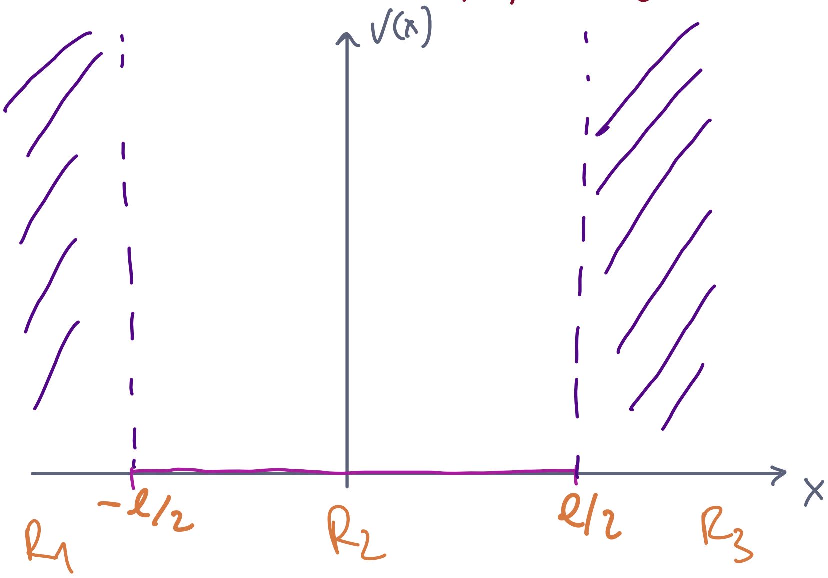
BUCA RETTANGOLARE INFINITA



Il potenziale ha una DISCONTINUITÀ INFINITA in $x = -\ell/2$ e $x = \ell/2$

$\downarrow$

$\psi_E(x)$ è continua in questi due punti, ma non necessariamente derivabile

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E(x)$$

R_1) Qui l'eq. diventa $\psi_E'' = \Omega^2 \psi_E(x)$ con $\Omega \to \infty$ (Ω cost.)

$\Rightarrow \psi_E(x) = A e^{\Omega x} + B e^{-\Omega x} \longrightarrow$ B deve essere nullo, altrim. funz. esplode a $x \to -\infty$ diventando non-accettabile $\longrightarrow$

$\rightarrow \psi_E(x) = A e^{\Omega x} \xrightarrow[\Omega \to \infty]{} 0 \Rightarrow \psi_E^{(1)}(x) = 0 \quad x \in R_1$

R_3) Analogamente a R_1: $\psi_E^{(3)}(x) = 0 \quad x \in R_3$

R_2) L'equazione è $\psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E$. Definiamo $K \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. La sol. è

$$\psi_E^{(2)}(x) = c^+ e^{ikx} + c^- e^{-ikx} \qquad x \in R_2.$$

CONDIZIONI DI RACCORDO (ψ_E continua in $x = \pm \ell/2$):

$$\begin{matrix} \psi_E^{(2)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(1)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) \\ \psi_E^{(2)}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(3)}\left(\frac{\ell}{2}\right) \end{matrix} : \left\{ \begin{array}{l} c^+ e^{-ik\ell/2} + c^- e^{ik\ell/2} = 0 \\ c^+ e^{ik\ell/2} + c^- e^{-ik\ell/2} = 0 \end{array} \right.$$

2 eq. (lineari omogenee) in 2 incognite c^+, c^-.

Sistema lineare omogeneo nelle incognite c^+, c^-:

$$M\begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-ik\ell/2} & e^{ik\ell/2} \\ e^{ik\ell/2} & e^{-ik\ell/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

ha soluz. $(c^+, c^-) \neq (0,0)$ solo se la matrice M ha rango minore di 2 (cioè se $\det M = 0$)

$$\det M = e^{-ikl} - e^{ikl} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2ikl} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ikl = 2in\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

(vedremo poi che $n \to -n$ non cambia l'autostato)

$$\Rightarrow \boxed{K_n = \frac{n\pi}{l}}$$

$\rightsquigarrow$ Questa è una condizione sull'Energia E. Infatti $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\frac{2mEl^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

possibili valori dell'en.

con $\underline{\underline{n \neq 0}}$ (altrimenti $K=0$ e $\psi_E^{(2)}(x) = 0 \quad \forall x \in R_2$)

$$Kl = n\pi \Rightarrow e^{ikl} = e^{i\pi n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema lineare, per $P_n = \frac{n\pi\hbar}{l}$

$$\begin{pmatrix} e^{-ik_n l/2} & e^{ik_n l/2} \\ e^{ik_n l/2} & e^{-ik_n l/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

$$\Big| \quad e^{ik_n l} = e^{i\pi n}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi n/2} & e^{i\pi n/2} \\ e^{i\pi n/2} & e^{-i\pi n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

è equivalente a

qta riga dipende lin. dalla prima riga

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi n} \\ \cancel{e^{i\pi n}} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} \to c^+ + e^{i\pi n} c^- = 0$$

$$\downarrow$$

$$c^+ + (-1)^n c^- = 0$$

n pari : $c^- = -c^+$ $\underline{n = 2m}$

$$\psi_{2m}(x) = c^+ \left(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right) = \qquad \left(k_n = \frac{n\pi}{\ell} \right)$$

$$= 2ic^+ \operatorname{sen}(k_n x) = 2ic^+ \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right)}_{\text{DISPARI } (x \to -x)} \qquad m \neq 0$$

n dispari : $c^- = c^+$ $\underline{n = 2m+1}$

$$\psi_{2m+1}(x) = c^+ \left(e^{ik_m x} + e^{-ik_m x} \right)$$

$$= 2c^+ \cos(k_m x) = 2c^+ \underbrace{\cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell} \right)}_{\text{PARI } (x \to -x)}$$

Calcoliamo valore di c^+ affinché le funz. siano NORMALIZZATE:

$$1 = \|\psi_{2m}\|^2 = 4|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right) dx = 2|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{\ell} \right) \right) dx =$$

$$= 2|c^+| \left(\ell - \frac{\ell}{4m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4m\pi x}{\ell} \right) \Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} \right) = 2\ell |c^+|^2$$

$\Rightarrow c^+ = \dfrac{-i}{(2\ell)^{1/2}}$ a meno di una fase arbitraria. Quindi la funz. normalizzata è:

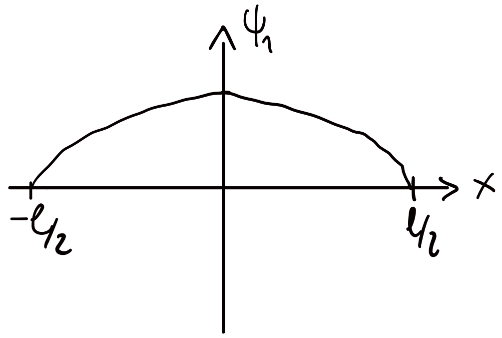
$$\psi_{2m}(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right)$$

Analogamente, la funzione con $n = 2m+1$ normalizzata è

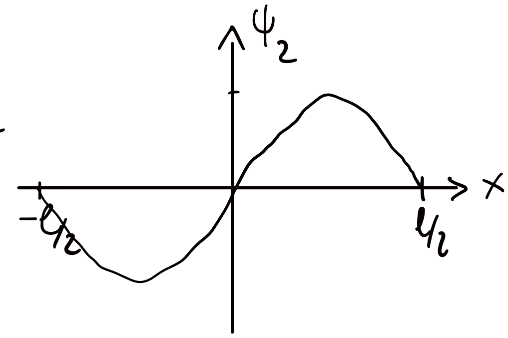
$$\psi_{2m+1}(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell} \right)$$

Esempi

$n = 1$



$n = 2$



Spettro dell'en. è DISCRETO :

- Per ogni valore E_n dell'energia trovo una sola autofunz. (autostato) (LIVELLO ENERGETICO è NON-DEGENERE)
- Le autofunzioni $\in L^2(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ possono rappresentare stati del sistema.
- Le autofunzioni sono REALI (a meno di un fattore complesso cost.)
- Le autofunzioni hanno PARITÀ DEFINITA ($V(-x) = V(x)$)
- Lo spettro è limitato inferiormente ($V(x) \geq 0 \Rightarrow E > 0$)
  il livello energetico di minima energia è

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} \leftarrow$$

AUTOSTATO CORRISPONDENTE è detto STATO FONDAMENTALE

$\rightsquigarrow$ in particolare la particella non può avere en. nulla; questo lo si può ricavare dal principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Downarrow$

In questo problema $\Delta x_{max} = \ell$

$\Downarrow$

$$\Delta p_{min} = \frac{\hbar}{2\ell} \rightsquigarrow E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{4m\ell^2}$$

Calcoliamo i valori medi di X e P negli autostati

Ricordiamo che $\psi_n(x)$ ha parità definita, quindi:

1) $|\psi_n(x)|^2$ è una funz. pari $\Rightarrow \langle X\rangle_{\psi_n} = \int_{-l/2}^{l/2} x\,|\psi_n(x)|^2\, dx = 0$

2) $\frac{d\psi_n(x)}{dx}$ ha parità opposta a $\psi_n(x) \Rightarrow \psi_n^* \frac{d\psi_n}{dx}$ è dispari

$$\Rightarrow \langle P\rangle_{\psi_n} = \int_{-l/2}^{l/2} \psi_n^* \frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dx}\, dx = 0$$

Per quanto riguarda la varianza $\Delta X = \langle X^2\rangle_\psi - \langle X\rangle_\psi^2$, ci serve calcolare integrali del tipo $\int x^2 \,\mathrm{sen}^2(\frac{\alpha}{2}x)$ e $\int x^2\cos^2(\frac{\alpha}{2}x)$:

$$\int_{-l/2}^{l/2} x^2\, \underset{\cos^2}{\mathrm{sen}^2}\left(\frac{\alpha}{2}x\right) = \int_{-l/2}^{l/2} x^2\, \frac{1\mp\cos\alpha x}{2} = \frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} \mp \frac{1}{2}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\cos(\alpha x)$$

$$\int x^2\cos\alpha x = \frac{1}{\alpha}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\, \frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\int 2x\,\mathrm{sen}(\alpha x)\,dx + \frac{2}{\alpha}\frac{l^2}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha^2}\int x\,\frac{d}{dx}\cos(\alpha x)\,dx + \frac{l^2}{2\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = \underbrace{-\frac{2}{\alpha^2}\int\cos\alpha x\,dx}_{= -\frac{4}{\alpha^2}\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right)}$$

$$+ \frac{2l}{\alpha^2}\cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right) + \frac{l^2}{2\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right)$$

$$= \frac{l^3}{12} \mp \left(-\frac{2}{\alpha^3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right) + \frac{l}{\alpha^2}\cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right) + \frac{l^2}{4\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{2n} \to \alpha = \frac{4n\pi}{l} \Rightarrow \frac{\alpha l}{2} = 2n\pi \\ &\psi_{2n+1} \to \alpha = \frac{2(2n+1)\pi x}{l} \Rightarrow \frac{\alpha l}{2} = (2n+1)\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow = \frac{l^3}{12} \underset{2n+1}{\overset{2n}{\mp}} \left(\frac{l}{\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2}\right) = l^3\left(\frac{1}{12} \mp \frac{1}{4n^2\pi^2}\right)$$

$$\langle x^2\rangle_{\psi_n} = 2l^2\left(\frac{1}{12} \mp \frac{1}{4n^2\pi^2}\right) \equiv \Delta x^2_{\psi_n}$$

Oppure possiamo calcolare la probabilità che la particella si trovi a destra, cioè $x \in [0, \ell/2]$

Facciamolo per $\psi_{2m} = 2 i c^+ \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right)$.

- Fissiamo c^+ in modo che ψ_{2m} sia normalizzata:

$$\|\psi_{2m}\|^2 = 4|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi}{\ell} x\right) dx = 2|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(1 - \cos\left(\frac{4m\pi}{\ell} x\right)\right) dx$$

$$= 2|c^+|^2 \ell \Rightarrow c^+ = \frac{-i}{(2\ell)^{1/2}}$$ a meno di una fase irrilevante

$$\psi_{2m} = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right)$$

$$\operatorname{Prob}(x \in [0, \ell/2]) = \int_0^{\ell/2} \left(\frac{2}{\ell}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell/2} \left(1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{\ell}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}$$

MISURE di ENERGIA in AUTOSTATI di H

Dato un sistema come q.lo appena studiato, con $\hat{H}$ a spettro discreto, autovalori E_n, e relativi autostati ψ_n, possiamo calcolare la distribuzione di misure di Energia nello stato ψ_n.

- Valore medio di H:

$$\langle H \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H}\psi_n) = (\psi_n, E_n\psi_n) = E_n \|\psi_n\|^2 = E_n$$

ψ_n normalizzata.

- Valore medio di H^2:

$$\langle H^2 \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H}^2\psi_n) = (\psi_n, E_n\hat{H}\psi_n) = (\psi_n, E_n^2\psi_n) = E_n^2$$

- Varianza:

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E^2 - (E)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ Se il sistema è nell'autostato ψ_n di $\hat{H}$, una misura di H darà con PROBABILITÀ 1 il risultato E_n.