Osservabili (variabili dinamiche)

In meccanica classica, se conosco lo stato del sistema $(\bar{p}, \bar{q})$ posso predire con certezza il risultato di una misura di un'osservabile $f(\bar{p}, \bar{q})$.

In meccanica quantistica, noto lo stato del sistema, si può predire solo la probabilità di misurare un certo valore per l'osservabile.

Data una VARIABILE DINAMICA (OSSERVABILE) essa deve essere descritta (in MQ) da un oggetto matematico che include sia i possibili risultati di una misura di tale osservabile (autovalori), sia gli stati corrispondenti ai singoli risultati (autostati) (cioè gli stati in cui ho prob. 1 di rimisurare il risultato corrispondente).

Stati $\longleftrightarrow$ vettori in $\mathcal{H}$

Osservabili $\longleftrightarrow$ OPERATORI in $\mathcal{H}$ (autoaggiunti)

Operatori X e P in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$\langle x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} x\, |\psi(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \cdot \big(\underbrace{x\,\psi(x)}_{(\hat{X}\psi)(x)}\big)\, dx$$

$$= (\psi, \hat{X}\psi) \qquad \hat{X} : \psi(x) \mapsto x\psi(x)$$

$$\langle P \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} p\, |\tilde{\psi}(p)|^2\, dp \qquad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dp\; p \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ipx'/\hbar}\, \psi(x')^* \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx'\; \psi(x')^*\, e^{ipx'/\hbar}\, \psi(x)\, \underbrace{i\hbar \frac{d}{dx} e^{-ipx/\hbar}}_{p e^{-ipx/\hbar}}$$

integrazione per parti

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dp\; \psi(x')^*\, e^{ipx'/\hbar} \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)\right) e^{-ipx/\hbar}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx'\; \psi(x')^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x'-x)/\hbar}}_{\delta(x-x')}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\; \psi(x)^* \Big(\underbrace{-i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)}_{\hat{P}\psi(x)} \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle p \rangle_\psi = (\psi, \hat{P}\psi) \qquad \hat{P} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Data un'osservabile A (op. autoagg. in $L^2(\mathbb{R})$),
il suo valor medio è

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, \hat{A}\psi)$$

$\hat{X}$ e $\hat{P}$ sono operatori autoaggiunti

Osservabile classica è una funz. di $\bar{p}$ e $\bar{q}$ $\quad p \leftrightarrow \bar{p}, \; x \leftrightarrow \bar{q}$
ms $f(x,p)$

Domanda: in meccanica quant. $f \to f(\hat{X}, \hat{P})$?

Sì, ma con attenzione.

↳ Es.
se l'osserv. è $f(x,p) = xp$, l'operatore
associato è $\hat{X}\hat{P}$ o $\hat{P}\hat{X}$?
(ambiguità nell'associare un operatore
a una variabile dinamica classica)

Il problema è che $\hat{X}$ e $\hat{P}$ NON commutano:

$$[\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi = \hat{X}\hat{P}\psi - \hat{P}\hat{X}\psi =$$

$$= \hat{X}\left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx}\right) - \hat{P}\left(x\psi(x)\right)$$

$$= -i\hbar\, x\psi'(x) + i\hbar \frac{d}{dx}\left(x\psi(x)\right) =$$

$$= -i\hbar\, x\psi' + i\hbar\psi + i\hbar\, x\psi' = i\hbar \cdot \psi$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1} \qquad (1 \text{ dim})$$

In 3d $\quad \psi(\bar{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3) \qquad \tilde{\psi}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x \, e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}/\hbar} \psi(\bar{x})$

Abbiamo tre operatori per le tre coordinate: $\bar{x} = (x, y, z) \leftrightarrow \hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$

$$\hat{\vec{X}} \psi(x) = \bar{x}\, \psi(\bar{x}) \qquad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\, \delta_{ij}\, \mathbb{1} \quad (*)$$

$$\hat{\vec{P}} \psi(x) = -i\hbar \bar{\nabla} \psi \qquad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 = [\hat{P}_i, \hat{P}_j]$$

$(*)$: Analogia con le Parentesi di Poisson $\quad (x_i \leftrightarrow q_i)$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{x_i, x_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$$

Passare da mecc. classica a MQ : $\bar{x}, \bar{p}$ sostituiti da operatori, P.P. sostituite da $\frac{1}{i\hbar}[\,,\,]$.

In meccanica classica

$$\delta x = \epsilon \{x, G\} \quad G: \text{generatore di trasf.}$$

Se ora uso $G = P$, ottengo

$$\delta x = \epsilon \{x, p\} = \epsilon \Rightarrow x' = x + \epsilon$$

$\Rightarrow p$ è il generatore delle TRASLAZIONI

In meccanica quantistica $\hat{P}$ è ancora il generatore di TRASLAZIONI infinitesime. Sotto traslazioni finite, lo stato $\psi(x)$ viene mandato in $\psi(x+\epsilon)$. Se $\epsilon \ll 1$:

$$\psi(x+\epsilon) \simeq \psi(x) + \epsilon \psi'(x) \Longrightarrow \delta\psi = \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{P} \psi$$

Facendo la stessa cosa con $\hat{M}_i$ (momento angolare), otteniamo che la variazione di ψ sotto rotazioni infinitesime attorno asse $\hat{x}_i$, è data da $\quad \delta\psi = \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{M}_i \psi$

Esempio di osservabili senza ambiguità:

1) Momento angolare

$$M_i = \sum_{kj} \epsilon_{ijk} \underbrace{x_j\, p_k}_{\text{in questi prodotti}} \longleftrightarrow \hat{M}_i = \sum_{kj} \epsilon_{ijk} \underbrace{\hat{X}_j\, \hat{P}_k}_{\text{commutano}}$$

$$j \neq k \Rightarrow [\hat{X}_i, \hat{P}_k] = 0$$

2) Sistemi meccanici con V dip. da $\bar{x}$, mes. potenziale

$$H = \frac{\bar{P}^2}{2m} + V(\bar{x}) \longleftrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{\bar{P}}^2}{2m} + V(\hat{\bar{X}})$$

$$\hat{\bar{P}}^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2$$

Equazione che governa la dinamica in MQ.

- Ritorniamo per un momento alla meccanica classica:
  - Lo stato di un sistema è dato da $(\bar{p}, \bar{q})$.
  - L'evoluzione temporale di uno stato è data dalle funzioni $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$ [Cioè mappa $\mathbb{R}_t \to \{\text{STATI}\}$]
  - La dinamica deve dire, dato stato a t_0, qual è lo stato a $t > t_0$. Per far questo ci serve conoscere il GENERATORE DI TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè l' HAMILTONIANA.

    Allora $\delta \bar{x} = \{\bar{x}, H\} \delta t \to \dot{\bar{x}} = \{\bar{x}, H\}$

    cioè EQUAZIONI DI HAMILTON.

- Ora passiamo alla MECCANICA QUANTISTICA:
  - Lo stato di un sistema è dato da $\psi(\bar{x})$.
  - L'evoluzione temporale di uno stato è data dalla funzione $\psi(\bar{x}, t)$ [Cioè mappa $\mathbb{R}_t \to \{\text{STATI}\}$]
  - La dinamica deve dire, dato stato a t_0, qual è lo stato a $t > t_0$. Per far questo ci serve conoscere il GENERATORE DI TRASLAZIONI TEMPORALI. Se assumiamo che tale generatore sia ancora

l' HAMILTONIANA, abbiamo (nel nuovo formalismo della MQ)

$$\delta\psi = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\psi\,\delta t \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\bar{x},t) = \hat{H}\psi(\bar{x},t)$$

cioè l' **EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER** !

Per una particella soggetta a un potenziale $V(x)$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2 + V(x)$$

quello applicato
sulla funz. d'onda

→ forma trovata precedentemente per l'eq. di Schrödinger.