Tecnica attuariale delle assicurazioni di persone

Modulo: Risk management e solvibilità nelle assicurazioni vita

Prof. Mario Marino

a.a. 2022/2023

Agenda

Il Risk Management

Una definizione "resiliente" di Risk Management (RM)

Il RM è una disciplina per convivere con la possibilità che eventi futuri possano causare effetti economico-finanziari avversi.

Tuttavia, occorre considerare che un rischio può essere:

(a) puro, ovvero esso può comportare solo perdite e il RM serve per gestire tali perdite (effetti avversi);

(b) speculativo, ovvero si possono avere profitti e perdite e il RM serve per gestire entrambe le eventualità

Nella prospettiva (b), il RM richiede la visione dell'intera impresa e del suo profilo di rischio.

Dunque, si approccia a una visione più generale di Risk Management, detta Enterprise Risk Management (ERM).

Enterprise Risk Management

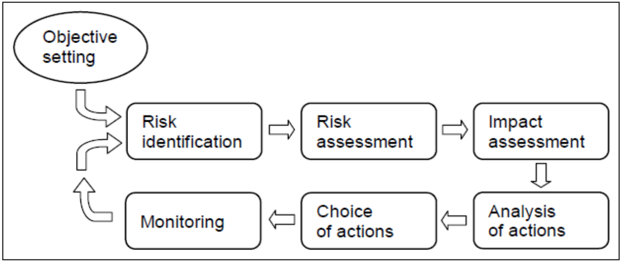
Esistono diverse definizioni, sostanzialmente equivalenti. In generale:

Enterprise Risk Management (ERM)

L'ERM è un processo olistico di gestione aziendale volto a:

- Minimizzare l'effetto dei rischi sul capitale e sugli utili dell'impresa;
- Incrementare il valore dell'impresa per i propri stakeholders, nel breve e nel medio-lungo termine

Il processo ERM è schematizzabile come di seguito:



Fasi del processo ERM

(1) Identificazione dei rischi, cioè delle v.a. che impattano su risultati aziendali (es. rendimenti degli investimenti, numero di sinistri, etc.)

(2) Quantificazione dei rischi, cioè utilizzo di modelli stocastici per associare una misurazione monetaria ai rischi

(3) Quantificazione degli impatti, cioè definizione delle distribuzioni di probabilità dei risultati d'intreresse (es. cash flows industriali, valore degli assets, etc.) e risultati sintetici su di essi (es. VaR, TailVaR, etc.)

(4,5) Analisi e scelta delle azioni, cioè design dei prodotti, trasferimento dei rischi, allocazione di capitale, etc.

(6) Monitoraggio, cioè il controllo dei risultati e degli scenari adottati (es. inflazione, legislazione, etc.)

• Fasi (2) e (3): Quantitative Risk Management con approccio attuariale stocastico.

Agenda

ERM, Fase (1): Identificazione dei rischi

Per identificare i rischi, occorre:

- Definire le cause e i fattori di rischio.
  - Le cause sono le v.a. che impattano sui risultati finali;
  - I fattori di rischio sono le caratteristiche idonee ad aggravare, o meno, l'impatto delle cause di rischio.

  Esempio: Sulla redditività di una TCM incide il rischio di mortalità, causato dall'andamento della v.a. "numero di decessi", caratterizzata dal fatto che le teste assicurate siano o meno fumatori.

- Definire le componenti del rischio:
  - *Rischio di processo*, i.e. il rischio di scarti accidentali;
  - *Rischio di rappresentazione o di incertezza*, i.e. il rischio di scarti sistematici;
  - *Rischio di catastrofe*, i.e. il rischio di eventi estremi o di concentrazione dei rischi.

ERM, Fase (1): Identificazione dei rischi in ass.ne vita

Classificazione delle principali categorie di rischi:

(1) Rischi contrattuali (underwriting risks), quali immediata conseguenza della stipulazione di contratti assicurativi e delle condizioni ivi previste:

- (1.a) *Rischio di mortalità/longevità*, causato dall'aleatorietà delle durate di vita degli assicurati. In particolare:
  - Rischio mortalità = mortalità maggiore di quella attesa, ovvero un rischio puro per ass.ni con capitale sotto rischio positivo (TCM, miste, etc.)
  - Rischio longevità = mortalità minore di quella attesa, ovvero rischio puro per assicurazioni con capitale sotto rischio negativo (rendite vitalizie, capitali differiti)
- (1.b) *Rischio di comportamento*, causato dalle scelte degli assicurati in merito a: riscatto, storno, opzione rendita, etc.
- (1.c) *Rischio di selezione*, causato da una non corretta valutazione delle specificità di alcuni rischi assunti
- (1.d) *Rischio di pricing*, rischio di subire perdite a causa di un inadeguato livello di premio (es. errata valutazione delle basi tecniche, dei parametri di spesa, etc.)

ERM, Fase (1): Identificazione dei rischi in ass.ne vita

(2) Rischio di credito (o di controparte), causato dall'insolvenza di emittenti di titoli, dall'insolvenza dei riassicuratori e/o degli assicurati

(3) Rischio di mercato (o di performance, o finanziario), rischio che il valore degli attivi subisca variazioni diverse da quello degli impegni dell'assicuratore. In particolare:

- (3.1) *Rischio di tasso d'interesse*, causato da andamenti avversi dei tassi di interesse
- (3.2) *Rischio azionario*, causato da andamenti avversi dei valori di mercato delle azioni e degli indici di borsa
- (3.3.) *Rischio di cambio*, causato da andamenti avversi dei tassi di cambio delle valute
- (3.4) *Rishio di Asset-Liability Management*, causato dalla possibilità che l'andamento dei tassi di interesse e dei valori azionari produca effetti diversi sul valore degli attivi e su quello degli impegni

ERM, Fase (1): Identificazione dei rischi in ass.ne vita

(4) Rischio operativo, causato da errori imputabili alle risorse umane, ai processi aziendali e ai sistemi informatici.

(5) Rischio di liquidità, causato dell'insufficienza di attivi liquidi a fronte di impegni di pagamento. In particolare:

   (5.1) *Rischio di valore di vendita*, causato dal bisogno inatteso di liquidità in condizioni di mercato che comportano bassi valori di realizzo degli investimenti

   (5.2) *Rischio di mercato dei capitali*, causato da difficoltà dell'assicuratore nel reperimento di liquidità da fonti esterne.

(6) Rischi di eventi esterni, causati da eventi avversi non di carattere tecnico-finanziario e non controllabili dall'assicuratore:

   (6.1) Rischio di reputazione

   (6.2) Rischi legali

   (6.3) Rischi di regolamentazione (variazioni dello scenario normativo, di controllo, fiscale)

   (6.4) Rischi politici (variazioni dello scenario politico nazionale ed internazionale e di politica economica)

Agenda

ERM, Fase (2) e (3): il Quantitative Risk Management

- Il Quantitative Risk Management attiene alla quantificazione dei rischi e dei relativi impatti sui risultati dell'assicuratore (fasi (2) e (3) del processo ERM)
- La sua implementazione richiede:
  - (i) Modelli probabilistici per i rischi (es. distribuzioni di probabilità, modello probabilistico finanziario, etc.)
  - (ii) Metodi di calcolo della distribuzione di probabilità dell'impatto dei rischi. In particolare:
    - (i.a) metodi analitici (non applicabili in molti problemi pratici);
    - (i.b) metodi ricorsivi (es. algoritmi per il calcolo di distribuzioni di probabilità di danno)
    - (i.c) metodi simulativi, eventualmente basati su generatori di scenari, per il calcolo di distribuzioni "empiriche" degli impatti
  - (iii) Valori sintetici, in particolare misure di rischio (es. VaR, TailVaR, ecc.)
  - (iv) Quantificazione degli impatti mediante analisi di sensitività

L'approccio del QRM: caso generale

- Si consideri una posizione finanziaria aleatoria sull'intervallo $[t, t + \Delta t]$.
- Al tempo t è noto il valore V_t di tale posizione, mentre è aleatorio $V_{t+\Delta t}$
- Il valore della posizione finanziaria dipende dai rischi $\boldsymbol{Z}_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2}, \ldots, Z_{t,d})^T$, i quali sono variabili deterministici in t ma v.a. in $t + \Delta t$. Per cui:

$$V_t = f(t, \boldsymbol{Z}_t) \tag{1}$$

$$V_{t+\Delta t} = f(t + \Delta t, \boldsymbol{Z}_{t+\Delta t}) \tag{2}$$

- La variazione di valore in $[t, t + \Delta t]$ indica il possibile profitto/perdita:

$$PL_{t+\Delta t} := V_{t+\Delta t} - V_t = f(t + \Delta t, \boldsymbol{Z}_{t+\Delta t}) - f(t, \boldsymbol{Z}_t) \tag{3}$$

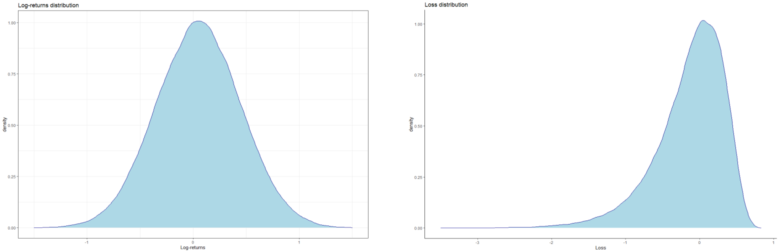
- La distribuzione di PL dipende dalla distribuzione dei rischi $\boldsymbol{Z}$ e da f.

L'approccio del QRM: caso generale

Esempio

- Si consideri un azione con prezzo corrente V_t
- Si definisca $Z_t = \ln V_t$, la cui variazione in $[t, t + \Delta t]$ è il rendimento logaritmico: $X_{t+\Delta t} = \ln V_{t+\Delta t} - \ln V_t$
- Il profitto/perdita del periodo è:

$$PL_{t+\Delta t} = V_{t+\Delta t} - V_t = V_t(e^{X_{t+\Delta t}} - 1) \tag{4}$$



La distribuzione della PL (dx) discende dalla trasformazione in eq.(4) della distribuzione di $X_{t+\Delta t}$ (sx)

Modelli stocastici per il QRM nelle ass.ni vita

- Il QRM nell'ambito delle ass.ni sulla vita si fonda sull'utilizzo di strumenti attuariali stocastici, sia tradizionali che innovativi
- Di seguito introduciamo alcuni dei modelli stocastici necessari per la valutazione dei principali rischi del business assicurativo vita.
  In particolare, ci riferiamo a:
  - La passeggiata aleatoria
  - Il modello binomiale
  - Il moto browniano e il moto browniano geometrico
  - Il metodo simulativo Monte Carlo

La passeggiata aleatoria

- Spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, con $\mathcal{T} = \{0, \dots, n\}$
- Sia $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di v.a. IID tali che, $X_0 = 0$ e

$$X_t = \begin{cases} 1 & \sim \ p \\ -1 & \sim \ 1-p \end{cases} \tag{5}$$

Passeggiata aleatoria semplice

È un processo stocastico $\{S_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, con $S_0 = 0$, definito come:

$$S_t = S_{t-1} + X_t = \sum_{k=1}^{t} X_k \tag{6}$$

Se $p = \frac{1}{2}$ la passeggiata aleatoria è detta simmetrica, altrimenti è asimmetrica.

La passeggiata aleatoria

Ne segue che:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= 2p-1 && \Longrightarrow \mathbb{E}(S_t) = t(2p-1) \\ \mathbb{VAR}(X_t) &= 4p(1-p) && \Longrightarrow \mathbb{VAR}(S_t) = 4tp(1-p) \end{aligned} \tag{7}$$

Nel caso della passeggiata aleatoria semplice:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= 0 && \Longrightarrow \mathbb{E}(S_t) = 0 \\ \mathbb{VAR}(X_t) &= 1 && \Longrightarrow \mathbb{VAR}(S_t) = t \end{aligned} \tag{8}$$

- La passeggiata aleatoria è una catena di Markov e per $j, i \in \mathcal{S}$, con $\mathcal{S}$ lo spazio degli stati, risulta:

$$\mathbb{P}(S_t = j \mid S_{t-1} = i) = \mathbb{P}(S_{t-1} + X_t = j \mid S_{t-1} = i) = \mathbb{P}(X_t = j - i) \tag{9}$$

La distribuzione di prob.tà di S_t deriva da quella dell'incremento X_t.

Dalla passeggiata aleatoria al modello binomiale

- Sia $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di v.a. IID del tipo

$$X_t = \begin{cases} u & \sim & p \\ d & \sim & (1-p) \end{cases}, \quad ud = 1, X_0 = 0. \tag{10}$$

Processo binomiale moltiplicativo

É un processo stocastico $\{S_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, con $S_0 = s \in \mathbb{R}^+$, tale che:

$$S_t = S_{t-1}X_t = s\prod_{k=1}^{t} X_k \tag{11}$$

Ne segue che:

$$\mathbb{E}(S_t) = s\left(up + d(1-p)\right)^t \tag{12}$$

$$\mathbb{VAR}(S_t) = s^2\left[\left(u^2p + d^2(1-p)\right)^t - ((up+d)(1-p))^{2t}\right] \tag{13}$$

Dalla passeggiata aleatoria al modello binomiale

- Il numero di volte in cui, in t istanti, il processo $\{S_t\}$ ha avuto un incremento pari a u è una v.a. Binomiale:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{k=1}^{t} X_k \sim \mathrm{Bin}(t, p), \\ \text{con } X_t &= \begin{cases} 1 & \sim \mathbb{P}\left(S_t = uS_{t-1}\right) = p \\ 0 & \sim \mathbb{P}\left(S_t = dS_{t-1}\right) = 1 - p \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

  Ne segue che:

$$S_t = s \cdot u^{Y_t} \cdot d^{t-Y_t} \tag{15}$$

  nonché

$$\mathbb{P}\left(S_t = s \cdot u^y \cdot d^{t-y}\right) = \mathbb{P}\left(Y_t = y\right) = \binom{t}{y} p^y (1-p)^{t-y} \tag{16}$$

Dalla passeggiata aleatoria al moto browniano

- Si consideri l'intervallo di tempo $[0,1]$ partizionato in N sotto-intervalli di ampiezza $\frac{1}{N}$
- Sia data una passeggiata aleatoria semplice riscalata secondo il fattore $\frac{1}{\sqrt{N}}$, ovvero:

$$S_j = S_{j-1} + \frac{1}{\sqrt{N}} X_j \tag{17}$$

  con $j = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1$
- Per il Teorema del Limite Centrale, risulta che:

$$\lim_{N\to\infty} S_1 = Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{18}$$

  e per intervalli non unitari, risulta che

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{t}\frac{\sum_{k=1}^{t} X_k}{\sqrt{Nt}} = Z_t \sim \mathcal{N}(0,t) \tag{19}$$

Il moto browniano

Moto browniano standard o processo di Wiener

Dato un spazio di probabilità $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,n]}, \mathbb{P}\right)$, si definisce moto browniano standard il processo stocastico $\mathcal{Z} = \{Z_t\}_{t\in[0,n]}$, $\mathcal{F}_t$-adattato, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $Z_0 = 0$ q.c.
- $\mathcal{Z}$ è un processo continuo
- Comunque presi $t_1 < t_2 < t_3 \in [0, n]$, l'incremento $Z_{t_2} - Z_{t_1}$ è indipendente da $Z_{t_3} - Z_{t_2}$
- Comunque presi $t_1 < t_2$, l'incremento $Z_{t_2} - Z_{t_1}$ è una v.a. Gaussiana, i.e.

$$Z_{t_2} - Z_{t_1} \sim \mathcal{N}\left(0, t_2 - t_1\right)$$

Il moto browniano

É possibile generalizzare il moto browniano al caso in cui gli incrementi abbiano valore atteso non nullo e varianza non unitaria su intervalli di tempo unitari.

- Sia dato un processo $\mathcal{W} = \{W_t\}_{t \in [0,n]}$, con $W_0 = w_0 \in \mathbb{R}$
- Si indichi con μ il coefficiente di deriva o drift del processo, tale che $\mathbb{E}(W_t) = \mu t$, $\forall t \in [0, n]$
- Si indichi con σ^2 il coefficiente di varianza o di diffusione del processo, tale che $\mathbb{V}\mathrm{AR}(W_t) = \sigma^2 t$, $\forall t \in [0, n]$
- Si definisce (μ, σ^2)-moto browniano il processo stocastico $\mathcal{W}$ in cui:

$$W_t = \mu t + \sigma Z_t, \quad t \in [0, n] \tag{20}$$

Ne segue che:

$$W_t \sim \mathcal{N}\left(w_0 + \mu t, \sigma^2 t\right) \tag{21}$$

Il moto browniano

- L'incremento del moto browniano in un intervallo di tempo di ampiezza infinitesimale $[t, t + dt]$ è:

$$dW_t := W_{t+dt} - W_t = \mu dt + \sigma dZ_t \tag{22}$$

con $dZ_t := Z_{t+dt} - Z_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$

- L'eq.(22) è detta dinamica del processo, ed è ciò che in calcolo stocastico è nota come equazione differenziale stocastica (SDE)
- Pertanto, risulta che il (μ, σ^2)-moto browniano è quel processo stocastico che soddisfa la SDE (22)

Il moto browniano geometrico

Moto browniano geometrico

Si definisce moto browniano geometrico il processo stocastico $\mathcal{W} = \{W_t\}_{t \in [0,n]}$ definito come:

$$W_t = W_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z_t}, \quad W_0 = w_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{23}$$

ossia W_t segue una distribuzione log-normale caratterizzata da:

$$\mathbb{E}(W_t) = W_0 e^{\mu t}, \quad \mathbb{VAR}(W_t) = W_0^2 \cdot e^{2\mu t} \cdot \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

- In termini di SDE, il moto browniano geometrico in eq.(23) è quel processo stocastico che soddisfa la seguente SDE:

$$dW_t = \mu W_t dt + \sigma W_t dZ_t \tag{24}$$

Discretizzazione e simulazione dei processi stocastici

- In generale, il moto browniano permette la rappresentazione dei c.d. processi diffusivi, quali processi markoviani a traiettorie continue caratterizzati dalla generica SDE:

$$dW_t = a\,(t, W_t)\,dt + b\,(t, W_t)\,dZ_t,\; W_0 = w_0. \tag{25}$$

- Affinchè esista, unica, la soluzione di una SDE, i coefficienti $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ devono soddisfare specifiche condizioni di regolarità
- Inoltre, la soluzione W_t potrebbe non essere disponibile in forma esplicita, ovvero non si conosce esplicitamente la distribuzione di W_t
- Per cui, è necessario procedere per approssimazione:
  (a) Schema di Eulero per la discretizzazione del processo e
  (b) Metodo Monte Carlo per la simulazione delle traiettorie del processo

Lo schema di Eulero

Si consideri il processo diffusivo:

$$dW_t = a\,(t, W_t)\,dt + b\,(t, X_t)\,dZ_t,\ t \in [0, n],\ W_0 = w_0. \qquad (26)$$

- Lo schema di Eulero consiste nel suddividere l'intervallo $[0, n]$ in n sotto-intervalli definiti dagli $n + 1$ istanti $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, n\}$
- Si considera il processo $\{\hat{W}_t\}$ come stima del processo reale $\{W_t\}$ e definito dall'equazione, $i = 1, \ldots, n - 1$:

$$\hat{W}_{t_{i+1}} = \hat{W}_{t_i} + a\left(t_i, \hat{W}_{t_i}\right)(t_{i+1} - t_i) + b\left(t_i, \hat{W}_{t_i}\right)\sqrt{t_{i+1} - t_i}\,z_{i+1} \qquad (27)$$

  con $z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Per il (μ, σ^2)-moto browniano si ha:

$$\hat{W}_{t_{i+1}} = \hat{W}_{t_i} + \mu\,(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}\,z_{i+1} \qquad (28)$$

Il metodo Monte Carlo

- L'implementazione dell'eq.(28) richiede che ad ogni passo t_i siano considerate le realizzazioni della v.a. z_i
- A tal fine è possibile procedere con un metodo simulativo, ovvero tale per cui si generino le possibili realizzazioni che z_i può assumere al tempo t_i
- Il metodo Monte Carlo (MC) è un metodo simulativo largamente utilizzato e nasce come procedura numerica per fornire soluzioni approssimate a problemi che non presentano una soluzioni esplicita
- Per simulare i processi stocastici, il metodo MC si basa sulla definizione frequentista di probabilità, per la quale la probabilità di un esperimento aleatorio è vista come N. di casi favorevoli sul N. totale dei casi

Il metodo Monte Carlo

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funziona continua e di quadrato integrabile. Si voglia determinare il valore

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx \tag{29}$$

Se non è possibile la risoluzione in via analitica, occorre definire un'approssimazione $\hat{\mathcal{I}}$ che funga da stimatore di $\mathcal{I}$

- Sia $U \sim \text{Unif}[a,b]$ una v.a. continua uniforme in $[a,b]$, con densità $g_U(x)$. Si ha:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}(f(U)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g_U(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \text{ da cui} \\ \int_a^b f(x)dx = (b-a)\mathbb{E}(f(U))\end{gathered} \tag{30}$$

- Basta conoscere $\mathbb{E}(f(U))$ per determinare $\mathcal{I}$

Il metodo Monte Carlo

- $\hat{\mathcal{I}}_m$ è uno stimatore di $\mathbb{E}(f(U))$, ed è basato su un campione di m osservazioni $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)$
- Lo stimatore è definito in termini di media campionaria:

$$\hat{\mathcal{I}}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(u_i) \tag{31}$$

da cui è noto osservare che:

$$\lim_{m \to \infty} \hat{\mathcal{I}}_m = \mathcal{I} \tag{32}$$

$$\hat{\mathcal{I}}_m \xrightarrow{m \to \infty} \mathcal{N}\left(\mathcal{I}, \frac{\sigma_f}{\sqrt{m}}\right) \tag{33}$$

- $\sigma_f / \sqrt{m}$ stima dell'errore commesso nell'approssimazione

Il metodo Monte Carlo

Ai fini della simulazione dei procesi stocastici, l'idea che ne deriva è che sia possibile sfruttare il metodo MC:

(a) Generando una sequenza di numeri da una distribuzione uniforme $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Tali numeri sono detti pseudo-casuali in quanto rappresentano le realizzazioni di una v.a., ma sono generati tramite algoritmi deterministici

(b) Trasformando la sequenza di numeri pseudo-casuali in una sequenza di numeri appartenenti al dominio della v.a. desiderata (non uniforme).
In tale senso, facciamo specifico riferimento al c.d. metodo della trasformata inversa

Il metodo Monte Carlo: il metodo della trasformata inversa

Il principio alla base di questo metodo è semplice: supponendo di voler generare numeri da una distribuzione F, si cerca una trasformazione di coordinate

$$\Psi : u \to x$$

tale che si trasformi la densità della distribuzione uniforme in quella $f(x)$ della F

- Sia X una v.a. con dominio Ω_x e f.d.r. $F(x) : \Omega_x \to [0,1]$. Se esiste $F^{-1}(x)$ allora si ha che:

  $$X = F^{-1}(U) \sim F(x),$$

  dove $U \sim \text{Unif}[0,1]$. Pertanto, $\Psi = F^{-1}$ è la trasformazione cercata.

Il metodo Monte Carlo: il metodo della trasformata inversa

Esempio con distribuzione esponenziale: $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

$$F(x) = 1 - e^{-x/\alpha} \implies F^{-1}(u) = -\alpha \ln(1-u)$$

Esempio di codice in R, $\alpha = 1$

```
m = 100000
set.seed(21032013)
U = runif(m)
X = -log(1-U)
Y = rexp(m)
par(mfrow=c(1,2))
hist(X, freq=F, main="Exp tramite Unif")
hist(Y, freq=F, main="Exp tramite R")
```

Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici

Simulazione moto browniano geometrico

- Partizionare l'intervallo $[0, n]$ in una successione di istanti $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$
- Fissare i parametri $(W_{t_0}, \mu, \sigma, m)$, con m=numero di simulazioni
- Per ogni istante di tempo t_i, $i = 1, \ldots, n-1$:
  (a) Generare una sequenza di numeri pseudo-casuali:
  $$\{u_j, j = 1, \ldots, m\}, \; u_j \in [0, 1]$$
  (b) Trasformazione di $\{u_j, j = 1, \ldots, m\}$ in
  $$\{z_j, j = 1, \ldots, m\}, \text{ con } z_j = \Phi^{-1}(u_j) \in \mathbb{R},$$
  essendo Φ^{-1} la f.d.r. inversa di una $\mathcal{N}(0, 1)$
  (c) Calcolare:
  $$\hat{W}^{(j)}_{t_{i+1}} = \hat{W}^{(j)}_{t_i} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}\, z^{(j)}_{i+1}}$$

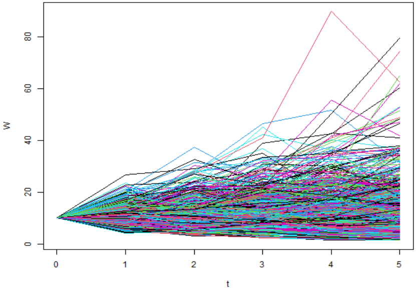
Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici

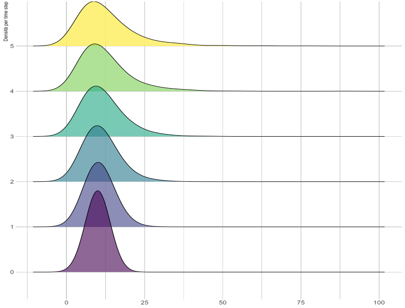
Simulazione moto browniano geometrico in R

```
S0 = 10 ; mu = 0.05 ; sigma = 0.3 ; endT = 5 ; deltaT = 1
time_seq = seq(0,endT,deltaT)
m = 10^3
muT = (mu - 0.5*sigma^2)*deltaT
siT = sigma * sqrt(deltaT)
St = matrix(NA, ncol = length(time_seq), nrow = m)
St[,1] = rep(S0,m)
set.seed(10042013)
for (i in (1:(length(time_seq)-1))) {
St[,i+1] = St[,i]*exp(muT+siT*rnorm(m))}
```

Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici

Figure: Grafico a sx: traiettorie simulate del processo moto browniano geometrico. Grafico a dx: distribuzione simulata di W_t, $\forall t \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.





Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici multivariati

- Si consideri un moto browniano geometrico bivariato $\left(\mathcal{W}_{(1)}, \mathcal{W}_{(2)}\right)$, la cui rappresentazione tramite SDE è la seguente:

$$\begin{cases} dW_{(1),t} & = \mu_{(1)} dW_{(1),t} dt + \sigma_{(1)} dW_{(1),t} dZ_{(1),t} \\ dW_{(2),t} & = \mu_{(2)} dW_{(2),t} dt + \sigma_{(2)} dW_{(2),t} dZ_{(2),t} \end{cases} \tag{34}$$

- I due moti sono correlati per mezzo del coefficiente di correlazione lineare $\rho \in [-1, 1]$. In particolare, risulta che:

$$\mathbb{C}\text{OV}\left(dZ_{(1),t}\,,\, dZ_{(2),t}\right) = \rho dt$$

- Siano $X_{(1),t}$ e $X_{(2),t}$ due v.a. IID:

$$X_{(k),t} \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right), \quad k = 1, 2$$

Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici multivariati

- Indicando con C la matrice di correlazione:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

si ha che (vedasi decomposizione di Cholesky):

$$\begin{pmatrix} Z_{(1),t} \\ Z_{(2),t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(1),t} \\ X_{(2),t} \end{pmatrix} \tag{35}$$

da cui, infine, risulta che:

$$\begin{aligned} Z_{(1),t} &= X_{(1),t} \\ Z_{(2),t} &= \rho X_{(1),t} + \sqrt{1-\rho^2} X_{(2),t} \end{aligned} \tag{36}$$

Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici multivariati

Simulazione moto browniano geometrico bivariato

- Partizionare l'intervallo $[0, n]$ in una successione di istanti $\{t_0, \ldots, t_n\}$
- Fissare i parametri $\left(W_{(k),t_0}, \mu_{(k)}, \sigma_{(k)}, \rho, m\right)$, $k = 1, 2$
- Per ogni tempo t_i, $i = 1, \ldots, n-1$, e per $j = 1, \ldots, m$:
  (a) Generare due sequenze di numeri pseudo-casuali: $\{u_{(k),j}\}$, $u_{(k),j} \in [0, 1]$
  (b) Determinare $\{x_{(k),j} = \Phi^{-1,(k)}(u_{(k),j})\} \in \mathbb{R}$, con $\Phi^{(k)}$ f.d.r. di $\mathcal{N}(0, 1)$
  (c) Posto $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$, determinare le traiettorie:

$$\begin{cases} \hat{W}^{(1),j}_{t_{i+1}} = \hat{W}^{(1),j}_{t_i} e^{\left(\mu_{(1)} - \frac{\sigma^2_{(1)}}{2}\right)\Delta t_i + \sigma_{(1)}\sqrt{\Delta t_i}\, x^{(1),j}_{i+1}} \\ \hat{W}^{(2),j}_{t_{i+1}} = \hat{W}^{(2),j}_{t_i} e^{\left(\mu_{(2)} - \frac{\sigma^2_{(2)}}{2}\right)\Delta t_i + \sigma_{(2)}\sqrt{\Delta t_i}\left(\rho x^{(1),j}_{i+1} + \sqrt{1-\rho^2}\, x^{(2),j}_{i+1}\right)} \end{cases}$$

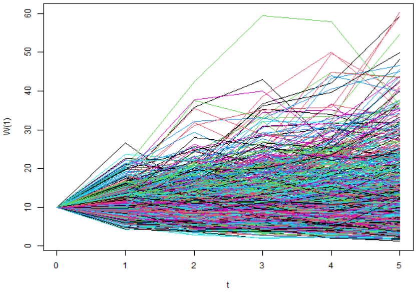
Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici bivariati

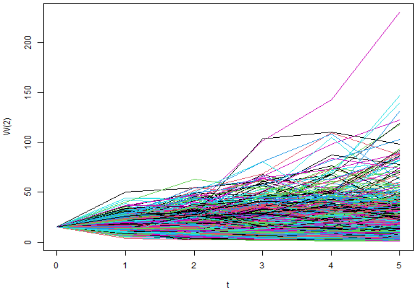
Simulazione moto browniano geometrico bivariato in R

```
S01 = 10 ; S02 = 15 ; mu1 = 0.05 ; mu2 = 0.04 ; sigma1 = 0.3
sigma2 = 0.4 ; endT = 5 ; deltaT = 1
time_seq = seq(0,endT,deltaT) ; m = 10^3
muT1 = (mu1 - 0.5*sigma1^2)*deltaT ; muT2 = (mu2 - 0.5*sigma2^2)*deltaT
siT1 = sigma1 * sqrt(deltaT) ; siT2 = sigma2 * sqrt(deltaT)
rho = 0.4
St1 = matrix(NA, ncol = length(time_seq), nrow = m) ; St1[,1] = rep(S01,m)
St2 = matrix(NA, ncol = length(time_seq), nrow = m) ; St2[,1] = rep(S02,m)
set.seed(10042013)
for (i in (1:(length(time_seq)-1))) {
St1[,i+1] = St1[,i]*exp(muT1+siT1*rnorm(m))
St2[,i+1] = St2[,i]*exp(muT2+siT2*(rho*rnorm(m)+sqrt(1-rho^2)*rnorm(m)))}
```

Il metodo Monte Carlo: simulazione dei processi stocastici multivariati

Figure: Grafico a sx: traiettorie simulate del primo moto browniano geometrico. Grafico a dx: traiettorie simulate del secondo moto browniano geometrico.





Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

Modello stocastico (semplificato) per la valutazione analisi di un portafoglio dato da una generazione di ass.ni miste rivalutabili.

- Durata m anni, età d'ingresso x
- Premio annuo costante, P, pagato per m anni
- Capitale ass.to, C, sia caso morte che caso vita
- Base Tecnica I ordine, (i, q_x) per premio puro e riserva matematica
- Ipotesi di spesa di I ordine, $EX = EX^{(A)} + EX^{(P)} + EX^{(G)}$, dove:

$$EX^{(A)} = \alpha P^{[T]}, \quad EX^{(P)} = \beta P^{[T]}, \quad EX^{(G)} = \gamma C \tag{37}$$

- Premio di tariffa:

$$P^{[T]} = C \frac{A_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} + \frac{\alpha P^{[T]}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \beta P^{[T]} + \gamma C \implies P^{[T]} = \frac{C\left(\frac{A_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} + \gamma\right)}{1 - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \beta} \tag{38}$$

Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

Meccanismo di rivalutazione:

- Tassi di adeguamento per benefici, premi e riserve: $j_m^{[B]}$, $j_m^{[P]}$, $j_m^{[V]}$
- Rivalutazione dei benefici finanziata con partecipazione agli utili dell'assicuratore:
  (a) $j_t^{[P]} = 0$
  (b) Data η l'aliquota di retrocessione e g_t il rendimento della gestione separata:

$$j_t^{[V]} = \max\left\{\frac{\eta g_t - i}{1+i}, 0\right\} \tag{39}$$

- Riserva matematica pura, pre e post rivalutazione:

$$V_{t^-} = C_t A_{x+t:\overline{m-t}|} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, \quad V_t = V_{t^-}\left(1 + j_t^{[V]}\right) \tag{40}$$

- Tasso di adeguamento dei benefici:

$$j_t^{[B]} = \frac{j_t^{[V]} V_{t^-}}{V_{t^-} + P\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} \tag{41}$$

Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

- Rivalutazione delle prestazioni con garanzia cliquet
- Rivalutazione dei benefici al tasso $j_t^{[B]}$, tale che:
  (a) *Beneficio caso morte*

$$C_t = \begin{cases} C & t = 1 \\ C \prod_{h=1}^{t-1} \left(1 + j_h^{[B]}\right) = C_{t-1}\left(1 + j_{t-1}^{[B]}\right) & t = 2, \dots, m \end{cases} \tag{42}$$

  (b) *Beneficio caso vita*:

$$C_m^{'} = C_m \left(1 + j_m^{[B]}\right) = C_m \left(1 + j_m^{[V]}\right) \tag{43}$$

- Facoltà per l'assicurato di abbandonare il contratto.
  In tal caso, sia $R_t = \psi_t V_t$ il valore di riscatto al tempo t, con $\psi_t \in (0,1)$ la penalità di riscatto al tempo t.

Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

- A livello di portafoglio si ha:
  - N_t, numero aleatorio di contratti in vita al tempo t degli N_0 iniziali
  - D_t, numero aleatorio di decessi nell'anno $(t-1, t)$
  - A_t, numero aleatorio di storni/riscatti nell'anno $(t-1, t)$
- Risultato d'interesse: Net Asset Value (NAV) del portafoglio

$$NAV_t = F_t^{[P]} - V_t^{[P]} \tag{44}$$

con $F_t^{[P]}$ il fondo di portafoglio e $V_t^{[P]} = V_t N_t$ la riserva di portafoglio.

- Allocazione iniziale di capitale

$$F_0^{[P]} = M_0$$

- Assenza di movimenti ulteriori di capitale $\forall t > 0$, i.e. assenza di ulteriori allocazioni o prelevamenti

Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

- Evoluzione del fondo di portafoglio:

$$
\begin{aligned}
F_t^{[P]} &= \left(F_{t-1}^{[P]} + P^{[T]} N_t - EX_t N_t\right)(1+g_t) - C_t D_t - R_t A_t \quad t = 1, \ldots, m-1 \\
F_m^{[P]} &= \left(F_{m-1}^{[P]} + P^{[T]} N_{m-1} - EX_{m-1} N_{m-1}\right)(1+g_m) - C_m D_m - C_m^{'} N_m \quad t = m
\end{aligned}
\tag{45}
$$

- Rischi impattanti sul NAV:
  (a) Rischio finanziario dato dal rendimento, g
  (b) Rischio di mortalità dato dal numero di decessi, D
  (c) Rischio di abbandono dato dal numero di abbandoni, A

- Step della valutazione stocastica:
  (i) Modelli stocastici per le tre fonti di rischio
  (ii) Valutazione dell'impatto dei rischi sul NAV:
    (ii.1) Approccio stocastico $\Rightarrow$ permette di cogliere i soli scarti accidentali (componente rischio di processo)
    (ii.2) Approccio stocastico doppio $\Rightarrow$ permette di cogliere anche gli scarti sistematici (componente rischio di incertezza)

Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

- Ipotesi: g, D, A sono rischi indipendenti
- Modello stocastico per il rendimento della gestione separata:

$$g_t = \frac{I_{t+1}}{I_t} - 1 \tag{46}$$

con I_t valore degli attivi della gestione separata, per il quale si assume la seguente dinamica:

$$dI(t) = \mu I_t dt + \sigma I_t dZ_t^{(I)} \tag{47}$$

- Utilizzando lo schema di Eulero, sullo scadenzario $t = 1, \ldots, m$ si ha:

$$\hat{I}_t = \hat{I}_{t-1} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma z_t}, \quad z_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{48}$$

Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

- Modello stocastico per il numero aleatorio di decessi.

  Sia $T_x^{(n)}$ la durata aleatoria di vita dell'n-esimo assicurato tra gli N_0 iniziali e sia

$$\mathbb{1}_t^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } T_x^{(n)} \leq t \\ 0 & \text{se } T_x^{(n)} > t \end{cases} \tag{49}$$

- Si definisce il numero aleatorio di soggetti in vita ad età $x + t$:

$$D_t = \sum_{n=1}^{N_0} \mathbb{1}_t^{(n)} \tag{50}$$

  da cui risulta che:

$$D_t \sim \text{Bin}\left(N_0, {}_{0/t}q_x\right) \tag{51}$$

- Assunzione: le vite residue degli assicurati sono indipendenti

Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

- Modello stocastico per il numero aleatorio di abbandoni.
  Sia $\tau^{(n)}$ la durata aleatoria di vita dell'n-esimo contratto per la causa di abbandono tra gli N_0 iniziali e sia

$$\mathbb{1}_t^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau^{(n)} \leq t \\ 0 & \text{se } \tau^{(n)} > t \end{cases} \tag{52}$$

- Si definisce il numero aleatorio di contratti in vita rispetto alla causa di abbandono al tempo t:

$$A_t = \sum_{n=1}^{N_0} \mathbb{1}_t^{(n)} \tag{53}$$

  da cui risulta che:

$$A_t \sim \mathrm{Bin}\left(N_0, \omega_t\right) \tag{54}$$

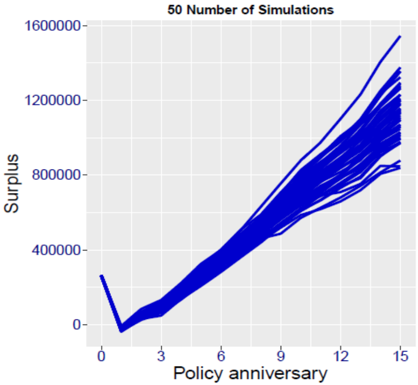
- Assunzione: le vite residue dei contratti sono indipendenti

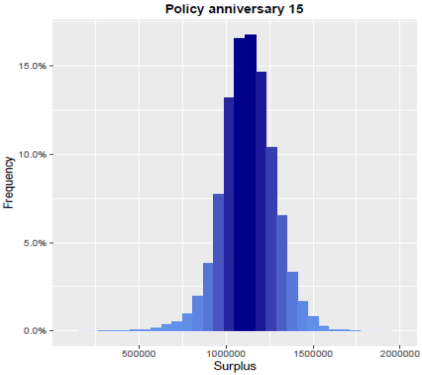
Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

- Per simulare i modelli stocastici considerati, è possibile adottare due approcci:
  - *Simulazione congiunta* di tutte le variabili in input, quali g, D, A per ottenere la corrispondente distribuzione della variabile in output, i.e. $F^{[P]}$, NAV
  - *Simulazioni marginali*, ovvero simulare separatamente ciascuna variabile in input $\Rightarrow$ valutazione dell'impatto sul risultato di una fonte di rischio alla volta
  - In quest'ultimo caso, le variabili in input non simulate sono trattate in modo deterministico, ovvero per esse viene scelta a priori uno scenario deterministico (ad esempio lo scenario centrale (media)).

Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

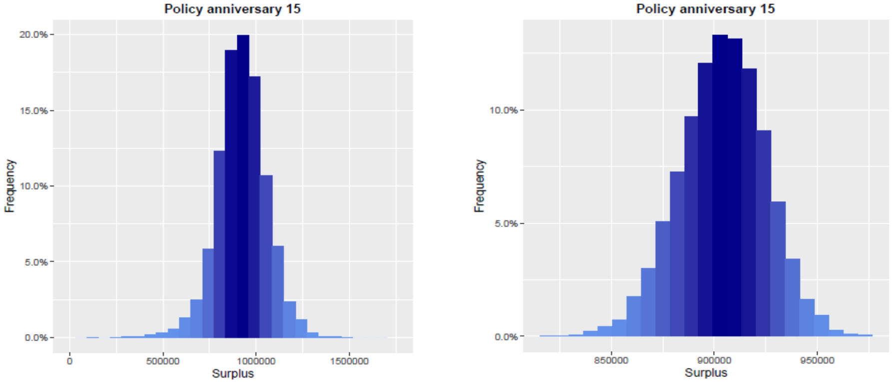
Figure: Esempio con simulazione congiunta. Grafico a sx: traiettorie simulate del NAV_t. Grafico a dx: distribuzione del NAV_{15}.





Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

Figure: Esempio con simulazione marginale. Grafico a sx: distribuzione del NAV_{15} considerando solo g stocastico. Grafico a dx: distribuzione del NAV_{15} considerando solo D stocastico.



Valutazione con approccio stocastico: scarti accidentali

- NOTA: il modello presentato può esser generalizzato. Ad esempio, potremmo considerare gli attivi della gestione separata come un portafoglio composto da un mix di strumenti finanziari.
  Ad esempio:

$$g_t = \frac{I_{t+1}}{I_t} - 1, \quad I_t = \alpha_1 R_t + \alpha_2 B_t + \alpha_3 S_t, \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1 \tag{55}$$

dove:

$$\begin{cases} dR_t = \delta dt, & \text{Dinamica indice monetario} \\ dB_t = \mu_{(B)} B_t dt + \sigma_{(B)} B_t dZ_t^{(B)}, & \text{Dinamica indice obblig.} \\ dS_t = \mu_{(S)} S_t dt + \sigma_{(S)} S_t dZ_t^{(S)}, & \text{Dinamica indice azionario} \end{cases} \tag{56}$$

con $\mathbb{C}\mathrm{OV}\left(dZ_t^{(B)}, dZ_t^{(S)}\right) = \rho dt$, $\mu_{(B)} < \mu_{(S)}$ e $\sigma_{(B)} < \sigma_{(S)}$.

Valutazione con approccio stocastico doppio: scarti accidentali e sistematici

- Il modello stocastico considerato non tiene conto dell'aleatorietà relativa alle distribuzioni di probabilità delle variabili in input, g, D, A
- Ciò significa che consideriamo solo il rischio di processo, i.e. scarti accidentali, sulle variabili di output, $F^{[P]}$, NAV
- Per tener conto del rischio di incertezza che grava sulle variabili di output, i.e. gli scarti sistematici, occorre:
  (a) Stabilire uno spazio degli scenari, Θ. Ad esempio:

$$\Theta = \{ \underbrace{\Theta_1}_{\text{Best Scenario}}, \underbrace{\Theta_2}_{\text{Central Scenario}}, \underbrace{\Theta_3}_{\text{Worst Scenario}} \} \tag{57}$$

  (b) Definire una distribuzione di probabilità sugli scenari, F_Θ
  (c) Condizionare le variabili di input a Θ, e le loro distribuzioni a F_Θ

Valutazione con approccio stocastico doppio: scarti accidentali e sistematici

- Consideriamo tre scenari di mortalità in merito al modello binomiale precedentemente esposto:

$$\begin{cases} \Theta_1 = \alpha_1\, {}_{0/t}q_x & \sim p_1 \text{ Best Scenario} \\ \Theta_2 = \alpha_2\, {}_{0/t}q_x & \sim p_2 \text{ Central Scenario} \\ \Theta_3 = \alpha_3\, {}_{0/t}q_x & \sim p_3 \text{ Worst Scenario} \end{cases} \tag{58}$$

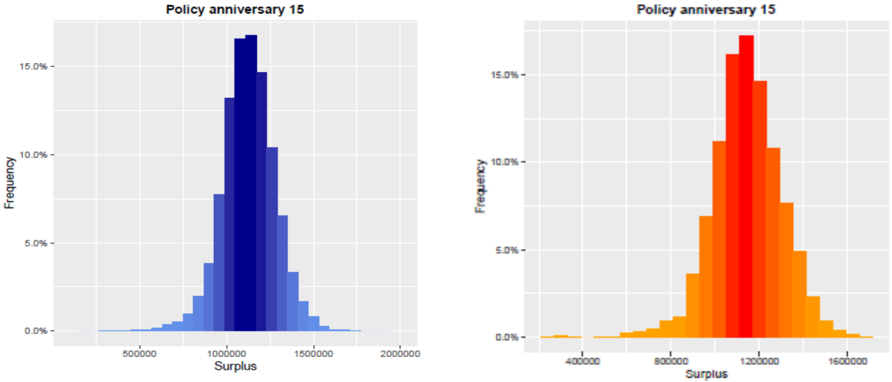
  con $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ (mortalità crescente)
- Il numero aleatorio di decessi è, ora, condizionato allo scenario:

$$D_t | \Theta_i \sim \text{Bin}\left(N_0, \Theta_i\right), \; i = 1, 2, 3 \tag{59}$$

- Infine, le variabili di output avranno una distribuzione di probabilità che è condizionata ai possibili scenari sui rischi

Valutazione con approccio stocastico doppio: scarti accidentali e sistematici

Figure: Esempio con scarti accidentali e sistematici. Grafico a sx: distribuzione del NAV_{15} solo scarti accidentali. Grafico a dx: distribuzione del NAV_{15} con scarti accidentali e sistematici .



Impatto delle variabili decisionali sui risultati

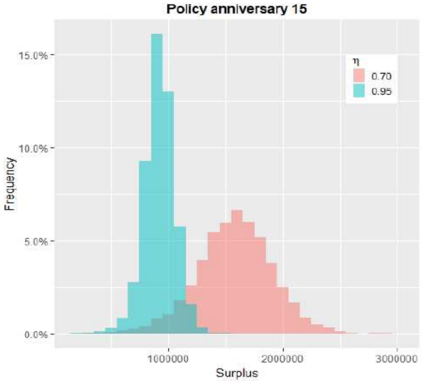
- La distribuzione del *NAV* risente delle ipotesi tecniche (di I ordine) stabilite all'inizio delle valutazione
- Esempio di variabili decisionali significative nei contratti rivalutabili:
  - Tasso tecnico
  - Tavola di mortalità
  - Ipotesi si spesa
  - Aliquota di retrocessione
  - Modello di partecipazione agli utili (meccanismo di rivalutazione)
  - Penalità di riscatto
- Per testare l'impatto dei diversi valori assegnati alle variabili decisionali è possibile ricorrere ad analisi di sensitività

Impatto delle variabili decisionali sui risultati

Impatto di η

Ipotizziamo di variare l'aliquota di retrocessione da η a $\eta^{'}$, con $\eta^{'} > \eta$. Nella seguente figura è esposto l'impatto sulla distribuzione a scadenza del *NAV*.

Figure: Variazione della distribuzione del NAV_{15} ponendo $\eta^{'} = 0.95 > \eta = 0.7$.



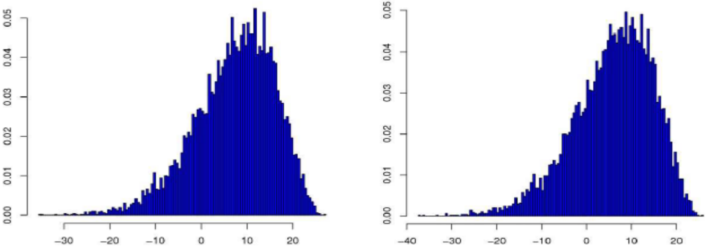
Impatto delle variabili decisionali sui risultati

Impatto del modello di partecipazione agli utili η

- Modello di consolidamento (garanzia cliquet), senza e con minimo garantito:

$$j_t^{[V]} = \max\left\{\frac{\eta g_t - i}{1+i}, 0\right\}, \quad j_t^{[V]} = \max\left\{\frac{\eta g_t - i}{1+i}, r_{min}\right\}$$

Figure: Grafico a sx: distribuzione del NAV_{15} no minimo garantito. Grafico a dx: con minimo garantito.



Agenda

L'Enterprise Risk Management

Identificazione dei rischi

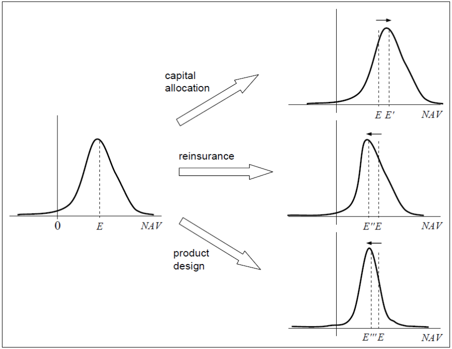
Il Quantitative Risk Management

- Modelli stocastici nelle ass.ni vita
- Modello stocastico per assicurazioni rivalutabili

Azioni di Risk Management e solvibilità

ERM, Fase (4) e (5): azioni di Risk Management

- Tipiche azioni di RM nelle ass.ni vita riguardano:
  - (a) L'allocazione di capitale
  - (b) Il trasferimento del rischio
  - (c) Il design di prodotto



Allocazione di capitale e solvibilità

- L'allocazione di capitale permette di aumentare, in valore atteso, il *NAV* di portafoglio
- Tuttavia, l'obiettivo principale è quello di allocare un ammontare di capitale tale che sia ridotta la probabilità dell'evento di rovina
- Il calcolo della quantità di capitale da allocare si fonda sul c.d. risk-based capital approach, per il quale, indicando con K il capitale da allocare, si ha che:

$$K = f\,(\text{profilo di rischio}) \tag{60}$$

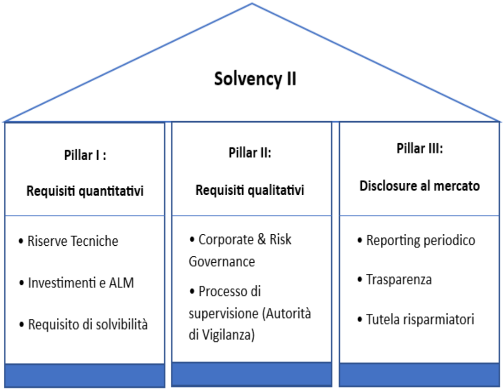
  e tale che

$$\mathbb{P}\,(NAV + K < 0) \leq \alpha \tag{61}$$

  con $\alpha \in (0,1)$ piccolo a piacere.
- Come stabilire il profilo di rischio, f, α, etc.?

Solvibilità e Direttiva Solvency II

- La Direttiva 2009/138/CE, nota come Solvency II (SII), sancisce un impianto normativo che disciplina la solvibilità delle imprese di (ri)assicurazione europee.
- SII pone un set di principi e regole riassumibile nella logica strutturale c.d. a tre pilastri



Solvibilità e Direttiva Solvency II

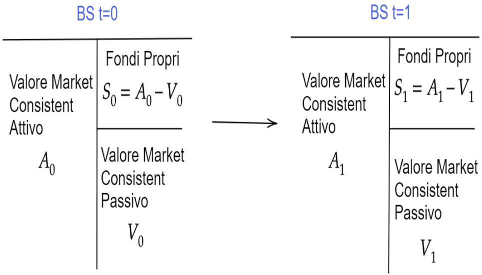
- La Direttiva SII si fonda su un approccio risk-based, ossia:
  - Ai fini del Pillar I, valutazioni quantitative tramite modelli finanziari e attuariali stocastici
  - Ai fini del Pillar II, gestione dei rischi tramite un'adeguata governance interna e supervisione esterna
- Per le valutazioni di cui al Pillar I, al risk-based approach si affiancano due metodi di valutazione fondamentali:
  - Il total balance sheet approach, per il quale la solvibilità dell'assicuratore è definita in un'ottica patrimoniale, ossia guardando sia agli attivi che ai passivi e, dunque, al *NAV* dell'intera impresa
  - Il market consistent approach, per il quale gli attivi e i passivi del balance sheet hanno un valore espresso dalle valutazioni del mercato

Solvency II: Il total balance sheet approach

- Nel framework SII, l'approccio total balance sheet viene impiegato su un orizzonte di tempo annuale, il c.d. one-year approach
- Sia $t = 0$ l'istante di valutazione, in cui sono noti:
  - il valore di mercato degli attivi, A_0
  - il valore di mercato dei passivi, V_0
  - il valore del NAV, i.e. $NAV_0 = A_0 - V_0$
- In $t = 1$, tali valori sono aleatori a causa dei rischi che agiscono su attivi e passivi nell'arco di tempo $(0, 1]$
- Dunque, a fini di solvibilità, l'obiettivo che si persegue è duplice:
  - Costruire la distribuzione di probabilità, F, del $NAV_1 = A_1 - V_1$
  - Determinare, dalla distribuzione F, l'ammontare di capitale K_1 da allocare per far fronte a dinamiche avverse dei rischi in $(0, 1]$

Solvency II: Il total balance sheet approach

Figure: In $t = 0$: $S_0 := NAV_0$ deterministico; in $t = 1$: $S_1 := NAV_1$ aleatorio.



- La quantità di capitale K_1, allocata in $t = 0$, tale che

$$\mathbb{P}(NAV_1 + K_1 < 0) \leq \alpha \in (0, 1) \tag{62}$$

prende il nome di Solvency Capital Requirement (SCR).

Solvency II: Valutazione market consistent

Art. 10 Direttiva SII - estratto

...

2. As the default valuation method (re)insurance undertakings shall value assets and liabilities using quoted market prices in active markets for the same assets or liabilities.

3. Where the use of quoted market prices in active markets for the same assets or liabilities is not possible, ... shall value assets and liabilities using quoted market prices in active markets for similar assets and liabilities with adjustments to reflect differences.

...

6. When using alternative valuation methods, ... shall rely as little as possible on undertaking-specific inputs and make maximum use of relevant market inputs including...

a) quoted prices for identical or similar assets or liabilities in markets that are not active;

b) ... interest rates and yield curves observable at commonly quoted intervals, implied volatilities and credit spreads

Solvency II: Valutazione market consistent

Art. 10 Direttiva SII - significato

- per i contratti scambiati nel mercato, tipicamente assets, il loro valore market consistent è il prezzo osservato: si parla in tal senso di valutazione marked-to-market
- per i contratti non scambiati nel mercato, come i contratti assicurativi, il loro valore market consistent è ottenuto per mezzo di un modello di valutazione: in tal senso si parla di valutazione marked-to-model

NOTA: Le passività assicurative, oltre a non essere scambiate in un mercato attivo e con quotazioni osservabili, possono presentare payoff di vario tipo. Ad esempio:

- Ass.ne Unit linked: si osserva il valore di mercato del fondo a cui sono agganciate le prestazioni dell'ass.re;
- Ass.ne di rendita vitaliza: non è possibile osservare alcun valore di mercato

Solvency II: Valutazione market consistent

Dunque, nell'ambito delle valutazioni marked-to-model, le passività assicurative, sono trattate in due modi:

1) Rischio Headgeable: payoff della passività assicurativa replicabile tramite strumento finanziario scambiato nel mercato ⇒ Valore di mercato della passività pari a quello dello strumento replicante;
2) Rischio Non-Headgeable: payoff della passività assicurativa non trova replicazione nel mercato ⇒ Valore di mercato della passività determinato con il criterio del current exit value (CEV)
    - Il CEV rappresenta l'ammontare che l'assicuratore si aspetta di pagare ad una parte terza per trasferire tutti i diritti e gli obblighi del contratto in essere
    - Come determinare il CEV di una passività assicurativa? ⇒ Art. 77 Direttiva SII

Solvency II: Valutazione market consistent

Art. 77 Direttiva SII - estratto

1. The value of technical provisions shall be equal to the sum of a best estimate and a risk margin...

2. The best estimate shall correspond to the probability-weighted average of future cash-flows, taking account of the time value of money (expected present value of future cash-flows), using the relevant risk-free interest rate term structure.

...

5. ... the risk margin shall be calculated by determining the cost of providing an amount of eligible own funds equal to the Solvency Capital Requirement ...

Solvency II: Valutazione market consistent

Pertanto, per i rischi non-headgeagle, il valore delle riserve tecniche in SII, i.e. delle Technical Provisions (TP), è:

$$TP = \text{Best Estimate of Liability} + \text{Risk Margin} \tag{63}$$

dove:

- la componente di Best Estimate of Liability, BEL, è pari al valore attuale atteso dei flussi futuri di cassa generati dal contratto assicurativo. In termini generali:

$$BEL_t = \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq t} \left(CF_k^{out} - CF_k^{in}\right)(1 + i(t,k))^{-(k-t)}\right)$$

  in cui $i(t, t+k)$ è il tasso d'interesse per un'attivià priva di rischio (*risk-free spot rate*). Nella definizione dei cash flows bisogna tener conto di: spese, riscatti, storni, garanzie finanziarie, flussi da/verso riassicuratori, etc.

Solvency II: Valutazione market consistent

- Risk Margin, RM, è pari al valore market-consistent del costo da sostenere per la costituzione dei fondi propri necessari alla copertura del SCR per tutta la durata delle polizze in essere:

$$RM_t = (\rho - r) \sum_{k \geq t} SCR_k \, (1 + i(t,k))^{-(k-t)} \tag{64}$$

  dove $(\rho - r)$ rappresenta l'extra-rendimento richiesto dagli azionisti rispetto al rendimento privo di rischio r.

- Problema di circolarità: Il RM è determinato in funzione del SCR, il quale è ottenuto dalla distribuzione del NAV. Quest'ultimo è definito come differenza tra attivi e passivi, i quali contengono il RM. In sostanza, si ha una situazione del tipo:

$$SCR = f(SCR) \tag{65}$$

- Soluzione: formula semplificata per calcolo RM, oppure calcolo del NAV usando solo la BEL.

Solvency II: Valutazione market consistent

- Un punto chiave nella valutazione market consistent della BEL riguarda la caratterizzazione probabilistica dei cash flows in eq.(70)
- In particolare, la Direttiva SII chiede esplicitamente che si tenga in considerazione:
  - di tutte le fonti di rischio che impattano sui cash flows
  - di ipotesi realistiche per la parametrizzazione delle grandezze aleatorie
- Allo stesso tempo, la Direttiva SII richiama concetti chiave per determinare il valore market consistent per i rischi headgeable, quali : "risk-free interest rate", "no arbitrage opportunity", "risk-neutral probabilities"
- In sostanza, la valutazione market consistent richiede, almeno in parte, l'adozione del criterio di neutralità rispetto al rischio
  - Cosa è una valutazione neutrale rispetto al rischio?
  - Qual è il suo ruolo per i rischi non-headgeable?

Valutazione neutrale al rischio: la misura di probabilità equivalente

- Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$
- Sia ξ una v.a. tale che $\xi > 0$ q.c. e $\mathbb{E}(\xi) = 1$
- É possibile definire una misura di probabilità $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ (e si indica $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$) come di seguito:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \xi(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{66}$$

  con:
  - $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ e $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$
  - $\mathbb{Q}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0$
- Inoltre si dimostra che, data una v.a. X qualsiasi, risulta:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi X), \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{X}{\xi}\right) \tag{67}$$

Valutazione neutrale al rischio: Misura di probabilità equivalente

Esempio

- Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e sia $\xi = \exp\left(\lambda X - \frac{\lambda^2}{2}\right)$
- Per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, la misura di probabilità equivalente è:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A) &= \int_A \xi(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_A \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{2}\right) dx\end{aligned} \tag{68}$$

ovvero, sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ risulta che:

$$X \sim \mathcal{N}(\lambda, 1)$$

Valutazione neutrale al rischio: Misura di probabilità equivalente

Esempio - Misura equivalente e applicazioni finanziarie

- Sia dato il moto browniano geometrico (MBG) sotto la misura $\mathbb{P}$:

$$dW_t = \mu W_t dt + \sigma W_t dZ_t^{\mathbb{P}} \tag{69}$$

- Tale processo può essere utilizzato per descrivere la dinamica nel tempo di varie grandezze finanziarie aleatorie
- Esempio: Rappresentiamo il prezzo di un'azione nel tempo con il MBG
- Qual è la dinamica del prezzo sotto una misura di probabilità $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$?
- A tal fine, si consideri il tasso di rendimento risk-free, r, e si definisca il premio di mercato per il rischio la quantità:

$$\eta = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{70}$$

con μ il rendimento atteso dell'azione e σ l'associata volatilità

Valutazione neutrale al rischio: Misura di probabilità equivalente

Esempio - Misura equivalente e applicazioni finanziarie

- É possibile definire il moto browniano standard, Z_t, sotto la misura $\mathbb{Q}$ come di seguito:

$$Z_t^{\mathbb{Q}} := Z_t^{\mathbb{P}} + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t, \implies dZ_t^{\mathbb{Q}} = dZ_t^{\mathbb{P}} + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt, \qquad (71)$$

- Sostituendo la (71) nella (69) si ha:

$$dW_t = rW_t dt + \sigma W_t dZ_t^{\mathbb{Q}} \qquad (72)$$

  con $Z_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}\left(\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t, t\right)$

- Si noti nella (72) che il drift del MBG sotto $\mathbb{Q}$ è il tasso r: il rendimento atteso è pari al tasso privo di rischio

Valutazione neutrale al rischio: Misura di probabilità equivalente

Esempio - Misura equivalente e applicazioni finanziarie

In sintesi, osserviamo che:

- Nel passaggio da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ viene "incorporato il rischio".
  Il rendimento richiesto su un'attività rischiosa è pari a quello di un'attività priva di rischio: in tal senso si parla di valutazione risk-neutral
- Dal punto di vista economico, la valutazione risk-neutral implica che ciascun investitore nel mercato formula la medesima aspettativa circa il prezzo dell'azione: in tal senso, si deve avere un' unica misura $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$.
  La misura $\mathbb{Q}$ è allora detta risk-neutral ed è equivalente alla misura fisica o real-world $\mathbb{P}$.
- La valutazione risk-neutral comporta che il prezzo (di mercato) di un asset deve essere unico, i.e. assenza di arbitraggi privi di rischio.

La valutazione market consistent: una formalizzazione

- Si consideri una capitale differito rivalutabile che prevede il pagamento di un capitale C_T alla scadenza T
- Sia $0 \leq t < T$ l'istante di valutazione, in cui la testa ass.ta ha età x, e sia $\tau = T - t$ la durata residua (naturale) del contratto
- Indicato con $\rho_{t,T}$ il fattore rivalutazione della prestazione a scadenza, la prestazione aleatoria dell'assicuratore in T è:

$$Y_T = \begin{cases} C_t \rho_{t,T} & \text{se } T_x > \tau \\ 0 & \text{se } T_x \leq \tau \end{cases} = C_t \rho_{t,T} \mathbb{1}_{\{T_x > \tau\}} \qquad (73)$$

- In ipotesi che non vi siano ulteriori fonti di rischio (riscatti, conversione in rendita, etc.), assumiamo l'indipendenza tra il rischio finanziario e il rischio demografico
- Obiettivo: Calcolare il valore market consistent della Techincal Provision in t, i.e. TP_t.

La valutazione market consistent: una formalizzazione

- Il valore atteso della prestazione aleatoria dell'ass.re è:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(C_t \rho_{t,T} \mathbb{1}_{\{T_x > \tau\}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ = C_t \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\rho_{t,T} \mid \mathcal{F}_t\right)}_{\textit{Componente Finanziaria}} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x > \tau\}} \mid \mathcal{F}_t\right)}_{\textit{Componente Demografica}} \tag{74}$$

- Per l'eq.(67) risulta che:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\rho_{t,T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\rho_{t,T}}{\xi_t} \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{75}$$

e considerando il money market account per definire ξ_t, ossia:

$$\xi_t = e^{\int_t^T r(u)du} \tag{76}$$

con $r(u)$ il risk-free spot rate. Risulta che:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\rho_{t,T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\rho_{t,T}}{\xi_t} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\rho_{t,T} e^{-\int_t^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{77}$$

La valutazione market consistent: una formalizzazione

- Pertanto, la componente finanziaria insita nel contratto assicurativo rappresenta un rischio headgeable, motivo per cui è valutata nell'ottica rischio neutrale

- In merito alla componente demografica si nota che sussiste la possibilità di replicazione nei mercati finanziari, trattandosi di rischio non-headgeable

- Una strada percorribile consiste nel definire una misura di probabilità distorta, $\mathbb{D} \sim \mathbb{P}$, tale che:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x>\tau\}} \,|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{D}}\left(\frac{\mathbb{1}_{\{T_x>\tau\}}}{\xi'_T} \,|\, \mathcal{F}_t\right) = {}_{\tau}p_x^{\mathbb{D}} \tag{78}$$

- La probabilità distorta ${}_{\tau}p_x^{\mathbb{D}}$ ricalca il significato delle probabilità di I ordine, ovvero con caricamento di sicurezza implicito

La valutazione market consistent: una formalizzazione

- Dunque, la probabilità distorta può essere definita come somma di una probabilità best-estimate, ovvero definita sotto la misura fisica $\mathbb{P}$, più un caricamento di sicurezza:

$$ {}_\tau p_x^{\mathbb{D}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x>\tau\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) + \lambda_t \tag{79}$$

- Riassumendo, il contratto in esame contiene sia una componente headgeable che una non-headgeable
- Il valore della TP_t è quindi somma di BEL_t e RM_t, ossia:

$$ TP_t = \underbrace{C_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\rho_{t,T} e^{-\int_t^T r(u)du} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x>\tau\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)}_{=BEL_t} + \underbrace{\Lambda_t}_{=RM_t} \tag{80}$$

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

Art. 101 Direttiva SII - estratto

...

3. The Solvency Capital Requirement shall be calibrated so as to ensure that all quantifiable risks... are taken into account. ... With respect to existing business, it shall cover only unexpected losses. It shall correspond to the Value-at-Risk of the basic own funds of an (re)insurance undertaking subject to a confidence level of 99.5% over a one-year period.

4. The Solvency Capital Requirement shall cover at least the following risks:

(a) non-life underwriting risk

(b) life underwrriting risk

(c) health underwriting risk

(d) market risk

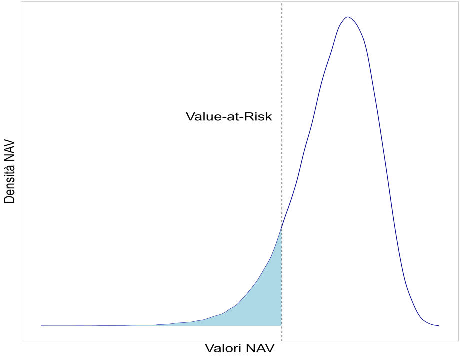
(e) credit risk

(f) operational risk

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

- Si desume che il SCR è una dotazione di fondi patrimoniali determinata con la logica del percentile
- Lo scopo è quello di identificare la misurazione quantitativa (Value-at-Risk) del Worst-Case Scenario rispetto alla totalità dei rischi assunti

Figure: Distribuzione del NAV_1 e suo $99,5$-quantile.



Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

Sul Value-at-Risk

- Dato un livello di confidenza $\alpha \in (0,1)$, il Value-at-Risk per il NAV_1 è definito come di seguito:

$$VaR_\alpha(NAV_1) = -\inf\{x : \mathbb{P}(NAV_1 \leq x) > \alpha\} \tag{81}$$

- Se prendessimo in considerazione la loss $L_1 := -NAV_1$, il Value-at-risk farebbe riferimento alla "coda destra" della distribuzione:

$$VaR_\alpha(L_1) = \inf\{x : \mathbb{P}(L_1 \leq x) > (1-\alpha)\} \tag{82}$$

- Se la f.d.r. del NAV_1 fosse continua e strettamente monotona, allora il Value-at-Risk può essere espresso come:

$$VaR_\alpha(NAV_1) = -F^{-1}_{NAV_1}(\alpha) \tag{83}$$

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

Sul Value-at-Risk

Il *VaR* presenta le seguenti proprietà:

- Monotonia. Date due v.a. X, Y, con $X \leq Y$ q.c., si ha:

$$VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$$

- Omogeneità positiva.

$$VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X), \forall \lambda \geq 0$$

- Invarianza per traslazione.

$$VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

- Sub-additività, solo per distribuzioni di probabilità ellittiche (Normale, t-Student,etc.).

$$VaR_\alpha(X + Y) \leq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$$

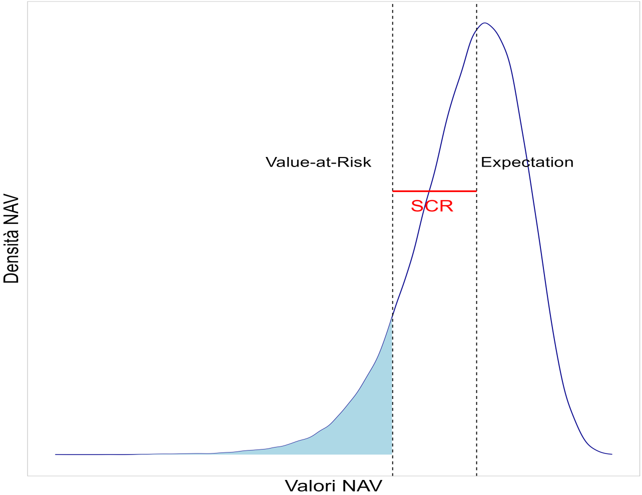
Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

- Per la determinazione del SCR, la Direttiva SII stabilisce, allo stesso tempo:
  - "The SCR it shall cover only unexpected losses"
  - "The SCR corresponds to the Value-at-Risk of the basic own funds subject to aconfidence level of 99.5% over a one-year period"
- Tuttavia, il $VaR_{0.995}$ non rappresenta l'unexpected loss, bensì la massima perdita su un arco di tempo annuale, e considerando il $99,5\%$ dei casi possibili
- Inoltre, parte delle possibili perdite sono già accantonate dall'ass.re in termini attesi (ad esempio le BEL)
- Pertanto, il SCR, definito sulla distribuzione del NAV_1 è la seguente quantità:

$$SCR = -VaR_{0.995}(NAV_1) - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(NAV_1\right) \tag{84}$$

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

Figure: SCR come unexpected loss rispetto a una misura quantile.



Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement

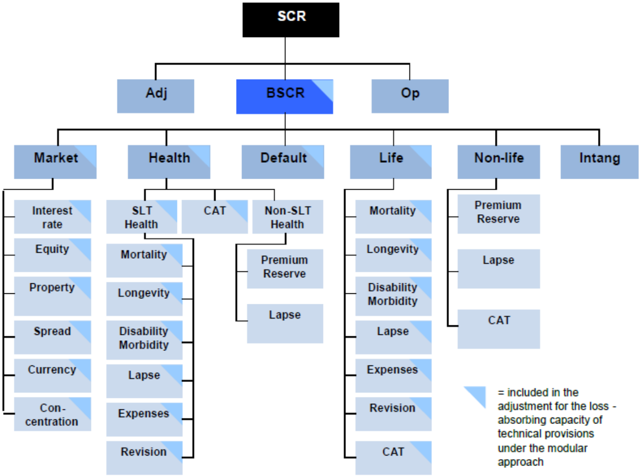
- Il calcolo del SCR ha un livello di complessità legato alla definizione della distribuzione del NAV_1
- Tanto più articolato è il business assicurativo considerato, tanto più complesso sarà ricavare la distribuzione del NAV_1 e, quindi, desumere il SCR
- Per tale motivo, la Direttiva SII prevede che vi siano due (più uno) livelli possibili di misurazione del SCR:
  1) Applicazione della c.d. Standard formula, quale modello di misurazione dei rischi definito dalla normativa stessa
  2) Uso di "Undertaking Specific Parameters", ma solo per il business Non-Life
  3) Uso di Modello interno, il quale può essere parziale o completo

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula standard

- Per quanto attiene alla formula standard essa è stata definita sulla scorta di due ipotesi modellistiche fondamentali (vedasi modello Delta-Normal di Garbade(1986))
  (1) I rischi considerati seguono una distribuzione normale multivariata o, più in generale, ellittica
  (2) Le perdite sono funzioni lineari dei rischi
- Poichè gli assicuratori sono esposti a molteplici rischi, di varia natura e complessità, la formula standard prevede un'articolazione in moduli o "silos" dei diversi rischi. Pertanto:
  - La formula standard definisci gli specifici rischi (moduli) a cui è esposto l'ass.re in base al proprio business;
  - il modo in cui calcolare il SCR per ciascun modulo di rischio
  - stabilisce la modalità di aggregazione dei diversi rischi per ottenere un unico SCR

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

Figure: Formula standard per il SCR: approccio modulare.



Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

La standard formula prevede, dunque, che:

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} + Adj \tag{85}$$

dove:

- $BSCR$ è il Basic Solvency Capital Requirement, definito come:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intang} \tag{86}$$

  dove
  - SCR_i è il requisito di capitale per l'i-esimo modulo di rischio
  - $\rho_{i,j}$ è il coefficiente di correlazione lineare tra il modulo di rischio i e il modulo di rischio j
  - SCR_{intag} quale requisito di capitale per il rischio di deprezzamento delle attività immateriali dell'ass.re: $SCR = 0,001 BSCR$ (imprese vita)

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

Figure: Matrice dei coefficienti di correlazione da normativa.

Modulo i/j	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-Life	0.25	0.50	0	0	1

- SCR_{Op} è il Solvency Capital Requirement relativo al rischio operativo ed è definito, in modo semplificato, proporzionalmente rispetto al valore delle BEL
- *Adj* è un componente additiva di aggiustamento del *BSCR* e deve essere valorizzata secondo particolari criteri descritti nella Direttiva

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

- Consideriamo lo specifico modulo di rischio relativo al business "Life"
- Esso si compone di 7 sotto-moduli di rischio, per ognuno dei quali è necessario calcolare l'associato SCR:

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{7} \rho_{i,j}^{Life} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} \tag{87}$$

Rischio (*risk-module*)	
1– mortalità	SCR_{mor}
2– longevità	SCR_{long}
3– invalidità/malattia	SCR_{dis}
4 – riscatto	SCR_{lapse}
5 – spese	$SCR_{expenses}$
6 – revisione	SCR_{rev}
7 – catastrofale	SCR_{cat}

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

Figure: Matrice dei coefficienti di correlazione per il modulo di rischio "Life" da normativa.

i \ j	Mortalità	Longevità	Invalidità	Spesa vita	Revisione	Estinzione anticipata	Catastrofe vita
Mortalità	1	-0,25	0,25	0,25	0	0	0,25
Longevità	-0,25	1	0	0,25	0,25	0,25	0
Invalidità	0,25	0	1	0,5	0	0	0,25
Spesa vita	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,5	0,25
Revisione	0	0,25	0	0,5	1	0	0
Estinzione anticipata	0	0,25	0	0,5	0	1	0,25
Catastrofe vita	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

- Il SCR relativo ai sotto-moduli di rischio è definito applicando uno shock istantaneo al rischio che si considera: si parla in tal senso "metodo dello scenario"

Solvency II: Calcolo del Solvency Capital Requirement - Formula Standard

Esempio: calcolo del SCR_{long}

- Per calcolare il SCR per il rischio di longevità, la formula standard suppone che vi sia una riduzione istantanea del 20% dei tassi di mortalità utilizzati per il calcolo delle BEL, da cui:

$$SCR_{long} = \max\left(BEL_{0^+} - BEL_0; 0\right) \tag{88}$$

  dove:

  - BEL_0 è il valore in $t = 0$ della BEL calcolata utilizzando dei tassi di mortalità secondo potesi best-estimate;
  - BEL_{0^+} è il valore in $t = 0$ della BEL calcolata utilizzando dei tassi di mortalità best-estimate ridotti del 20%;