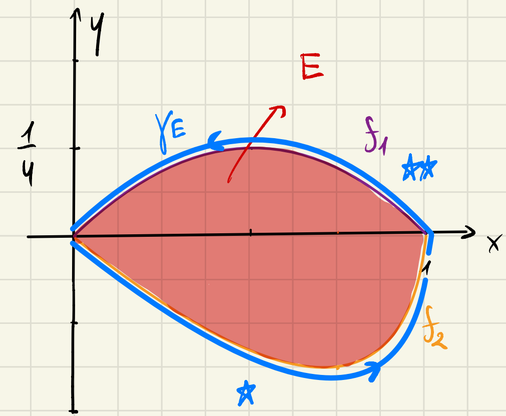
ES. 1: CALCOLARE AREA DI E, CON E AREA RACCHIUSA DA $f_1(x) = x(1-x)$ CON $x \in [0,1]$

$f_2(x) = x(x^2-1)$ CON $x \in [0,1]$



GUARDIAMO COME È FATTO E...

LA COSA IMPORTANTE È CHE ABBIAMO CAPITO CHE $f_1 > f_2$ IN $[0,1]$.

PER CALCOLARE L'AREA DOVREMMO CALCOLARE:

$$\int_E dx\,dy = \text{Area}$$ DOVE LA FUNZIONE IMPLICITA È $f(x,y) = 1$.

GUARDIAMO ALL'ENUNCIATO DI GAUSS-GREEN: $$\oint_{\gamma_E} \left(dx\, A(x,y) + dy\, B(x,y) \right) = \int_E dx\,dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right)$$

⊛

i) TROVIAMO $A(x,y)$ E $B(x,y)$ CHE SODDISFANO: $$\int_E dx\,dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \overset{⊛}{=} \int_E dx\,dy\,(1)$$

SE IMPONIAMO $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{2}$ E $\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 1$ ✓

$$\Rightarrow \left[B(x,y) = \frac{1}{2}x \qquad A(x,y) = -\frac{1}{2}y \right] ✓$$

$$\Rightarrow \text{AREA} = \int_E dx\,dy = \oint_{\gamma_E} \left(dx\, A(x,y) + dy\, B(x,y) \right) = \frac{1}{2}\oint_{\gamma_E} \left(-dx \cdot y + dy\, x \right) = \frac{1}{2}\oint_{\gamma_E} (dy\, x - dx\, y)$$

$$\gamma_E = \begin{cases} y = f_2(x) \quad \text{CON} \quad x : 0 \to 1 & (\star) \\ \\ y = f_1(x) \quad \text{CON} \quad x : 1 \to 0 & (\star\star) \end{cases}$$

DOBBIAMO INTEGRARE SU ENTRAMBI PER CHIUDERE IL PERCORSO.

$$(\star) \quad \frac{1}{2}\oint (dy\, x - dx\, y) = \frac{1}{2}\int dy\, x - \frac{1}{2}\int dx\, y$$

$$y = f_2(x) = x(x^2 - 1)$$

$$dy = f_2'(x)\, dx = (3x^2 - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \overbrace{dx\,(3x^2 - 1)}^{dy} x - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(x^3 - x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(3x^3 - \cancel{x} - x^3 + \cancel{x}) = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 dx\,\cancel{2}x^3 = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$$

(✩✩) $y = f_1(x) \Rightarrow dy = f_1'(x)\,dx = (1-2x)\,dx$

$$\frac{1}{2}\int_1^0 dx\,(1-2x)x - \frac{1}{2}\int_1^0 dx\,(x-x^2) = \frac{1}{2}\int_1^0 dx\,(\cancel{x} - 2x^2 - \cancel{x} + x^2) = -\frac{1}{2}\int_1^0 dx\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,x^2 = \frac{1}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

AREA $= (✩) + (✩✩) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+4}{24} = \frac{10}{24} = \boxed{\frac{5}{12}}$ ✓

ES. 2: MAX E MIN DI $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+2y^2}$

i) DOMINIO? $x^2+2y^2 \neq 0$ C'È UN UNICO PTO IN CUI QUESTO SI ANNULLA $(0,0)$

$$\Rightarrow \quad D = \{ \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \}$$

ii) CALCOLIAMO IL GRADIENTE PER TROVARE PTI STAZIONARI:

$$\nabla f(x,y) = \left[\partial f/\partial x \, , \; \partial f/\partial y \right]$$

RICORDIAMOCI CHE: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2+2y^2}\right) = \left(\dfrac{\cancel{0\cdot(x^2+2y^2)} - 1\cdot(2x)}{(x^2+2y^2)^2}\right) = -\dfrac{2x}{(x^2+2y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2+2y^2}\right) = -\dfrac{4y}{(x^2+2y^2)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\nabla} f(x,y) = \left[-\frac{2x}{(x^2+2y^2)^2} \, , \, -\frac{4y}{(x^2+2y^2)^2} \right]$$

$$\overline{\nabla} f(x,y) \overset{!}{=} 0$$ PER TROVARE PTI STAZIONARI :

$$\begin{cases} -\dfrac{2x}{(x^2+2y^2)^2} = 0 \\ -\dfrac{4y}{(x^2+2y^2)^2} = 0 \end{cases} \quad \circledast$$

$\Rightarrow$ [$(0,0)$ È L'UNICO CANDIDATO A RISOLVERE IL SISTEMA $\circledast$, MA $(0,0)$ NON È PARTE DEL DOMINIO. :( ]

LA FUNZIONE NON HA PTI. STAZIONARI!

ES. 3: MAX E MIN DI $\ln(1+x^2y^2)$

i) DOMINIO: $1+x^2y^2>0 \Rightarrow \underbrace{x^2y^2}_{\geq 0}>-1$ È SEMPRE VERO ✓

$\Rightarrow D=\mathbb{R}^2$

ii) $\bar{\nabla} f(x,y)=?$ $\bar{\nabla} f(x,y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\left[\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot 2xy^2, \frac{1}{1+x^2y^2}\cdot 2yx^2\right]$

$$=\left[\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \frac{2yx^2}{1+x^2y^2}\right]$$

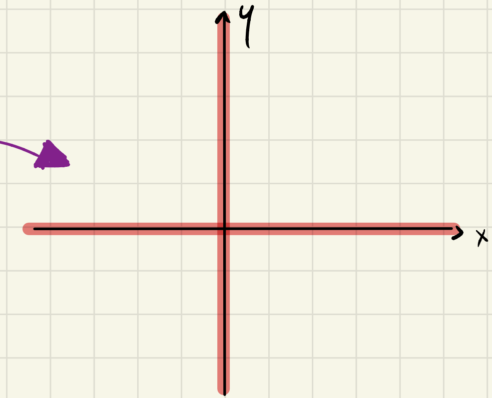
PER TROVARE PTI STAZIONARI: $\bar{\nabla} f(x,y)=0 \Rightarrow \left[\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \frac{2yx^2}{1+x^2y^2}\right]=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}=0, & 2xy^2=0 \\ \frac{2yx^2}{1+x^2y^2}=0, & 2yx^2=0 \end{cases} \circledast$$

PER SODDISFARE BASTA CHE SOLO UNA DELLE 2 VARIABILI SIA NULLA.

Ex. $x=0, y\neq 0$ SODDISFA $\circledast$, MA ANCHE $x\neq 0, y=0$ LO SODDISFA!

$\Rightarrow$ HO UN "CONTINUO" DI PTI STAZIONARI LUNGO GLI ASSI.



iii) STUDIAMOLI... $Hf(x,y) = ?$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\right) = 2y^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}\right)$$

$$= 2y^2\left(\frac{1\cdot(1+x^2y^2) - x\cdot(0+2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2y^2}{(1+x^2y^2)} - \frac{4x^2y^4}{(1+x^2y^2)^2}$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^2}\right)$$

$$= 2x\left(\frac{2y\cdot(1+x^2y^2)-y^2(0+x^2\cdot 2y)}{(1+x^2y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)} - \frac{4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

È CONTINUA? $1+x^2y^2 \neq 0$ ✓ VERO SEMPRE! $\Rightarrow$ PER TH. SCHWARTZ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

$$\Rightarrow \bullet\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)} - \frac{4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\bullet\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2yx^2}{1+x^2y^2}\right) = 2x^2\left(\frac{1\cdot(1+x^2y^2)-y\cdot(0+x^2\cdot 2y)}{(1+x^2y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2x^2}{(1+x^2y^2)} - \frac{4y^2x^4}{(1+x^2y^2)^2}$$

VALUTIAMOLE LUNGO GLI ASSI (CHE SONO I NOSTRI PTI STAZIONARI)

1) $x=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +2y^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$Hf(0,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2y^2 \geq 0 \Rightarrow$$ [È UN CONTINUO DI MINIMI.] ✓

2) $y = 0 \Rightarrow Hf(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{bmatrix} \qquad 2x^2 \geq 0 \Rightarrow$ [È UN CONTINUO DI MINIMI.] ✓

$\Rightarrow$ I 2 ASSI SONO DUE CONTINUI DI MINIMI!