

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la funzione $f :]0, +\infty[$ definita da $f(x) = \min\{x, \frac{1}{x}\}$ e la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}xf(x)\right)^n}{2n}.$$

- (i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.
- (ii) Si stabilisca se la convergenza di f su E è uniforme.
- (iii) Si calcoli la somma della serie.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri, definita sull'insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1; |y| > 1\},$$

la funzione $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{y^2} + 3y$.

- (i) Si studino le proprietà topologiche di E : aperto, chiuso, compatto, connesso (poer archi).
- (ii) Fissiamo $x \in]-1, 1[$. È vero che la funzione $f(x, \cdot) : \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana?
- (iii) Si stabilisca se è possibile estendere la funzione f ad una funzione $\tilde{f}$ continua e definita su $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la serie di potenze $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n - 2^n} t^n$.

- (i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.
- (i) Si stabilisca se la convergenza di f su E è uniforme.
- (ii) Si consideri la funzione $g(x) = \int_1^x f(t) dt$.
- Si provi che $x = 0$ è un punto di minimo per g .
- Si provi che $-1 < g(0) < -\frac{7}{12}$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri lo spazio metrico $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ delle funzioni continue definite sull'intervallo $[0, 1]$, con la norma del massimo. Sia $f : X \rightarrow X$ la funzione definita da

$$f(\phi)(x) = \phi\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

- (i) Si stabilisca se la funzione f è continua.
- (ii) Si stabilisca se la funzione f è Lipschitziana.
- (iii) Si stabilisca se la funzione f ammette dei punti fissi.