\det(B - \lambda I) = \det(X^{-1} A X - \lambda I)$$

$$= \det[X^{-1}(A - \lambda I) X]$$

$$= \det[X^{-1}] \det(A - \lambda I) \det(X)$$
$$= \det(A - \lambda I)$$

Il det. del prodotto di due matrici è il prodotto dei determinanti.

Il determinante dell'inversa di ~~data~~ una matrice è il reciproco del determinante della matrice

DECOMPOSIZIONE DI SCHUR PER MATRICI REALI

<u>OSS</u>) Una matrice triangolare superiore a blocchi con blocchi (1×1) o (2×2) diagonali si dice QUASI TRIANGOLARE SUPERIORE.

Sia $A \in R^{p \times p}$, allora

$\exists$ una matrice ortogonale Q:

$$Q' A Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1p} \\ 0 & R_{22} & & R_{2p} \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & R_{pp} \end{bmatrix}$$

con R_{ii} matrice (1×1) o (2×2)

Inoltre Q si può scegliere in modo che gli autovalori compaiano sulla diagonale principale

$$A = \begin{bmatrix} 6,8 & 2,4 \\ 2,4 & 8,2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

ortogonale $Q'Q = I$

$Q' = Q^{-1}$

eq. caratteristica

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} (6,8-\lambda) & 2,4 \\ 2,4 & 8,2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6,8-\lambda)(8,2-\lambda) - (2,4)^2 = 0$$

$$55,76 - 15\lambda + \lambda^2 - 5,76$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$$

$$Q'AQ = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0,8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,8 & 2,4 \\ 2,4 & 8,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{0,6 \cdot 6,8}^{4,08} + \overbrace{0,8 \cdot 2,4}^{1.92} & \overbrace{0,6 \cdot 2,4}^{1.44} + \overbrace{0,8 \cdot 8,2}^{6.56} \\ \underbrace{-0,8 \cdot 6,8}_{-5,44} + \underbrace{0,6 \cdot 2,4}_{1.44} & \underbrace{-0,8 \cdot 2,4}_{1,92} + \underbrace{0,6 \cdot 8,2}_{4.9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{3,6+6,4}^{10} & \overbrace{-4,8+4,8}^{0} \\ \underbrace{-2,4+2,4}_{0} & \underbrace{3,2+1,8}_{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$