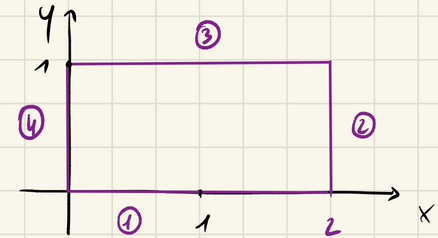
ES. 1:

$$f(x,y) = xe^y - x^2 - e^y$$

SUL RETTANGOLO $(0,0) \times (2,0) \times (2,1) \times (0,1)$



- INTERNO NEL RETTANGOLO: $\bar{\nabla} f(x,y) = ?$

$$\bar{\nabla} f(x,y) = \left[e^y - 2x, \ xe^y - e^y \right] \Rightarrow \text{PTI STAZIONARI } \bar{\nabla} f(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^y - 2x = 0 & , \ e^y - 2 = 0 , \ y = \ln(2) \ (\simeq 0.7) \\ \underbrace{e^y}_{\neq 0 \text{ SEMPRE}}(x-1) = 0 & , \ x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left[(1, \ln(2)) \right]$ È UN PTO STAZIONARIO INTERNO.

- BORDO... DIVIDIAMO I LATI E PARAMETRIZZIAMO ⤳

① $y = 0$ $\quad 0 \leq x \leq 2$

② $x = 2$ $\quad 0 \leq y \leq 1$

③ $y = 1$ $\quad 0 \leq x \leq 2$

④ $x = 0$ $\quad 0 \leq y \leq 1$

① $f(x,y) = xe^0 - x^2 - e^0 = x - x^2 - 1$

② $f(x,y) = 2e^y - y - e^y = e^y - y$

③ $f(x,y) = x \cdot e - x^2 - e = -x^2 - e \cdot x - e$

④ $f(x,y) = 0 \cdot e^y - 0^2 - e^y = -e^y$

① $f'(x) = 1 - 2x - 0 = 1 - 2x \overset{!}{=} 0$, $\quad 2x = 1$, $\quad x = \frac{1}{2}$

② $f'(y) = e^y - 0 = e^y \overset{!}{=} 0$, $\quad$ MAI $= 0$!

③ $f'(x) = -2x - e - 0 \overset{!}{=} 0$, $\quad x = -\frac{e}{2}$ ⇝ NON STA SUL BORDO !

④ $f'(y) = -e^y \overset{!}{=} 0$, $\quad$ MAI $= 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ È UN PTO STAZIONARIO PER $f(x,y)$ RISTRETTA SU ①.

- ANALIZZO PTO INTERNO $(1, \ln(2))$

$Hf(x,y) = ?$ $\quad \partial_x^2 f = -2 \quad \partial_y \partial_x f = e^y$

$\partial_y \partial_x f = e^y \quad \partial_y^2 f = (x-1)e^y$

$$\Rightarrow \quad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & e^y \\ e^y & (x-1)e^y \end{bmatrix} \Rightarrow Hf(1,\ln(2)) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

NON DIAGONALE $\Rightarrow$ $\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda(\lambda-2) - 4$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{8} = 1 \pm \sqrt{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \simeq 2.4 \\ \searrow \simeq -0.4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ [$(1,\ln(2))$ E' <u>SELLA</u>] ✓

- $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ IN $(x_0, y_0) = (1,0)$ LUNGO $\bar{v} = [3,4]$ $\rightsquigarrow$ $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ $\Rightarrow$ $\bar{v} = \frac{1}{5}[3,4]$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \bar{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \bar{v} = [-1, \ 0] \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(-3 \cdot 1 + 0 \cdot 4) = \left[-\frac{3}{5}\right] \checkmark$$

- PIANO TANG. IN $(1, 2, -1)$

$$\Rightarrow z - z_0 = \bar{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow z - (-1) = [e^2 - 2, \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[z + 1 = (e^2 - 2) \cdot (x - 1)\right] \checkmark$$

Es. 2:

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{1 < |x| < 2}_{1)},\ -3 < y < 3\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ -2 < x < 2,\ \underbrace{2 < |y| < 3}_{2)}\}$

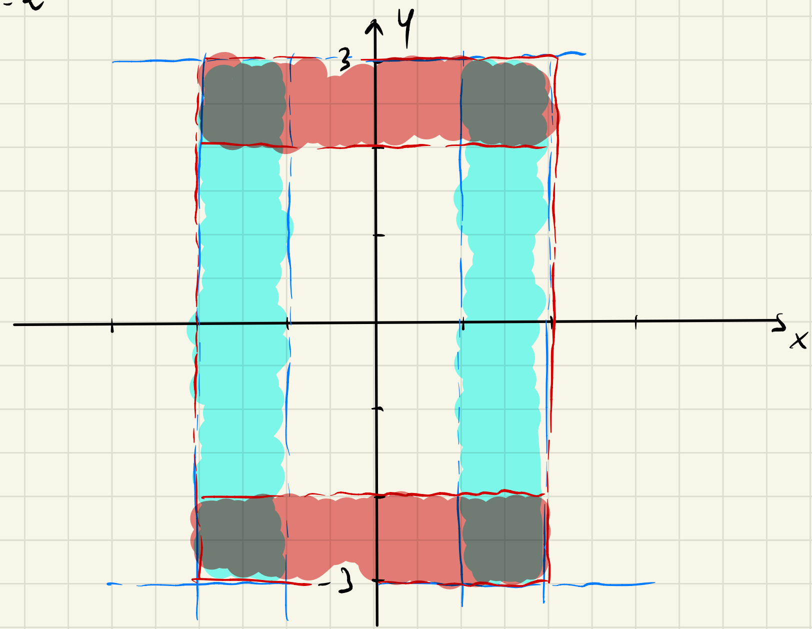
1) $x > 0 \rightarrow 1 < x < 2$

$x < 0 \rightarrow 1 < -x < 2,\ -1 > x > -2,\ -2 < x < -1$

2) $y > 0 \rightarrow 2 < y < 3$

$y < 0 \rightarrow -3 < y < -2$

GUARDIAMOLO...



$f(x)$ È FUNZIONE DI x SE $\forall x \in$ DOMINIO f ASSOCIA UNO E UN SOLO VALORE DI y.

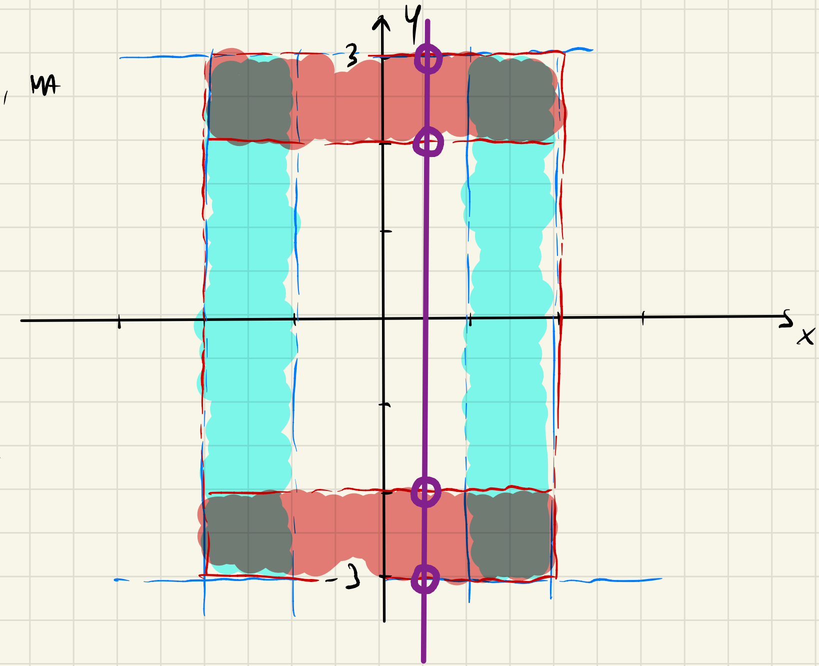
UN DOMINIO D È NORMALE RISPETTO A x SE $x \in [a, b]$ E $f(x) \le y \le g(x)$, QUESTO NON È IL NOSTRO CASO, BASTA PRENDERE UNA QUALSIASI RETTA VERTICALE TRA -2 E 2.

- LA REGIONE ROSSA È DELIMITATA IN y DA __QUATTRO__ RETTE (CHE SONO FUNZIONI DI x), MA NOI VOGLIAMO SIA LIMITATA DA SOLO __DUE__ FUNZIONI.

  → NO SEMPLICE RISPETTO A x.

- STESSA COSA PER y.

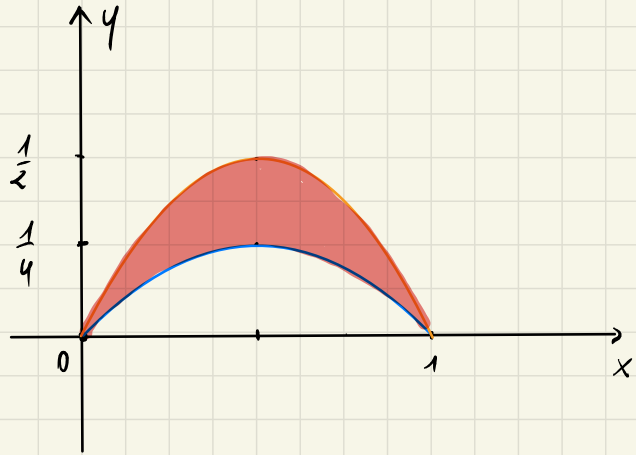
- D_1 HA UN BUCO INTERNO ⇒ NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO.



$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{x(1-x) < y < -2x^2+2x}_{1)},\ 0 < x < 1 \}$

1) $x - x^2 < y < -2x(x-1)$

- SEMPLICE RISPETTO A x ✓
- NON SEMPLICE RISPETTO A y. ✗
- SEMPLICEMENTE CONNESSO ✓



ES. 3 : $L(x,y) = -y\,dx + x\,dy$

$$\int_\gamma L(x,y) = ? \quad \text{se} \quad \gamma(t) = (t \cdot \text{sen}\,t,\ 2t) = \begin{cases} x(t) = t \cdot \text{sen}\,t \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

$$dx = \dot{x}(t)\,dt = (\text{sen}(t) + t \cdot \cos(t))\,dt$$

$$dy = \dot{y}(t)\,dt = 2\,dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_\gamma x\,dy - \int_\gamma y\,dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{(t \cdot \text{sen}\,t)(2dt)} - \int_0^{2\pi} \underbrace{(2t) \cdot (\text{sen}\,t} + t\cos t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \cancel{dt\ t\,\text{sen}\,t} - 2\int_0^{2\pi} \cancel{dt\ t\,\text{sen}\,t} - 2\int_0^{2\pi} dt\ t^2 \cos t$$

$$= -2\int_0^{2\pi} dt\ \overbrace{t^2}^{f(t)}\ \overbrace{\cos t}^{g(t)} \underset{\text{PARTI}}{=} -2\left[\overbrace{t^2}^{f} \cdot \overbrace{\text{sen}\,t}^{G}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dt\ \overbrace{(2t)}^{f'} \cdot \overbrace{\text{sen}(t)}^{G}\right]$$

$$= -2\left[0 - 2\int_0^{2\pi} dt\, t\, \mathrm{sen}(t)\right] = 4\int_0^{2\pi} dt\, t\, \mathrm{sen}(t) \ominus$$ PARTI, DI NUOVO...

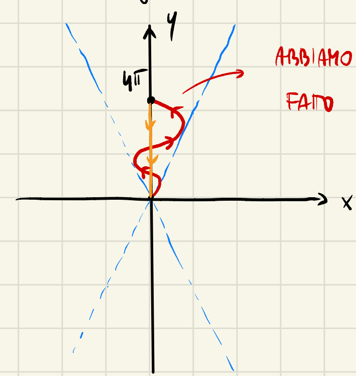
$$= 4\left[t\cdot(-\cos(t)) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dt\, (1)(-\cos t) \right] = 4\left[-t\cdot \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} dt\, \cos(t) \right]$$

$$= 4\left[-t\cdot\cos(t) + \mathrm{sen}(t) \right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4\cdot\left[\left(-2\pi\cos(2\pi)\right)\right] = \boxed{-8\pi} \checkmark$$

CONFRONTIAMO CON L'INTEGRALE SUL SEGMENTO CHE CONGIUNGE $\gamma(0)$ E $\gamma(2\pi)$

$\gamma(0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ $\qquad$ $\gamma(2\pi) \Rightarrow (x,y) = (0, 4\pi)$



ABBIAMO APPENA FATTO QUELLO ROSSO!

PARAMETRIZZO LUNGO IL SEGMENTO : $\quad x = 0$

$y = \alpha \quad \text{CON} \quad \alpha : 4\pi \to 0$

NON STO INT. IN x

$$\Rightarrow \int_\Gamma L(x,y) = \int_\Gamma (x\,dy - \cancel{y\,dx}) = \int_\Gamma x\,dy = \boxed{0} \checkmark$$

ES. 4:

a) $\int_{-1}^{0} \frac{3x+1}{1-x^2}$ CONTROLLO ESTREMI...

$\lim_{x \to 0} \frac{3x+1}{1-x^2} = 1$ ✓

$\lim_{x \to -1} \frac{3x+1}{1-x^2} = \infty$ $\Rightarrow$ ESISTERÀ?

$(1-x^2) = (1+x)(1-x)$

$\Rightarrow \frac{3x+1}{(1+x)(1-x)}$

È QUESTO IL PROBLEMA! $\lim_{x \to -1} 3x+1 = -2$ NON DA PROB.

$\Rightarrow$ L'ANDAMENTO È $\frac{1}{(x+1)}$ RICORDIAMO CHE $\frac{1}{(x-b)^\alpha}$ È INTEGRABILE SOLO SE $\alpha < 1$, NEL NOSTRO CASO $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ [NON INTEGRABILE] ✓

b) $\int_0^\pi dx\ \text{sen}(\ln(x))$ TOSTINO...

PROVIAMO PER PARTI : $I = \int_0^\pi dx\ \underbrace{(1)}_{g} \cdot \underbrace{\text{sen}(\ln(x))}_{f} = \text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\ \cancel{x} \cdot \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$$\Rightarrow I = \text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi dx \cos(\ln(x))}$$

FACCIAMO PARTI DI NUOVO, SOLO SU LUI

$$I = \text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - \left[x \cdot \cos(\ln(x)) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\ \cancel{x} \left(-\text{sen}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) \right]$$

$$= \text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - x \cdot \cos(\ln(x)) \Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi dx\ \text{sen}(\ln(x))}$$

È DI NUOVO I !

$$\Rightarrow 2I = \text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - x \cdot \cos(\ln(x)) \Big|_0^\pi \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\ln(x)) \cdot x \Big|_0^\pi - x \cdot \cos(\ln(x)) \Big|_0^\pi \right]$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} dx \, \text{sen}(\ln(x)) = \frac{1}{2}\left[\pi \cdot \text{sen}(\ln(\pi)) - \pi \cdot \cos(\ln(\pi))\right] = \boxed{\frac{\pi}{2}\left[\text{sen}(\ln(\pi)) - \cos(\ln(\pi))\right]} \checkmark$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y \ln(x^2+y^2)$$

POLARI: $x = R \cdot \cos\theta$

$y = R \cdot \text{sen}\theta$

CONTINUA $R > 0$

$$\Rightarrow \lim_{R\to 0} R^2 \cos\theta \, \text{sen}\theta \cdot \ln(R^2) = \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta) \cdot \lim_{R\to 0} \frac{\ln(R^2)}{\frac{1}{R^2}} \circledast$$

CONTINUA $R > 0$

$$\Rightarrow \text{HÔPITAL}: \lim_{R\to 0} \frac{\frac{d}{dR}(\ln(R^2))}{\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R^2}\right)}$$

SE ESISTE $\Rightarrow$ IL $\circledast$ HA QUEL VALORE!

CHAIN RULE

$$\lim_{R\to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{R^2}} \cdot \cancel{2R}}{-\frac{\cancel{2R}}{\cancel{R^4}}} = \lim_{R\to 0} (-R^2) = \boxed{0} \checkmark$$

DERIVATA RAPPORTO

IL LIMITE FA 0.