PARTICELLA QUANTISTICA IN CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$

Ricordiamo:

Dato un campo magnetico $\bar{B}$, esso può essere espresso come il rotore del potenziale vettore $\bar{A}$:

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

In meccanica classica la Lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{x}}^2 + e \dot{\bar{x}} \cdot \bar{A}$$

Le coord. $\bar{x} = (x, y, z)$ sono le coord. cartesiane della particella.

I momenti coniugati sono

$$\frac{p_h - eA_h}{m}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x$$
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\bar{x}} = \frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}$$
$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z$$

L'Hamiltoniana è

$$\boxed{H(\bar{p}, \bar{x}) = \frac{(\bar{p} - e\bar{A}(\bar{x}))^2}{2m}}$$

"Invarianza di GAUGE":

Dinamica CLASSICA dipende solo da $\bar{B}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ e $\bar{A} + \bar{\omega}$ sono EQUIVALENTI se $\bar{\nabla}\omega = 0$ (cioè se ω è una 1-forma CHIUSA)

Infatti le eq. di Hamilton sono

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{1}{m}\sum_{h=1}^{3}(p_h - eA_h)\frac{\partial A_h}{\partial x_i}(-e) \qquad = e\sum_h \dot{x}_h \frac{\partial A_h}{\partial x_i}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - eA_i)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_i = \frac{1}{m}\dot{p}_i - e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{e}{m}\sum_j \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

⇝ Troviamo la stessa equazione del moto se sostituiamo

$$\bar{A} \mapsto \bar{A} + \bar{\nabla}\lambda \qquad (*)$$

$$\left(\text{Infatti } \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \mapsto \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \cancel{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i \partial x_j}} - \cancel{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_i}}\right)$$

⇒ La dinamica del sistema è invariante sotto la trasf. $(*)$, chiamata TRASFORMAZIONE DI GAUGE

Notiamo che $\bar{A}$ e $\bar{A}' = \bar{A} + \bar{\nabla}\lambda$ danno lo stesso campo magnetico $\bar{B}$ (perché $\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\lambda = 0$). Quindi abbiamo appena riscoperto che la dinamica classica dipende solo dal campo magnetico $\bar{B}$ (non dal particolare $\bar{A}$).

Notiamo che le eq. del moto di $\bar{p}(t)$ cambiano sotto $(*)$; questo avviene perché $(*)$ cambia la definizione di momento coniugato. Si nota però che $(*)$ non cambia quello che chiamiamo velocità della particella ($\dot{\bar{x}}$) che è la grandezza fisica effettivamente osservabile.

Vediamo ora l'analogo in Meccanica Quantistica.

In MECCANICA QUANTISTICA, la dinamica di un sistema rimane invariata sotto trasformazioni

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi \qquad H \mapsto H' = UHU^{-1}$$

con U un OPERATORE UNITARIO (o anti-unitario).

In questo modo, se $\psi_t(\bar{x})$ risolve l'eq. di Schrödinger per H:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \hat{H}\psi_t$$

allora $\psi'(\bar{x})$ risolve l'eq. di Sch. per H':

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t'}{\partial t} = \hat{H}'\psi_t$$

Dim. $i\frac{\partial \psi_t'}{\partial t} = i\frac{\partial}{\partial t}(U\psi_t) = UH\psi_t = UHU^{-1}(U\psi_t) = H'\psi_t'$. //

L'invarianza sotto trasf. di gauge è realizzata in meccanica quantistica da

$$U(\bar{x}) = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(\bar{x})}$$

Vediamo qual è la nuova Hamiltoniana se $H = \frac{(\bar{p}-e\bar{A})^2}{2m}$:

$$H' = \frac{1}{2m} e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(\bar{x})} \left(-i\hbar\bar{\nabla} - e\bar{A}\right)^2 e^{-i\frac{e}{\hbar}\alpha(\bar{x})} =$$

operatore che agisce su un vett. $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$= \frac{1}{2m} e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha} (i\hbar\bar{\nabla} + e\bar{A})\cdot(i\hbar\bar{\nabla} + e\bar{A}) e^{-i\frac{e}{\hbar}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2m} e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha} (i\hbar\bar{\nabla} + e\bar{A})\cdot e^{-i\frac{e}{\hbar}\alpha}\left(i\hbar\left(-\frac{ie}{\hbar}\right)\bar{\nabla}\alpha + i\hbar\bar{\nabla} + e\bar{A}\right) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(i\hbar\left(-\frac{ie}{\hbar}\right)\bar\nabla\alpha\right)\cdot\left(e\bar\nabla\alpha + i\hbar\bar\nabla + e\bar A\right) +$$

$$+\frac{1}{2m}\left(i\hbar e\bar\nabla^2\alpha + i\hbar e\,\bar\nabla\alpha\cdot\bar\nabla - \hbar^2\bar\nabla^2 + i\hbar e(\bar\nabla\cdot\bar A) + \right.$$
$$\left. + i\hbar e\,\bar A\cdot\bar\nabla\right) +$$

$$+\frac{1}{2m}\left(e^2\bar A\cdot\bar\nabla\alpha + i\hbar e\,\bar A\cdot\bar\nabla + e^2\bar A^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(e^2(\bar\nabla\alpha)^2 + \underline{2i\hbar e\,\bar\nabla\alpha\cdot}\bar\nabla + 2e^2\bar\nabla\alpha\cdot\bar A\right.$$
$$+ \underline{i\hbar e}\,\bar\nabla^2\alpha - \underline{\hbar^2}\bar\nabla^2 + \underline{i\hbar e(\bar\nabla\cdot\bar A)} + \underline{2i\hbar e\,\bar A\cdot\bar\nabla}$$
$$\left. + e^2\bar A^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\nabla^2 + 2i\hbar e(\bar A + \bar\nabla\alpha)\cdot\bar\nabla + i\hbar e\,\bar\nabla\cdot(\bar A + \bar\nabla\alpha)\right.$$
$$\left. + e^2(\bar A + \bar\nabla\alpha)^2\right)$$

$\Rightarrow$ UHU^{-1} è l'espressione di H che avrei ottenuto con la sostituzione $\bar A \mapsto \bar A + \bar\nabla\alpha$!

Sia $\psi_t(\bar x)$ soluz. di eq. di Sch. con pot. vett. $\bar A$, allora la soluzione dell'eq. di Sch. con pot. vett. $\bar A' = \bar A + \bar\nabla\alpha$ è data da

$$\psi'_t(\bar x) = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(\bar x)}\psi_t(\bar x)$$ ($\bar p$ non è un osservabile).

Nota: Tutte le osservabili devono trasf. come $O \mapsto UOU^{-1}$
In qto modo $\langle O\rangle$ è invariante sotto trasf. di gauge.

La trasf. di gauge è come trasf. di coord. : cambio di descrizione di un sistema.

Ricapitoliamo (INVARIANZA DI GAUGE):

sia in meccanica classica che in meccanica quantistica, possiamo descrivere la dinamica di una particella in campo magnetico con la scelta di un pot. vett. $\bar{A}$ t.c. $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$.

Due potenziali vettori $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ che differiscono per $\bar{\nabla}\alpha$ sono EQUIVALENTI, nel senso che portano alla stessa dinamica.

In meccanica quantistica il passaggio da $\bar{A}$ a $\bar{A}'$ viene implementato da un operatore unitario U che va applicato sia alle osservabili (quando applicato a H, manda $\bar{A}$ in $\bar{A}'$) $O \mapsto U O U^{-1}$, sia agli stati $\psi \mapsto U\psi$.

PARTICELLA QUANTISTICA IN CAMPO MAGNETICO COSTANTE

Consideriamo un campo magnetico cost. $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

e scegliamo un $\bar{A}$ t.c. $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$;

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(In meccanica classica avevamo fatto una scelta più simmetrica)

L'Hamiltoniana corrispondente è

$$H = \frac{1}{2m}(p_x + eBy)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

- In meccanica classica x e z sono coordinate cicliche $\Rightarrow p_x$ e p_z si conservano.

- In meccanica quantistica qto si vede da $[\hat{P}_x, \hat{H}] = 0 = [\hat{P}_z, \hat{H}]$

Nel corso di MQ vedrete che in questo caso soluz. particolari dell'eq. di Sch. sono della forma

$$\psi(x,y,z) = e^{ik_x x} e^{ik_z z} \varphi(y)$$

dove $e^{ik_x x}$ e $e^{ik_y y}$ sono autofunzioni di $\hat{P}_x$ e $\hat{P}_z$.

Applichiamo $\hat{H}$ a $\psi(x,y,z)$:

$$\hat{H}\psi(x,y,z) = \left[\frac{1}{2m}(\hbar k_x + eBy)^2 + \frac{1}{2m^2}\hat{P}_y^2 + \frac{1}{2m}\hbar^2 k_z^2\right]\psi(x,y,z)$$

$$= e^{ik_x x} e^{ik_z z} \underbrace{\left[\frac{1}{2m}(\hbar k_x + eBy)^2 + \frac{1}{2m^2}\hat{P}_y^2 + \frac{1}{2m}\hbar^2 k_z^2\right]}_{= H^*}\varphi(y)$$

Quindi, fissati k_x e k_z, vediamo autostati e autovalori di H^*

$$H^* = \underbrace{\frac{1}{2m}\hat{P}_y^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{eB}{m}\right)^2\left(y - \left(-\frac{\hbar k_x}{eB}\right)\right)^2}_{\text{HAMILTONIANA di 1 osc. arm. 1dim.}} + \frac{1}{2m}\hbar^2 k_z^2$$

shift cost. dell'En. (irrilevante)

HAMILTONIANA di 1 osc. arm. 1dim.

con origine in $y_0 = -\frac{\hbar k_x}{eB}$ con freq. $\omega_c = \frac{eB}{m}$

autovett. rel. $E_n \longleftrightarrow \psi_n(y)$

autof. osc. arm.

autovalori $E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \leftarrow$ SPETTRO QUANTIZZATO

INDIP. DA K_x !

"LIVELLI DI LANDAU"

$\Downarrow$

Per un dato valore possibile di E_n

c'è un' infinità di autofunz. $e^{ik_x x}\psi(y)$

(Uno può fare pacchetto d'onda in direz. x e avere autofunz. $\psi(x,y)$ localizzata.)

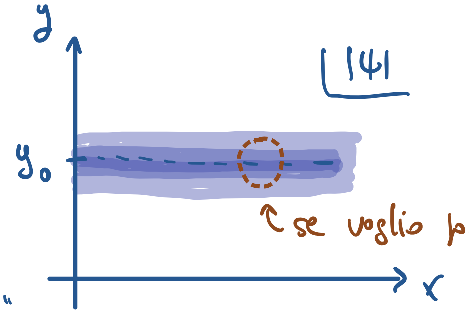
$\downarrow$

In direzione z la particella si comporta come una PARTICELLA LIBERA.

Es. $\psi_0(y)\, e^{ik_x x}$

Gaussiana con larghezza

$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ "larghezza magnetica"



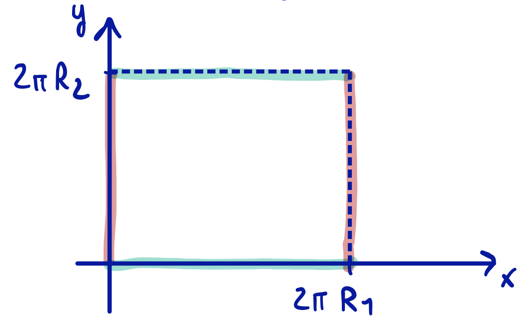
$y_0 = -k_x l_B^2$

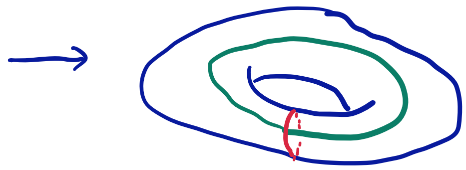
se voglio posso localizzare anche in x con un pacchetto d'onda

Consideriamo ora uno spazio delle configurazioni

$$Q = \underset{(x,y)}{T^2} \times \underset{z}{\mathbb{R}} \quad \text{invece che} \quad \mathbb{R}^3.$$

Un TORO 2-dim $T^2 = S^1_{R_1} \times S^1_{R_2}$ può essere costruito prendendo un rettangolo e identificando i due lati verticali tra loro, così come i due lati orizzontali





Qto vuol dire che posso usare le coord. x, y per parametrizzare i pti sul toro, ma devo identificare i pti

$$(x, y) \sim (x + 2\pi k_1 R_1, \; y + 2\pi k_2 R_2) \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$\bar{B}(x,y)$ dev'essere una funzione ben definita sul toro (cioè deve associare univocam. un vett. a un pto del toro)

$\Rightarrow$ $\bar{B}(x,y)$ deve essere periodico in x, y con periodicità $2\pi R_1$, $2\pi R_2$ rispettivamente, cioè

$$\bar{B}(x + 2\pi R_1, y) = \bar{B}(x, y + 2\pi R_2) = \bar{B}(x,y).$$

Perché qto avvenga, bisogna che $\bar{A}$ sia periodico a meno di una trasformazione di gauge.

Prendiamo $\bar{B} = B\bar{e}_z$ e $\bar{A} = -By\,\bar{e}_x$

Richiediamo che $\bar{A}(x,y+2\pi R_2) = \bar{A}(x,y) + \bar{\nabla}\alpha(x,y)$

cioè
$$-\cancel{By} - 2\pi B R_2 = -\cancel{By} + \partial_x \alpha$$
$$\longrightarrow \quad \alpha(x,y) = -2\pi B R_2 x$$

$\alpha(x,y)$ non sembra ben def. sul toro; tuttavia qlo che deve essere ben def. sul toro è la funzione d'onda $\psi(x,y)$ e la sua trasformata $\psi'(x,y) = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x,y)}\psi(x,y)$.
$\Rightarrow$ se $\psi(x,y)$ è ben def., anche $e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x,y)}$ dev'essere ben def,
cioè
$$e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x+2\pi R_1,y)} = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x,y)}$$

Nel nostro esempio, qto vuol dire
$$-2\pi \frac{eBR_2}{\hbar}\cdot 2\pi R_1 = 2\pi l \quad , \; l \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow \quad B = \frac{2\pi l}{A_{T^2}}\frac{\hbar}{e} \quad \text{con } l\in\mathbb{Z} \quad \text{con } A_{T^2} = (2\pi R_1)(2\pi R_1)$$
↑ area del Toro.

$\Longrightarrow$ B dev'essere quantizzato (multipli interi di $\frac{2\pi}{A_{T^2}}\frac{\hbar}{e}$.)

Consideriamo ora le autofunzioni dell'Hamiltoniana. Esse devono essere periodiche in x e y. In particolare $e^{ik_x x}$ dev'essere periodica, cioè deve avvenire

$$e^{ik_x(x+2\pi R_1)} = e^{ik_x x} \iff 2\pi k_x R_1 = 2\pi q \qquad q \in \mathbb{Z}$$

cioè i valori di k_x permessi sono DISCRETI:

$$k_x^{(q)} = \frac{q_x}{R_1}$$

Ma dev'essere anche $y_0 = -k_x l_B^2$ e $0 \leq y_0 < 2\pi R_2$

$$\iff \quad 0 \leq -\frac{q_x l_B^2}{R_1} \leq 2\pi R_2 \iff -\frac{2\pi R_1 R_2}{l_B^2} \leq q_x \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad |q_x| \leq \frac{A_T}{2\pi l_B^2} \underset{\substack{\uparrow \\ l_B^2 = \frac{\hbar}{eB}}}{=} \frac{A_T B}{\left(\frac{2\pi\hbar}{e}\right)}$$

Degenerazione di ogni livello di Landau.

$$l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \overset{\text{lang}}{=} \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$$

Consideriamo il caso con $\underline{B=0}$.

$$\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{A}=0 \underset{\text{localm.}}{\Longrightarrow} \bar{A}=\bar{\nabla}\chi$$

Classicamente questo vuol dire che la Lagrangiana è

$$L = \frac{m\dot{\bar{x}}^2}{2} + \underbrace{e\,\dot{\bar{x}}\cdot\bar{\nabla}\chi}_{= e\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\dot{x}_i}$$

Qta è un termine di "derivata totale"

che classicamente non influisce sulla dinamica

(che infatti dev'essere la stessa per tutti gli $\bar{A}$

t.c. $\bar{B}=0$)

Classicamente questo è vero sia

per $Q=\mathbb{R}^3$ che per $Q=T^2\times\mathbb{R}$!

Vediamo cosa succede in Meccanica Quantistica.

Siccome $\bar{A}=\bar{\nabla}\chi$, vedo che localmente $\bar{A}$ è gauge equivalente ad $\bar{A}'=0$: $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ sono connessi da trasf. di gauge con $\alpha=-\chi$.

Qui subentra una sottigliezza: noi stiamo richiedendo che $\bar{B}=0$, cioè che $\bar{A}$ sia t.c. $\bar{\nabla}\times\bar{A}=0$.

Qto ci dice che SE Q è uno spazio SEMPLICEM. CONNESSO ($\sim$ tutte le curve chiuse sono contraibili) allora $\exists\,\chi$ t.c. $\bar{A}=\bar{\nabla}\chi$ globalmente.

Se lo spazio Q NON è sempl. connesso, allora è ancora vero che per ogni aperto U_α semplicem. connesso di Q $\exists \chi_\alpha$ def. su U_α t.c. $\bar{A}|_{U_\alpha} = \bar{\nabla}\chi_\alpha$, TUTTAVIA NON esiste in genere nessun χ def. su tutto Q t.c. $\chi|_{U_\alpha} = \chi_\alpha$.

Affinché $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ siano GAUGE EQUIVALENTI, deve esistere localm. una α t.c. $\bar{A}' - \bar{A} = \bar{\nabla}\alpha$.
Come nell'esempio del toro, α non deve necessariam. essere globalm. definita, ma $U = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x)}$ lo deve essere! (Qto per assicurare che la funz. d'onda $\psi'(x)$ sia una buona funzione su Q.)

Nel caso $\bar{B}=0$, non è detto che esista sempre un $U = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x)}$ ben definito t.c. $\bar{A} = \bar{\nabla}\alpha$. Se qto fosse vero, allora $\bar{A}$ sarebbe gauge equiv. a $\bar{A}'=0$.
Come abbiamo detto sopra, se Q è sempl. connesso qto è sempre vero: tutti gli $\bar{A}$ t.c. $\bar{B}=0$ sono gauge equivalenti $\longrightarrow$ la situazione è analoga a qlla classica: $\bar{B}=0 \Rightarrow$ una certa dinamica che è la stessa per ogni $\bar{A}$ t.c. $\bar{\nabla}\times\bar{A}=0$.

Se invece Q non è sempl. conn. bisogna fare attenz. come ora discuteremo per la particella su un cerchio.

Particella quantistica su $Q = S^1$

Consideriamo una particella quantistica che si può muovere su un cerchio S^1 (sistema 1 dim.) di raggio R. Essa ha carica e e può esserci un pot. vettore $\bar{A} = \bar{\nabla}\chi$ (localm.) t.c. $\bar{B} = 0$. In coord. cartesiane

$$L = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 + e\,\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + e\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}$$

Imponiamo il vincolo, che in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo $\chi(\varphi) \equiv \chi(\bar{r}(\varphi))$ (con abuso di notazione)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = R^2\dot{\varphi}^2 \\ &\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i} = \sum_i \dot{\varphi}\frac{dx_i}{d\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial x_i} = \dot{\varphi}\,\chi'(\varphi) \end{aligned}$$

con qta parametrizzaz., θ è dimensionless!

Facciamo la semplice scelta $\chi(\varphi) = \frac{\hbar}{e}\frac{\theta}{2\pi}\varphi$. Allora la Lagr. è

$$L = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\hbar\theta}{2\pi}\dot{\varphi}$$

Diverse scelte di θ corrispondono a diverse scelte di $\bar{A}$ t.c. $\bar{B} = 0$.

Nella teoria classica, qta Lagrangiana genera la stessa dinamica di $L' = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2$.

Il momento coniugato a φ è

$$P_\varphi = mR^2\dot{\varphi} + \frac{\hbar\theta}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\left(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)}{mR^2}$$

L'Hamiltoniana corrispondente è

$$H_\theta = \frac{\left(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2}$$

- φ e P_φ sono variabili canonicamente coniugate e diventano operatori: $\hat{\varphi}\,\psi(\varphi) = \varphi\,\psi(\varphi)$ $\quad \hat{P}_\varphi\,\psi(\varphi) = \frac{\hbar}{i}\psi'(\varphi)$

- Notiamo che $\theta \to \theta + 2\pi$ corrisponde a trasf. di gauge con $\alpha = \frac{\hbar}{e}\varphi$.

$\Rightarrow \hat{H}_{\theta+2\pi} = \hat{U}\,\hat{H}_\theta\,\hat{U}^{-1}$ con $U = \underbrace{e^{i\varphi}}_{\text{ben def. su } S^1}$

$U(\bar{x}) = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(\bar{x})}$

perché periodica in $\varphi \to \varphi + 2\pi$

- Invece shiftare $\theta \to \theta + \gamma$ con $\gamma \notin 2\pi\mathbb{Z}$ non è implementabile con una trasf. di gauge ben definita perché sarebbe $U = e^{i\frac{\gamma}{2\pi}\varphi}$, non-periodica per $\varphi \to \varphi + 2\pi$.

$\Downarrow$

Le Hamiltoniane H_θ con $\theta \in [0, 2\pi[$ NON sono equivalenti (perché non sono legate da una trasf. di gauge).

(*) vedi sotto

$\Longrightarrow$ devono portare a dinamica diversa, che in MQ si ripercuote su un diverso SPETTRO dell'Hamiltoniana.

Calcoliamo lo spettro di H_Θ :

- Usiamo il fatto che conosciamo le autof. di $\hat{P}_\varphi = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$

$$\hat{P}_\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \hbar n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} e^{im\varphi} d\varphi = \delta_{nm}$$

necessario affinché le autofunz. siano periodiche, cioè ben def. sul cerchio.

(come nella buca di pot. infinita, le autof. di P_φ sono dei buoni stati quantistici $\in L^2$)

- Quindi :

$$\hat{H}_\Theta \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2mR^2}\left(\hat{P}_\varphi - \frac{\hbar\Theta}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\Theta}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad E_n^\Theta = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\Theta}{2\pi}\right)^2 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- Si vede subito a occhio che per Θ diversi ho diversi spettri, quindi dinamiche diverse.

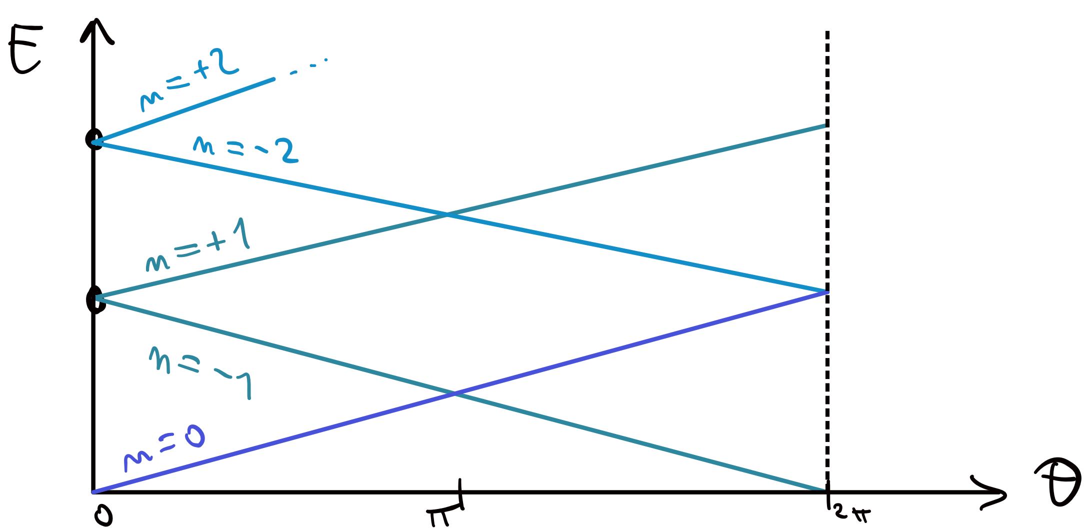
- Se $\Theta \to \Theta + 2\pi$, lo SPETTRO RIMANE INVARIATO. Questo avviene in modo non-triviale, infatti $\Theta \to \Theta + 2\pi$ shifta efficacemente $n \to n-1$.

- Se $\theta = 0$
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} n^2$
  - quando $n \neq 0$ gli autovalori sono degeneri (deg = 2), perché $e^{i|n|\varphi}$ e $e^{-i|n|\varphi}$ sono indip.

    il LIVELLO di MIN. ENERGIA $(n=0)$ invece è <u>non deg.</u>

- Se $\theta = \pi$ $\qquad (n+1)^2 \quad \left(-n-1+\frac{1}{2}\right)^2$
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$
  - i livelli ENERGETICI sono tutti degeneri (deg = 2) con autofunz. $e^{i|n|x/R}$ e $e^{-i|n+1|x/R}$

- Se $\theta \neq 0, \pi \quad 0<\theta<2\pi$
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n+\frac{\theta}{2\pi}\right)^2$
  - i livelli energetici sono tutti non-degeneri



Abbiamo visto che per θ diversi, otteniamo una dinamica diversa (diverso spettro dell' Energia)

$\rightarrow$ cioè per $Q = S^1$ il termine di derivata totale influisce sulla dinamica del sistema (a differenza di quanto accade nella teoria classica).

⊛ Se invece prendiamo $Q = \mathbb{R}$ (particella unidim.) allora posso sempre prendere una trasf. di gauge con $U = e^{-i\frac{\theta}{2\pi}\varphi}$ per cancellare il termine-θ in H_θ e ricondurmi a sist. con Ham. H_0. Qto è possibile perché $e^{-i\frac{\theta}{2\pi}\varphi}$ è una funzione ben definita per $\varphi \in \mathbb{R}$.