DEF. $F(x)$ È **PRIMITIVA** DELLA FUNZIONE $f(x)$ SE $[F'(x) = f(x).]$

↳ $F(x)$ DEVE ESSERE CONTINUA E DERIVABILE IN UN INTORNO DI x.

- **I° PARTE TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:**

Hp) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN INTERVALLO.

SIA $F(x) = \int_a^x dt\, f(t)$ CON $x \in [a,b]$

Th) SE f È **LIMITATA** IN $[a,b] \Rightarrow F(x)$ È **CONTINUA**.

SE f È CONTINUA IN $[a,b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

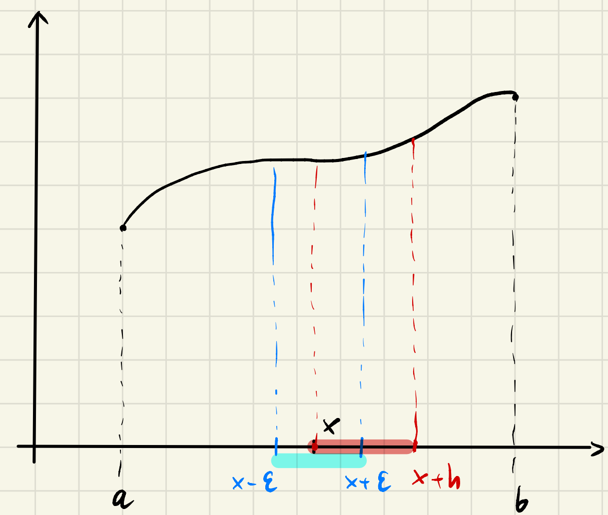
PROOF: SE f È INTEGRABILE ALLORA DEFINISCO:

$$F(x-\varepsilon) = \int_a^{x-\varepsilon} dt\, f(t) \qquad F(x+\varepsilon) = \int_a^{x+\varepsilon} dt\, f(t)$$

$$\left[F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dt\, f(t) < M \cdot 2\varepsilon \right]$$

CON M MAX DI f IN $[a,b]$

SE $\lim_{\varepsilon \to 0}$ CORRISPONDE A CONTINUITÀ!



$$F(x+h) = \int_a^{x+h} dt\, f(t) \Rightarrow F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} dt\, f(t) - \int_a^{x} dt\, f(t) = \int_x^{x+h} dt\, f(t) = h \cdot f(\bar{x})$$

TH. MEDIA INTEGRALE

$$\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\bar{x}) \quad \text{MA} \quad h \to 0 \Rightarrow \bar{x} \to x$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

- **II° PARTE TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:**

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(a) - F(b)$$

PROOF. $x_i - x_{i-1} = \frac{(b-a)}{N}$ $\quad x_N = b$, $x_0 = a$ $\quad f(\bar{x}_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_i^N f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{N \to \infty} \sum_i^N \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

MA $\sum_i^N \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = (F(x_N) - \cancel{F(x_{N-1})}) + (\cancel{F(x_{N-1})} - \cancel{F(x_{N-2})}) + \dots + (\cancel{F(x_1)} - F(x_0))$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(F(x_N) - F(x_0) \right) = F(b) - F(a).$$

$\blacksquare$

<u>Ex.</u> $\int dx \, x^n \qquad x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

ES. 1.

$$\int dx \, x \log(1+x^2)$$

- PRIMITIVA PASSANTE PER $(1, \log(2))$?

AD OGNI PRIMITIVA È ASSOCIATA UNA COSTANTE DI INTEGRAZIONE.

i) SOSTITUZIONE : $1+x^2 = y$

↳ DEVO CONVERTIRE L'ELEMENTO DI MISURA :

$$\frac{d}{dx}(1+x^2) = 0 + 2x \qquad \frac{d}{dy}(y) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x \cdot dx = 1 \cdot dy$$

ii) $$\frac{1}{2}\int (2x\,dx) \log(1+x^2) = \frac{1}{2}\int dy \log(y)$$

iii) PARTI : $$\frac{1}{2}\int dy \, \overset{f(y)}{1} \cdot \overset{g(y)}{\log(y)} = \frac{1}{2}\left[\overset{f(y)}{y} \cdot \overset{g(y)}{\log(y)} - \int dy \, \overset{f(y)}{\cancel{y}} \cdot \overset{g'(y)}{\frac{1}{\cancel{y}}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[y \cdot \log(y) - \int dy\right] = \frac{1}{2}\left[y \log(y) - y\right] + c$$

iv) SOSTITUISCO $y = 1+x^2 \rightarrow \left[\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\log(1+x^2) - (1+x^2)\right] + c\right]$ PRIMITIVA

5) IMPONGO CHE PASSI PER $(1, \log(2))$:

$$\log(2) = \left\{ \frac{1}{2}(1+x^2)\left[\log(1+x^2)-1\right]+c \right\}\Big|_{x=1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left[\log(2)-1\right]+c$$

$$\Rightarrow \cancel{\log(2)} = \cancel{\log(2)} - 1 + c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

COSTANTE DI INTEGRAZIONE

ES. 3: 2) $\displaystyle\int_1^2 dx\, x^2\log(x)$

i) LA FUNZIONE INTEGRANDA DA PROBLEMI NELL'INTERVALLO $[1,2]$?

↳ NO! INFATTI: • x^2 È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

• $\log(x)$ DA PROBLEMI SOLO IN 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\log(x) = -\infty$$

ALLORA POSSIAMO INTEGRARE TRANQUILLI.

ii) VORREMMO DISFARCI DEL $\log(x)$ E UN OTTIMO MODO DI FARLO È DERIVANDOLO.

$\Rightarrow$ INTEGRIAMO PER PARTI : $\int_a^b dx\, f'(x) g(x) = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx\, f(x) g'(x)$

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \log(x)$$

$$\int_1^2 dx\, x^2 \log(x) = \frac{x^3}{3} \cdot \log(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 dx\, \frac{\cancel{x^3}^{\,2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{x^3}{3} \log(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 dx\, \frac{x^2}{3} = \left(\frac{x^3}{3} \log(x) - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^2$$

$$\left[= \frac{8}{3} \log(2) - \frac{7}{9} \right]$$

3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} dx\, \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log^2(x)}$

i) $\log(1) = 0$, $1 \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log^2(x)} \Big|_1$ NON È DEFINITA!

ii) HO DUE STRADE :

- $\displaystyle\underbrace{\lim_{a \to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{a} dx\, \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log^2(x)}}_{1} + \underbrace{\lim_{b \to 1^+} \int_{b}^{2} dx\, \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log^2(x)}}_{2}$

$$\int_\alpha^\beta dx\, \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log^2(x)}$$

FACCIO LA SOSTITUZIONE: $\log(x) = y$, $\frac{1}{x}dx = dy$

$$\int_{\log(\alpha)}^{\log(\beta)} dy\, \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_{\log(\beta)}^{\log(\alpha)} = -\frac{1}{\log(\alpha)} + \frac{1}{\log(\beta)}$$

① $$\lim_{a\to 1^-}\left(-\frac{1}{\log(a)} + \frac{1}{\log(\frac{1}{2})}\right) = \infty$$

② $$\lim_{b\to 1^+}\left(-\frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{\log(b)}\right) = \infty$$

L'INTEGRALE NON ESISTE!

- $\log^2(x)$ LA SVILUPPO IN TAYLOR ATTORNO A 1:

$$\log^2(x) = \log^2(1) + \left(2\cdot\log(x)\cdot\frac{1}{x}\right)\Big|_1 (x-1) + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} - \log(x)}{x^2}\right)\Big|_1 (x-1)^2$$

$$= 0 + 0\cdot(x-1) + (x-1)^2 = (x-1)^2$$

LA FUNZIONE INTEGRANDA ATTORNO A 1 VA COME : $\sim \dfrac{1}{(x-1)^{2}}$ → $2 > 1 \Rightarrow$ DIVERGE IN MODO NON INTEGRABILE !